

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
PIHII (Russia) = 0.156
ESJI (KZ) = 8.716
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2019 Issue: 05 Volume: 73

Published: 16.05.2019 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



SECTION 7. Mechanics and machine construction

Nurillo Raximovich Kulmuratov
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering, Navoi State Mining Institute, Uzbekistan,
nurillo.Kulmuratov.64@mail.ru

Sergey Karimovich Kaxarov
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering, Navoi State Mining Institute, Uzbekistan,

DYNAMIC STRESSED-DEFORMABLE STATE OF A PIECE-UNIFORM CYLINDRICAL LAYER (SHELL) WITH LIQUID FROM A HARMONIC WAVE

Abstract: The paper considers an infinitely long body-cylindrical shape, consisting of a finite number of coaxial viscoelastic layers surrounded by a deformable medium. The dependence of the dynamic stress-strain state of a piecewise-uniform cylindrical layer on a harmonic wave was investigated. The results were obtained in the form of numerical values of the voltage in the structure, called dependences on the wavelength.

Key words: cylinder, layer, wavelength, stress, fluid shell, plane strain, sewage, module, function, core, relaxation.

Language: Russian

Citation: Kulmuratov, N. R., & Kaxarov, S. K. (2019). Dynamic stressed-deformable state of a piece-uniform cylindrical layer (shell) with liquid from a harmonic wave. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (73), 101-110.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-73-17> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.05.73.17>

ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ (ОБОЛОЧЕК) С ЖИДКОСТЬЮ ОТ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Аннотация: В работе рассматривается бесконечно длинное тело цилиндрической формы, состоящее из конечного числа коаксиальных вязкоупругих слоев, окруженных деформируемой средой. Была исследована зависимость динамического напряженно-деформируемого состояния кусочно-однородного цилиндрического слоя от гармонической волны. Получены результаты в виде числовых значений напряжения в конструкции, именующиеся в зависимости от длины волн.

Ключевые слова: цилиндр, слой, длина волны, напряжения, оболочка жидкости, плоская деформация, канализация, модуль, функция, ядро, релаксация.

Введение.

Развитие в последние годы системы подземных коммуникаций в сейсмически активных районах связано с проведением широких и полных исследований. К основным подземным сооружениям относятся системы водоснабжения и канализации, тоннели, подземные переходы, подземные выемки и подводные тоннели.

В настоящее время хорошо разработанными являются методики статического и динамического расчета одиночно уложенной трубы, которые без

всякого изменения применяются проектными организациями для расчета трубопроводов.

В работе рассматривается зависимость динамического напряженно-деформируемого состояния кусочно-однородного цилиндрического слоя от гармонической волны. Предполагается, что слоистый пакет представляет собой толстостенные и тонкостенные слои цилиндра [1-3]. При описании движения тонкостенных элементов используются уравнения теории таких оболочек, в основу которых положены гипотезы Крехгофа-Лява. Для толстостенных слоев

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.156
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

исходными являются уравнения линейной теории упругости [4,5].

Постановка задачи и методы решения. Рассматривается многослойное цилиндрическое тело с жидкостью. Нумерация слоев - произведение в порядке возрастания их радиусов

от $k = 1$ до $k = N$ (рис.1). Величине характеризующей свойства и состояние элементов соответствуют значения $j = 1, 2, 3, \dots, N$, где k - упругий слой заключен между $k-1$ и k -м слоями. Параметры внешней среды обозначены индексами $\kappa = N$ (рис.1).

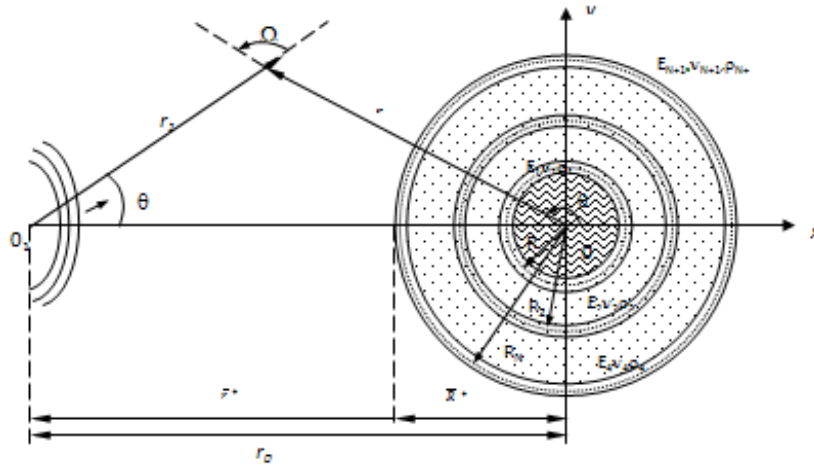


Рис.1. Дифракции волн на многослойном цилиндрическом теле.

