SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2019 Issue: 05 Volume: 73

Published: 10.05.2019 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Unona Krahmaleva
Candidate of Science
Taraz State University named M.H.Dulaty

Marzhan Besbayeva
graduate student of the 2nd course of the specialty
"Mathematics»
Taraz State University named M.H.Dulaty

FINDING A SOLUTION TO A REGULAR PROBLEM OF THE STURM - LIOUVILLE PROBLEM WITH VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS IN MEDIUM MAPLE

***Abstract**: Today the Maple system is especially popular in the scientific environment. The developed system of commands, user-friendly interface and extensive capabilities allow you to effectively use Maple for solving mathematical problems. We will use this opportunity to solve the Sturm – Liouville problem with different boundary conditions.*

***Key words**: Maple, Sturm – Liouville problem, boundary conditions.*
***Language**: Russian*
***Citation**: Krahmaleva, U., & Besbayeva, M. (2019). Finding a solution to a regular problem of the Sturm - Liouville problem with various boundary conditions in medium maple. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (73),* 407-413.
***Soi**: http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-73-60 ***Doi**: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.05.73.60

НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА- ЛИУВИЛЛЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В СРЕДЕ MAPLE

***Аннотация**: На сегодняшний день система Maple особо популярна в научной среде. Развитая система команд, удобный интерфейс и широкие возможности позволяют эффективно применять Maple для решения математических задач. Этой возможностью воспользуемся для решения задачи Штурма – Лиувилля с различными граничными условиями.*
***Ключевые слова**: Maple, задача Штурма – Лиувилля, граничные условия.*

Introduction

Как известно, многочисленные различные краевые задачи приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$Y''(x)+\lambda Y(x)=0 \quad , \quad a<x<b \qquad (1)$$

где λ - параметр, принимающий любые значения с различными граничными условиями:

$$Y(a)=0, Y(b)=0 \, , \qquad (2)$$

$$Y'(a)=0, Y'(b)=0 \, , \qquad (3)$$

$$Y'(a)-h_aY(a)=0, Y'(b)+h_bY(b)=0 \qquad (4)$$

где (2) – граничные условия первого рода, (3)- граничные условия второго рода, (4) – граничные условия третьего рода/

Materials and Methods

Для нахождения решения уравнения (1) с одним из граничных условий (2)- (4) , называемой задачей Штурма - Лиувилля необходимо определить те значения λ - собственные значения, при которых существуют нетривиальные решения - собственные функции задачи. При различных условиях в конечных точках интервала на решение уравнения (1) получают различные задачи на собственные значения, а значит различные собственные значения и собственные функции, которые используются при методе разделения переменных. В связи с этим, имеет практический интерес нахождение собственных значений и собственных функций для задачи, которая включает каждый из граничных условий (2)- (4). Для этого , примем во внимание первое выражение из вышеназванных граничных условий, т.е.

$Y(a)=0$ в условиях 1-го рода,

$Y'(a)=0$ в условиях 2-го рода,

$Y'(a)-h_aY(a)=0$ в условиях 3-го рода.

Как видно выражение в условиях первого рода представляет значение функции в точке, второго рода - значение производной функции в точке, а условиях третьего рода - и значение функции и значение производной функции в точке. Чтобы отразить это в программе воспользуемся возможностями тестирующей функции hasfun(V,<Id-функции> {,x}) с помощью которой возвращается значение true, если определенное первым фактическим аргументом V-выражение содержит вхождение функции, заданной своим идентификатором, и, возможно, от указанной третьим необязательным аргументом ведущей x-переменной.