В работе исследуется взаимодействие цилиндрической волны напряжения параллельно-слоистыми деформируемыми (упругими или вязкоупругими) слоями. Основные уравнения теории упругости для этой задачи о плоской деформации сводятся к следующему:

$$(\tilde{\lambda}_j + 2\tilde{\mu}_j) \text{grad div } \tilde{u}_j - \tilde{\mu} \text{rot rot } \tilde{u}_j + \tilde{b}_j = \rho_j \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2}, (j=2,4,..N+1)$$

$$L \tilde{E} \tilde{u} = \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0 h_0} \tilde{p} + \rho_0 \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right), (k=1,3,..N) \quad (1)$$

$$\Delta \phi_0 - \frac{1}{c_\infty^2} \ddot{\phi}_0 = 0,$$

Здесь $\tilde{\lambda}_j, \tilde{\mu}_j$ и \tilde{E}_k операторные модули упругости

$$\tilde{\lambda}_j f(t) = \lambda_{0j} \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R_\lambda^{(i)}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right],$$

$$\tilde{\mu}_j f(t) = \mu_{0j} \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R_\mu^{(i)}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right];$$

$$\tilde{E} f(t) = E_{01} \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R_E(t-\tau) f(\tau) d\tau \right],$$

$$\beta_1^{(\kappa)} = \frac{\gamma_\kappa (1-\nu_\kappa^2) c_1^2 R_\kappa^2}{R_1}, \quad \beta_2^{(\kappa)} = \frac{R_\kappa^2 (1-\nu_\kappa^2) c_1^2 \rho_1}{h_\kappa R_1},$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} \\ \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} & \frac{1+\nu_0}{2} (1+4a) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1+a) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} - \frac{a}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{\nu_0}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - a(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} - \frac{a}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\ \frac{1}{R^2} + a \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \end{matrix} \right\}$$

E_{01} -модули Юнга; $\tilde{u} = \tilde{u}(u_r, u_\theta, u_z)$ - перемещение поверхности оболочки ($u_r = u; u_\theta = v; u_z = w$), $\tilde{u}_j(u_{rj}, u_{\theta j}, u_{zj})$ - вектор смещения толстых оболочек, r, θ, z, t - цилиндрические координаты; ϕ_0 - потенциал скорости идеальной жидкости; ρ_j - плотность материалов слоя; γ_κ - плотность материалов оболочки; \tilde{b}_j - объёмная сила ($b_j = 0$); $f(t)$ - непрерывная функция; $R_E^{(i)}(t-\tau)$, $R_\mu^{(i)}(t-\tau)$ и $R_\lambda^{(i)}(t-\tau)$ - ядро релаксации; λ_{0j}, μ_{0j} - мгновенные модули упругости слоя; E_{01} - мгновенные модули упругости оболочки.

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.156
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Если слой заполнен вязкой жидкостью, тогда уравнение движение системы удовлетворяет уравнению Навье -Стокса.

Вектор перемещений среды представим в виде:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi} \quad (2)$$

В цилиндрических координатах (2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z}; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r}; \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\psi_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \end{aligned}$$

где φ – потенциал продольных волн;

$\vec{\psi} (\psi_r, \psi_\theta, \psi_z)$ – потенциал поперечных волн.

Потенциалы продольных и поперечных волн удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0; \\ \nabla^2 \psi_z - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\nabla^2 \psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} = 0;$$

$$\nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} = 0$$

где

$$\Gamma_\kappa = 1 - \Gamma^c(\omega_\kappa) - i\Gamma^s(\omega); \quad \bar{c}_s^2 = c_s^2 \Gamma_\kappa \quad \bar{c}_p^2 = c_p^2 \Gamma_\kappa$$

$$c_p^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho; \quad c_s^2 = \mu / \rho -$$

соответственно скорость продольных и поперечных волн. В случае плоской задаче из (3) дифференциального уравнения остаётся два уравнения, которые для слоистого тела принимают следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi_j = \frac{1}{c_{pj}^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2}; \quad (j=1,2,\dots,N)$$

$$\nabla^2 \psi_j = \frac{1}{c_{\rho j}^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2},$$

$$\left[1 + \frac{h^2}{12R_1^2} \right] \frac{d^2 V^{(k)}}{d\vartheta^2} + \frac{dW^{(k)}}{d\vartheta} - \frac{h_k^2}{12R_1^2} \frac{d^3 W^{(k)}}{d\vartheta^3} = \eta_1 \left[\frac{d^2 v^{(k)}}{dt^2} - g_k^{(1)} \right];$$

$$\frac{dV^{(k)}}{d\vartheta} + \frac{h_k^2}{12R_k^2} \frac{d^2 V^{(k)}}{d\vartheta^2} - W^{(k)} - \frac{h_k^2}{12R_k^2} \frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial \theta^4} =$$

$$\eta_k \left[\frac{d^2 v^{(k)}}{dt^2} - g_q^{(1)} \right],$$

где $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ волновые потенциалы соответственно упругих сред; v -нормальные и тангенциальные перемещения оболочек, $g_{rk}^{(k)}$, $g_{\theta k}^{(k)}$ - действующие на них нагрузки;

$\Delta = \frac{d}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} + \frac{d}{d\theta^2}$ - оператор Лапласа в цилиндрических координатах (r ; θ);

$$\eta_1 = \frac{(1 - \nu_{2i}) c_1 \rho_1 R_1}{E_1}; \quad \alpha_j = c_2 \sqrt{\frac{\rho_j}{\lambda_j + 2\mu_j}} \quad \beta = c_1 \sqrt{\frac{\rho_j}{\mu_j}};$$

Здесь E_j ; ν_j ; γ_j ; h_j ; R_j ; ($j = 1, 2, \dots, N$) -модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала, толщина и радиус j - го слоя соответственно.

Предполагается, что интенсивность линейного источника O изменяется во времени по гармоническому закону. На основе этой задачи можно выявить общий эффект близости источника. Также предполагается, что линейный источник (на рис.1) является непрерывным источником гармонических волн напряжения с угловой скоростью ω и амплитудой φ_j . Рассмотрим продольную волну, порождаемую продольным источником волн расширения, расположенным в точке \bar{O} . Потенциалы перемещения падающей волны расширения можно представить в виде:

$$\varphi_N^p = \varphi_{NO} i \pi H_o^{(1)}(\alpha_N \bar{r}) e^{-i\alpha r} \quad (4)$$

где $H_o^{(1)}$ - представляет собой расходящуюся функцию Ханкеля (первого рода нулевого порядка), а α - волновое число сжатия; $\alpha^2 = \omega^2 / c_s^2$; ω - круговая частота. Линия действия нагрузки составляет угол γ с осью.

Средняя плоскость системы показана на рис.1. Окружность $r = R_N$ разбивает плоскость $X-Y$ на «внешнюю» и «внутреннюю» области.

$$\Omega = \begin{cases} r > R_{j-1} - \text{внешняя область, } (j=1, 2, \dots, N) \\ R_{i-1} \leq r \leq R_i - \text{внутренняя область,} \end{cases}$$

Потенциал для внешней области можно представить в виде:

$$\varphi_N = \varphi_N^{(p)} + \phi_N, \quad \varphi_N^{(H)} = \phi_N^{(p)} + \phi_N \quad (5)$$

где $\phi_N^{(p)}$, $\phi_N^{(H)}$ - определяют невозмущенное поле напряжений, т.е. поле в отсутствии любой неоднородной поверхности; $\phi_N^{(H)}$, $\phi_N^{(H)}$ - поле напряжений, обусловленное наличием цилиндрической поверхности разрыва.

В работе [8] получено обобщение результатов Лэмба и найдено, что не возмущенное поле определяется

$$\varphi_N^{(p)} = F_1 \cos(\gamma - \theta_1) H_1^{(1)}(\alpha_N r_1) e^{-i\alpha r};$$

$$\psi_N^{(p)} = F_2 \sin(\gamma - \theta_1) H_1^{(1)}(\beta_N r_1) e^{-i\alpha r}$$

$$F_1 = ip / 4 \rho \omega c_p; \quad F_2 = ip / 4 \rho \omega c_{s2},$$

$$\alpha_N = w / c_{1N}; \quad \beta_N = w / c_{sN}; \quad i = (-1)^{1/2} \quad (6)$$

а величина $H_\mu^N(Z)$ является функцией Ханкеля первого рода и порядка μ . С помощью теоремы сложения Бесселевых функций [9] выражения (6) могут быть переписаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \phi_N^{(p)} &= \sum_{b=-\infty}^{\infty} [-F_1(-1)^m J_m(\alpha_N r) H_{m+1}^{(1)}(\alpha_m z) \\ &\times \cos(\gamma - m\theta)] e^{-i\omega t} \\ \psi_N^{(p)} &= \sum_{b=-\infty}^{\infty} [F_1(-1)^{m+1} J_m(\beta_N r) H_{m+1}^{(1)}(\beta_m z) \\ &\times \sin(\gamma + m\theta)] e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} (7)$$

где J_m - функция Бесселя первого рода порядка m .