Вводим значения уравнение (1):

$restart;\ with(PDEtools) : with(LinearAlgebra);\ \mathrm{DU1} := diff(y(x),x,x) + \mathrm{lambda}\cdot y(x) = 0;$

$$DU1 := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + \lambda\,y(x) = 0$$

Затем вводим требуемые граничные условия, например, граничные условия первого рода и находим общее решение:

$g1\_0 := y(a) = 0;\ g2\_0 := y(b) = 0;$

$g1\_0 := y(a) = 0$

$g2\_0 := y(b) = 0$

$Y := dsolve(DU1, y(x));\ dsolve(DU1, y(x));\ y := unapply(rhs(\%), x);\ assume(b > a);$

$$Y := y(x) = \_C1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$$
$$y(x) = \_C1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$$
$$y := x \rightarrow \_C1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$$

Для нахождения решения задачи с конкретными граничными условиями используем цикл с тестирующей функцией $hasfun$.:

$\mathbf{if}\ hasfun(lhs(g1\_0), y)\ \mathbf{and\ not}(hasfun(lhs(g1\_0), \mathrm{D}(y)))\ \mathbf{then}\ p := 1;\ \mathbf{fi};$

$\mathbf{if\ not}(hasfun(lhs(g1\_0), y))\ \mathbf{and}\ hasfun(lhs(g1\_0), \mathrm{D}(y))\ \mathbf{then}\ p := 2;\ \mathbf{fi};$

$\mathbf{if}\ hasfun(lhs(g1\_0), y)\ \mathbf{and}\ hasfun(lhs(g1\_0), \mathrm{D}(y))\ \mathbf{then}\ p := 3;\ \mathbf{fi};$

При введенных граничных условиях первого рода нахождение решения задачи Штурма – Лиувилля будет осуществляться по первому циклу:

if $p = 1$ **then**
$g1 := y(a) = 0$; $g2 := y(b) = 0$;
$sys := \{g1, g2\}$; G1 := GenerateMatrix(sys, [_C1, _C2]); G2 := GenerateMatrix(sys, [_C2, _C1]);
$G12 := \langle\langle G1|G2\rangle\rangle$; G122 := Column($G12$, 1); G123 := Column($G12$, 4); $G := \langle\langle G122|G123\rangle\rangle$;
$del := combine(Determinant(G))$; $del := select$(has, del, lambda); _EnvAllSolutions := true : lambda := $solve(del$, lambda); _EnvAllSolutions := true :
lambda := $subs$(_Z1 = k, lambda);
$assume$(k, posint) : y(x);
$C1 := solve(g1$, _C1); $combine(\%)$; $simplify(subs(\_C1 = combine(\%\%, trig), y(x)))$; $combine(\%)$;
$Y := unapply(select(has, \%, [x]), x, k)$; $Y(a, k) = 0$; $simplify(Y(b, k)) = 0$;
$assume$(n, posint); $assume$(m, posint);
$Int(Y(x, n) \cdot Y(x, m), x = a..b)$; $simplify(value(\%))$;
$Norma := Int\left(Y(x, n)^2, x = a..b\right)$; $simplify(value(\%))$;
fi;

Здесь воспользовались результатами [4], [6], где рассмотрено решение задачи Штурма – Лиувилля для граничных условий первого и второго родов.

$$g1 := \_C1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) = 0$$

$$g2 := \_C1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) = 0$$

$$sys := \left\{\_C1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) = 0, \_C1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) = 0\right\}$$

$$G1 := \begin{bmatrix} \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G2 := \begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G12 := \begin{bmatrix} \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) & 0 & \cos\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) & 0 \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) & 0 & \cos\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$G122 := \begin{bmatrix} \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) \end{bmatrix}$$

$$G123 := \begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) \end{bmatrix}$$

$$G := \begin{bmatrix} \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim\right) \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\, b\sim\right) \end{bmatrix}$$

$$del := \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim - \sqrt{\lambda}\, b\sim\right)$$

$$del := \sin\left(\sqrt{\lambda}\, a\sim - \sqrt{\lambda}\, b\sim\right)$$

$$\lambda := \frac{\pi^2 \_Z1\sim^2}{(-b\sim + a\sim)^2}$$

$$\lambda := \frac{\pi^2 k^2}{(-b\sim + a\sim)^2}$$

$$\_C1 \sin\left(\sqrt{\frac{\pi^2 k\sim^2}{(-b\sim + a\sim)^2}}\, x\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2 k\sim^2}{(-b\sim + a\sim)^2}}\, x\right)$$

$$C1 := \frac{\_C2 \cos\left(\frac{\pi k\sim a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k\sim a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)}$$

$$\frac{\_C2 \cos\left(\frac{\pi k\sim a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k\sim a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)}$$

$$-\frac{\_C2 \left(\sin\left(\frac{\pi k\sim x}{-b\sim + a\sim}\right) \cos\left(\frac{\pi k\sim a\sim}{-b\sim + a\sim}\right) - \cos\left(\frac{\pi k\sim x}{-b\sim + a\sim}\right) \sin\left(\frac{\pi k\sim a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi k\sim a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)}$$

$$\frac{\_C2 \sin\left(\frac{\pi a\sim k\sim - \pi k\sim x}{-b\sim + a\sim}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k\sim a\sim}{-b\sim + a\sim}\right)}$$

$$Y := (x, k\sim) \rightarrow \sin\left(\frac{\pi a\sim k\sim - \pi k\sim x}{-b\sim + a\sim}\right)$$

В цикле проверили выполнение граничных условий и ортогональность собственных функций на конечном отрезке, результаты которых представлены ниже:

$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

$$\int_{a\sim}^{b\sim} \sin\left(\frac{\pi a\sim n\sim - \pi n\sim x}{-b\sim + a\sim}\right) \sin\left(\frac{\pi a\sim m\sim - \pi m\sim x}{-b\sim + a\sim}\right) dx$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} b\sim - \frac{1}{2} a\sim & m\sim - n\sim = 0 \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

$$Norma := \int_{a\sim}^{b\sim} \sin\left(\frac{\pi a\sim n\sim - \pi n\sim x}{-b\sim + a\sim}\right)^2 dx$$

$$\frac{1}{2} b\sim - \frac{1}{2} a\sim$$

Для нахождения решения задачи Штурма – Лиувилля с граничными условиями второго рода , вводим их:

```
DU1 := diff(y(x), x, x) + lambda·y(x) = 0;
g1_0 := D[1](y)(a) = 0;
g2_0 := D[1](y)(b) = 0;
with(DEtools) :
if hasfun(lhs(g1_0), y) and not(hasfun(lhs(g1_0), D(y)))then p := 1; fi;
if not(hasfun(lhs(g1_0), y))and hasfun(lhs(g1_0), D(y))then p := 2; fi;
if hasfun(lhs(g1_0), y)  and  hasfun(lhs(g1_0), D(y)) then p := 3; fi;
Y := dsolve(DU1, y(x));
dsolve(DU1, y(x)); y := unapply(rhs(%), x) ;
assume(b > a);
```

В этом случае нахождение решения задачи Штурма –Лиувилля будет осуществляться по второму циклу:

```
if p = 2 then
g1 := D[1](y)(a) = 0 ; g2 := D[1](y)(b) = 0 ;
sys := {g1, g2}; G1 := GenerateMatrix(sys, [_C1, _C2]); G2 := GenerateMatrix(sys, [_C2,
    _C1]);
G12 := ⟨⟨G1|G2⟩⟩; G122 := Column(G12, 1); G123 := Column(G12, 4); G := ⟨⟨G122
    |G123⟩⟩;
del := combine(Determinant(G)); del := select(has, del, lambda); _EnvAllSolutions := true :
    lambda := solve(del, lambda); _EnvAllSolutions := true :
lambda := lambda[2];
lambda := subs(_Z1 = k, lambda);
assume(k, posint) : y(x);
C1 := solve(g1, _C1); combine(%); simplify(subs(_C1 = combine(%%, trig), y(x)));
    combine(%);
Y := unapply(select(has, %, [x]), x, k); simplify(D[1](Y)(a, k)) = 0; simplify(D[1](Y)(b, k))
    = 0;
assume(n, posint); assume(m, posint);
Int(Y(x, n)·Y(x, m), x = a ..b); simplify(value(%));
Norma := Int(Y(x, n)^2, x = a ..b); simplify(value(%));
fi;
```