С другой стороны внешнее поле напряжений, обусловленное наличием цилиндрических неоднородностей, полностью определяется решениями уравнений (1), которые периодичны по θ и представляют собой волны, выходящие из удельной точки, которые имеют убывающие во времени амплитуды. Эти решения таковы:

$$\begin{aligned} \phi_N^{(p)} &= \sum_{b=-\infty}^{\infty} (A_{Nm} \sin(m\theta) + B_{Nvm} \times \cos(\gamma - m\theta)) \times \\ &\times H_m^{(1)}(\alpha_N r) e^{-i\omega t} \\ \phi_N^{(s)} &= \sum_{b=-\infty}^{\infty} (C_{Nm} \sin(m\theta) + D_{Nvm} \times \cos(\gamma - m\theta)) \times \\ &\times H_m^{(1)}(\beta_N r) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

где A_{Nm} , B_{Nm} , C_{Nm} и D_{Nm} - константы, подлежащие определению из контактных условий $r=R_j$ ($j=1, 2, \dots, N$). Построение формального решения не встречает принципиальных затруднений, но исследование такого решения требует огромного количества вычислений. Задачи сводятся к решению неоднородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами.

$$[C]\{g\} = \{p\}$$

В случае, когда

$$E_1 = E_2 \dots = E_N, \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_N \text{ и } v_1 = v_2 = \dots = v_N$$

получаем отверстия, находящиеся в безгранично упругой среде.

В этом случае граница свободна от напряжений. Неизвестные постоянные из (5) определяются по формулам:

$$A_{Nm} = -\sin \gamma (-1)^m \Delta_{Nm}, B_{Nm} = \cos \gamma (-1)^m \Delta_{Nm},$$

$$C_{Nm} = \cos \gamma (-1)^m \Delta_{Nm}, A_{Nm} = \sin \gamma (-1)^m \Delta_{Nm}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{Nm} &= [F_1 H_{m+1}(\alpha_N \bar{Z}) \{E_{mk} K_{mk} - D_{mn} K_{mk}\} + \\ &+ [F_2 H_{m+1}(\beta_N \bar{Z}) \{H_{mk} K_{ma} - K_{ma} \bar{K}_{ma}\}] / \Delta_m; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{Nm} &= [F_2 H_{m+1}(\alpha_N \bar{Z}) \{D_{mk} \bar{E}_{mk} - E_{mn} D_{mk}\} + \\ &+ [F_2 H_{m+1}(\beta_N \bar{Z}) \{\bar{K}_{mk} \bar{D}_{mk} - K_{mn} \bar{E}_{mk}\}] / \Delta_m; \end{aligned}$$

$$\bar{\Delta}_m = \bar{D}_{mk} K_{mn} - K_{mk} F_{mk};$$

$$\begin{aligned} D_{Nm} &= [m^2 + m - \frac{\beta_N^2 R_N^2}{2}] J_m(\alpha_N R_N) - \\ &- X_N R_N J_{m-1}(\alpha_N R_N); \end{aligned}$$

$$\bar{D}_{Nm} = [m^2 + m - \frac{\beta_N^2 R_N^2}{2}] H_m^{(1)}(\alpha_N R_N) -$$

$$- X_N R_N H_m^{(1)}(\alpha_N R_N);$$

$$E_{Nm} = m(m+1) J_m(\alpha_N R_N) - \alpha_N R_N J_{m-1}(\alpha_N R_N);$$

В этом случае окружное напряжение на поверхности полости сведется к следующему:

$$\sigma_{\theta\theta}(R_i, \theta, t) = \frac{-4}{\pi} \beta^2 \mu \phi_0 \left(1 - \frac{1}{R^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(\alpha_0) \times$$

$$\times \bar{T}_n \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$\bar{T} = T_m(R_1) = [\alpha_1 R_1 H_{n-1}(\alpha_1 R_1) - H_{n-1}(\alpha_1 R_1) + Q_n(\beta_1 R_1)]^{-1},$$

$$Q_n(\beta_1 R) = (n^3 - n + \frac{1}{2} \beta^2 R_1^2) \beta_1 R_1 H_{n-1}(\beta_1 R_1) -$$

$$-(n^2 + n - \frac{1}{4} \beta_1^2 R_1^2) \beta_1^2 R_1^2 H_n^{(1)}(\beta_1 R_1) / (n^2 - 1) \beta_1 R_1 H_{n-1}^{(1)} \times$$

$$\times (\beta_1 R_1) - (n^2 - n + \frac{1}{2} \beta^2 R_1^2) H_n^{(1)}(\beta_1 R_1)$$

$$\text{где } R^2 = C_{p1}^2 / C_{s1}^2.$$

Коэффициент концентрации напряжения

$\sigma_{\theta\theta}^*$ здесь определяется, как отношение $\sigma_{\theta\theta}$ к $\sigma_{\bar{r}\bar{r}}$ возникают той же точке при условии отсутствия полости.

$$\sigma_{\theta\theta}^* \Big|_{r=R_1} = \frac{\sigma_{\theta\theta} \Big|_{r=R_1}}{\sigma_{\bar{r}\bar{r}} \Big|_{r=R_1}}$$

где $\sigma_{\bar{r}\bar{r}}$ определяется как функции $\phi^{(p)}$ в виде

$$\sigma_{rr} = i\pi \phi_0 \mu \alpha^2 \left[H_2^{(1)} \pi \phi \mu(\alpha r) + (1 - R^2) H_0^{(1)}(\alpha r) \right] e^{-i\omega t}$$

Перемещения вычисляются следующим образом:

$$u_{r1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[h_1 H_n^{(1)}(h_1 r) A_n \frac{n}{r} + H_n^{(1)}(t_1 r) \right]$$

$$u_{r2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[h_2 H_n^{(1)}(h_2 r) C_n + h_2 H_n^{(2)}(h_2 r) D_n \right] +$$

$$\left[L_n \left(\frac{n}{r} H_n^{(1)}(t_2 r) \right)_n + \frac{n}{r} H_n^{(2)}(t_2 r) M_n \right] \cos \theta,$$

$$u_{Q1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{r} H_n^{(1)}(h_1 r) A_n + t_1 H_n^{(1)}(t_1 r) B_n \right] \sin \theta$$

$$u_{Q2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{r} H_n^{(1)}(h_1 r) C_n + \frac{n}{r} H_n^{(2)}(h_2 r) D_n + \right.$$

$$\left. + t_1 H_n^{(1)}(t_2 r) L_n + t_2 H_n^{(2)}(t_2 r) m_n \right] \sin \theta, \quad (8)$$

где $h_1 = p/c_{p1}, \quad t_1 = p/c_{s1},$
 $h_2 = p/c_{p2}, \quad t_2 = p/c_{s2},$ (9)

$\gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, тогда

$$\sigma^{(1)_{r1}} = \rho_2 C_{s2}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ h_2^2 [(k_2^2 - 2) H_n^{(1)}(h_2 r) + 2 H_n^{(1)'}(h_1 r)] C_n + \right.$$

$$\left. + [(k_2^2 - 2) H_n^{(2)}(h_2 r) + 2 H_n^{(2)'}(h_2 r)] D_n \right.$$

$$\left. + \frac{n}{r} \left[t_2 H_n^{(1)'}(t_2 r) + \frac{1}{r} H_n^{(2)'}(t_2 r) \right] h_n \left[t_2 H_n^{(1)'}(t_2 r) - \frac{1}{r} H_n^{(2)'}(t_2 r) \right] M_n \right\} \cos \theta \quad (10)$$

$$\sigma^{(1)_{r2}} = \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2n}{r} \left[\frac{1}{r} H_n^{(1)}(h_2 r) - h_2 H_n^{(1)'}(h_2 r) \right] C_n + \right.$$

$$\left. + \frac{2n}{r} \left[\frac{1}{r} H_n^{(2)}(h_2 r) - h_2 H_n^{(2)'}(h_2 r) \right] D_n \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2} \left[e_2 r H_n^{(1)'}(e_2 r) - e^2 r^2 H_n^{(1)''}(e_2 r) - n H_n^{(1)'}(e_2 r) \right] L_n + \right.$$

$$\left. \frac{1}{r^2} \left[e_2 r H_n^{(2)'}(e_2 r) - e^2 r^2 H_n^{(2)''}(e_2 r) - n H_n^{(2)'}(e_2 r) \right] M_n \right\} \sin \theta \quad (11)$$