Аналогично поступаем при решении задачи с граничными условиями третьего рода, решение которой осуществляется по третьему циклу ($h_a = 1$, $h_b = 1$):

```
if p = 3 then
g1 := y(a)-D[1](y)(a) = 0 ; g2 := y(b) + D[1](y)(b) = 0 ; sys := {g1, g2};
G1 := GenerateMatrix(sys, [_C1, _C2]); G2 := GenerateMatrix(sys, [_C2, _C1]);
G12 := ⟨⟨G1|G2⟩⟩; G122 := Column(G12, 1); G123 := Column(G12, 4);
G := ⟨⟨G122|G123⟩⟩;
del := combine(Determinant(G));
```

Матрица коэффициентов и ее определитель отличается от ранее рассмотренных:

$$G := \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda\sim}\cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\, b\sim\right) + \sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\, b\sim\right) & -\sqrt{\lambda\sim}\sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\, b\sim\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\, b\sim\right) \\ -\cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\, a\sim\right)\sqrt{\lambda\sim} + \sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\, a\sim\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\, a\sim\right)\sqrt{\lambda\sim} + \cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\, a\sim\right) \end{bmatrix}$$

$$del := \lambda\sim \sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right) + 2\sqrt{\lambda\sim}\ \cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right) - \sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right)$$

Для нахождения собственных значений преобразовываем выражение определителя и решаем относительно тангенса:

```
s := convert(s1, tan) = 0;   s2 := solve(s, tan(λ^(1/2)·a − λ^(1/2)·b));
```

$$s1 := -\frac{\lambda\sim \sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right)}{\cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right)} - 2\sqrt{\lambda\sim} + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right)}{\cos\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right)}$$

$$s := -\lambda\sim \tan\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right) - 2\sqrt{\lambda\sim} + \tan\left(\sqrt{\lambda\sim}\ a\sim - \sqrt{\lambda\sim}\ b\sim\right) = 0$$

$$s2 := -\frac{2\sqrt{\lambda\sim}}{\lambda\sim - 1}$$

Conclusion

Как видно, полученное решение тригонометрического уравнения необходимо преобразовать для нашего решения -нахождения собственных значений. Для этого удобно ввести новую переменную $\mu = \sqrt{\lambda}\alpha$, значения которой определяются из уравнения:

$$f(\mu) = 0,$$

где $f(\mu) = tg\,\mu - \dfrac{2\mu\alpha}{\mu^2 - \alpha^2}$. Положительные корни этого уравнения будут при $\mu_k = 1,2,...,$.

Следовательно, собственные значения будут определяться по формуле:

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{\alpha}\right)^2 ;$$

$$\frac{2\,\mu\sim |a\sim|}{a\sim^2 - \mu\sim^2}$$

$$f := \tan(\mu\sim) - \frac{2\,\mu\sim |a\sim|}{a\sim^2 - \mu\sim^2}.$$

Нахождение собственных функций определяется ниже:

```
_C2 := solve(g1, _C2);
_C2 := simplify(subs(λ = (mu/a)^2, _C2));

y := collect(subs(λ = (mu/a)^2, y(x)), _C1);
subs(mu = mu[n], y);

y := unapply(select(has, %, [x]), x, n);
```

Данная программа применяется для определенных значений a и b, для чего в начале программы вводятся их значения.

References:

1. Bitsadze, A. V. (1982). *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. (p.336). Moscow: Nauka.
2. Vladimirov, V. S. (1981). *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. (p.512). Moscow: Nauka.
3. Mikhaylov, V. P. (1983). *Differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi*. (p.424). M.: Nauka.
4. Goloskokov, D. P. (2004). *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. Reshenie zadach v sisteme Maple uchebnik dlya vuzov. (p.539). SPb.: Piter.
5. D'yakonov, V. P. (2006). M*aple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii*. Izd: Piter.
6. Tikhonov, A. N., & Samarskiy, A. A. (1977). *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. Moscow: Nauka.
7. Aramanovich, I. G., & Levin, V. I. (1964). *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. Moscow: Nauka.
8. Arsenin, V. Y. (1966). *Matematicheskaya fizika*. Moscow: Nauka.
9. Krahmaleva, U., & Shevtsov, V. (2019). Analytical solution of the regular problem of the Sturm - Liouville problem in maple environment. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (72)*, 595-598. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-72-84 Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.04.72.84