$$C_{pi}^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_i}{\rho_i}; \quad 2C_{ji}^2 = \frac{2\mu_i}{\rho_i}$$

$$\lambda_1 = \left[\frac{\lambda_1 + 2\mu_i}{\rho_i} - \frac{2\mu_i}{\rho_i} \right] \rho_1 = (C_{pi}^2 + 2C_{s1}^2) \rho_i$$

$$\lambda_2 = (C_{p2}^2 + 2C_{s2}^2) \rho_2 \quad \text{или} \quad \lambda_i = (C_{pi}^2 + 2C_{s1}^2) \rho_i$$

$$C_{ji}^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i} \quad K_2^2 = \frac{C_{p2}^2}{C_{s2}^2} \quad (i=1,2)$$

Элементы матрицы [C] имеют следующий вид:

$$C_{13} = -\frac{1}{b} [nH_n^1(h_1 b) - h_1 b H_{n+1}^1(h_1 b)];$$

$$C_{14} = -\frac{1}{b} [nH_n^{(2)}(h_2 b) - h_2 b H_{n+1}^{(2)}(h_2 b)];$$

$$C_{15} = \frac{n}{b} H_n^{(1)}(t_2 b);$$

$$C_{16} = \frac{n}{b} H_n^{(2)}(t_2 b);$$

$$C_{21} = \frac{n}{b} H_n^{(1)}(h_2 b);$$

$$C_{22} = -\frac{n}{b} [nH_n^{(1)}(t_1 b) - t_1 b H_{n+1}^{(1)}(t_1 b)];$$

$$C_{23} = -\frac{n}{b} H_n^{(1)}(h_2 b);$$

$$C_{24} = -\frac{n}{b} H_n^{(2)}(h_2 b);$$

$$C_{25} = -\frac{1}{b} [nH_n^{(1)}(t_2 b) - t_2 b H_{n+1}^{(1)}(t_2 b)];$$

$$C_{26} = -\frac{1}{b} [nH_n^{(2)}(t_2 b) - t_2 b H_{n+1}^{(2)}(t_2 b)];$$

$$C_{31} = \gamma \left\{ \left[K_1^2 - 2 + \frac{2(n^2 + n + n_1^2 b^2)}{b^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times H_n^{(1)}(h_2 b) - \frac{2h_1}{b} H_{n-1}^{(1)}(h_1 b) \right\};$$

$$C_{33} = -\left\{ \left[K_1^2 - 2 + \frac{2(n^2 + n + n_1^2 b^2)}{b^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \div H_n^{(1)}(h_2 b) - \frac{2h_2}{b} H_{n-1}^{(1)}(h_2 b) \right\};$$

$$C_{34} = \gamma \left\{ \left[K_1^2 - 2 + \frac{2(n^2 + n + n_1^2 b^2)}{b^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times H_n^{(2)}(h_2 b) - \frac{2h_{21}}{b} H_{n-1}^{(2)}(h_2 b) \right\};$$

$$C_{32} = \gamma_1 * \frac{2n}{b^2} [(n-1)H_n^{(1)}(t_1 b) - t_1 b H_{n+1}^{(1)}(t_1 b)];$$

$$C_{35} = -\frac{2n}{b^2} [(n-1)H_n^{(1)}(t_2 b) - t_2 b H_{n+1}^{(1)}(t_2 b)];$$

$$C_{36} = -\frac{2n}{b^2} [(n-1)H_n^{(2)}(t_2 b) - t_2 b H_{n+1}^{(2)}(t_2 b)];$$

$$C_{41} = \gamma_1 * \frac{2n}{b^2} [(n-1)H_n^{(1)}(h_1 b) - h_1 b H_{n+1}^{(1)}(h_1 b)];$$

$$C_{43} = \frac{2n}{b^2} [(k-1)H_n^{(1)}(h_2 b) - h_2 b H_{n+1}^{(1)}(h_2 b)];$$

$$C_{44} = -\frac{2m}{b} [(l-1)H_n^{(2)}(h_2 b) - h_2 b H_{n+1}^{(2)}(h_2 b)];$$

$$C_{42} = -\left\{ \frac{e_1^2 b^2 - 2n^2}{b^2} H_n^{(1)}(e_1 b) + \frac{e_1}{b} [H_{n-1}^{(1)}(e_2 b) - \right.$$

$$\left. - H_{n+1}^{(1)}(e_2 b)] \right\}$$

$$C_{45} = -\left\{ \frac{e_2^2 b^2 - 2n^2}{b^2} H_n^{(1)}(e_2 b) + \frac{e_2}{b} [H_{n-1}^{(1)}(e_2 b) - \right.$$

$$\left. - H_{n+1}^{(2)}(e_2 b)] \right\}$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.156
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$C_{46} = - \left\{ \frac{e_2^2 b^2 - 2n^2}{b^2} H^{(2)}_n(e_2 b) + \frac{e_2}{b} [H^{(2)}_{n-1}(e_2 b) - H^{(2)}_{n+1}(e_2 b)] \right\}, \quad C_{51} = C_{52} = 0,$$

как C_{33} по $C_{53} = -C_{33}$ с аргументом, $C_{53}(h_2 b) = -C_{33}(h_2 b)$.

$$C_{53} = \left[K_2^2 - 2 + \frac{2(n^2 + n - h_2^2 \alpha^2)}{\alpha^2} \right] H^{(1)}_n(h_2 \alpha) - \frac{2h_2}{\alpha} H^{(2)}_{n-1}(h_2 \alpha);$$

$$C_{54} = \left[K_2^2 - 2 + \frac{2(n^2 + n - h_2^2 \alpha^2)}{\alpha^2} \right] H^{(2)}_n(h_2 \alpha) - \frac{2h_2}{\alpha} H^{(2)}_{n-1}(h_2 \alpha);$$

а в случае $C_{55}(t_2 \alpha) = C_{55}(t_2 b)$

$$C_{55} = \frac{2n}{\alpha^2} [(n-1)H^{(1)}_n(t_2 \alpha) - t_2 \alpha H^{(1)}_{n+1}(t_2 \alpha)];$$

$$C_{56} = \frac{2n}{\alpha^2} [(n-1)H^{(2)}_n(t_2 \alpha) - e_2 \alpha H^{(2)}_{n+1}(t_2 \alpha)];$$

$$C_{61} = C_{62} = 0$$

$$C_{62} = (h_2 \alpha) = -C_{43}(h_2 b)$$

$$C_{63} = \frac{2n}{\alpha^2} [(n-1)H^{(1)}_n(h_2 \alpha) - h_2 \alpha H^{(1)}_{n+1}(h_2 \alpha)];$$

$$C_{64} = \frac{2n}{\alpha^2} [(n-1)H^{(1)}_n(h_2 \alpha) - h_2 \alpha H^{(1)}_{n+1}(h_2 \alpha)];$$

$$C_{65}(t_2 \alpha) = -C_{45}(t_2 b);$$

$$C_{65} = \frac{t_2^2 \alpha^2 - 2n^2}{\alpha^2} H^{(1)}_n(t_2 \alpha) + \frac{t_1}{\alpha} [H^{(1)}_{n-1}(t_2 \alpha) - H^{(1)}_{n+1}(t_2 \alpha)];$$

$$C_{66} = \frac{t_2^2 \alpha^2 - 2n^2}{\alpha^2} H^{(2)}_n(t_2 b) + \frac{t_1}{\alpha} [H^{(1)}_{n-1}(t_2 \alpha) - H^{(1)}_{n+1}(t_2 \alpha)];$$

Таким образом, можно найти элементы матрицы [C] для любого порядка

$$\bar{E}_{mk} = m(m+1)H_m^{(1)}(\alpha_N R) - \alpha_N R_m H_{m-1}(\alpha_N R);$$

$$H_{mk} = -m(m+1)J_m(\beta_N R) - \beta_N R_m H_{m-1}(\beta_N R);$$

$$K_{mk} = -m(m+1)H_m(\beta_n R_n) - \beta_n R_m H_{m-1}(\beta_n R);$$

$$\bar{K}_{mk} = -m(m^2 + m - \frac{\beta_n^2 R_n^2}{2}) - J_n(\beta_{m/n} R_{n/n-1}) + \beta_{n/n-1} R_m H_{m-1}(\beta_n R_n);$$

$$\bar{K}_{mk} = -m(m^2 + m - \frac{\beta_n^2 R_n^2}{2}) - H_m(\beta_n R) + \beta_n R_m H_{m-1}(\beta_n R);$$

Наиболее очевидным критерием оценки детерминированного состояния является выбор “коэффициента концентрации” (напряжений, деформаций и т. д.). Основные цели данной работы:

а) исследование перераспределения напряжений, обусловленного наличием полости или включения;

б) изучение влияния места расположения источника возбуждения на его распределения.

В соответствии с такими задачами коэффициенты концентрации напряжений K_{1N} , K_{2N} , K_{3N} и K_{4N} определяются напряжением:

$$\left[\frac{\bar{\sigma}_n}{\sigma^{(p)}_{1n}}, \frac{\bar{\sigma}_{2n}}{\sigma^{(p)}_{2n}}, \frac{\bar{\sigma}_{1n}}{\sigma^{(p)}_{2n}}, \frac{\bar{\sigma}_{2n}}{\sigma^{(p)}_{2n}} \right] = (K_{1n}, K_{2n}, K_{3n}, K_{4n})$$

Здесь $(\bar{\sigma}_{1n}, \bar{\sigma}_{2n})$ и $(\sigma^{(K)}_{1n}, \sigma^{(K)}_{nN})$ - главные напряжения, определяемые соответственно потенциалами (φ, ψ) и $(\varphi^{(p)}, \psi^{(p)})$.

Главные напряжения связаны с компонентами плоского напряженного состояния следующими соотношениями [10].

$$\sigma_{1,2} = 0,5 \left\{ (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \pm [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2]^{1/2} \right\} \quad (12)$$

также можно определить коэффициент концентрации энергии деформации, определяемый выражением:

$$(\psi_N / t_n^{(p)})_{r=R_n} = S_n / S_n^{(p)} = K^{(n)}_s \quad (13)$$

где S и $S^{(H)}$ - функции плоскости энергии деформации для одной и той же точки, связанные

с потенциалами перемещений (φ_1, ψ) и $(\varphi^{(n)}, \psi^{(n)})$. Плотность энергии деформации выражается через главные напряжения:

$$E_N = [\sigma_{1n}^2 + \sigma_{2n}^2 - 2\nu_n \sigma_{1n} + \sigma_{2n}] / (2E_n), \quad (14)$$

где E_N и ν_n соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Решения (4) и (5) определяют комплексные напряжения. Следовательно, функции плоскости энергии деформации имеют вид:

$$(T + i \operatorname{Im} T) e^{2i\alpha r} = [(Re T)^2 + (Im T)^2]^{1/2} e^{-i(2\alpha r - \alpha_i)}$$

$$(T^{(p)} (Re F^{(p)} + i \operatorname{Im} T^{(p)}) e^{2i\alpha r} = [(\operatorname{Re} T^{(p)})^2 + (\operatorname{Im} T^{(p)})^2]^{1/2} e^{-i(2\alpha r - \alpha)}$$

где

$$\alpha_{1n} = \arctg(\operatorname{Im} T / \operatorname{Re} T), \quad \alpha_2 = \arctg(\operatorname{Im}(T^{(p)}) / (\operatorname{Re} T^{(p)})).$$

Таким образом, величина

$$K_m = \left[\frac{(\operatorname{Re} \bar{S})^2 + (\operatorname{Im} \bar{S})^2}{(\operatorname{Re} \bar{S}^{(p)})^2 + (\operatorname{Im} \bar{S}^{(p)})^2} \right]^{1/2} e^{i(\alpha_{1n} - \alpha_{2m})} \quad (15)$$

не зависит от времени и является комплексной. В качестве меры концентрации можно выбрать величину [17]

$$S_c = / K_m / = \left[\frac{(\operatorname{Re} \bar{S})^2 (\operatorname{Im} \bar{S})^2}{(\operatorname{Re} \bar{S}^{(p)})^2 + (\operatorname{Im} \bar{S}^{(p)})^2} \right]^{1/2}. \quad (16)$$

Заметим, что

$$S_{cn} = S_c(\theta, \nu_n, \gamma_n, \alpha_n; Z, \alpha_n, R_n, \eta_n).$$

Числовые результаты и предельный случай волн с большой длиной. Для исследования концентрации напряжений на

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.156
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

свободной поверхности воспользуемся абсолютными значениями комплексной величины и соотношениями (15) и (16). Величина комплексной функции зависит от волнового числа α , угла θ расстояния \bar{r} , коэффициента Пуассона, соотношения модулей Юнга $E^* = E_1/E_2$, соотношения плотностей $\rho^* = \rho_1/\rho_2$, геометрических параметров R_1 и R_2 . Если все характеристики (рис.1) механической системы одинаковы ($E_1=E_2=\dots E_n$; $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \dots = \nu_n$), тогда рассматривается задача взаимодействия цилиндрических волн с цилиндрическими полостями. Основные соотношения приведены в (1). В частном случае полученные решения для полости совпадают с решениями [12]. Результаты расчетов концентрации напряжения приведены на рис. 2. Из анализов численных результатов рис. 3. видно, что α , R , и n концентрации напряжений ободной поверхности совпадают. В частном случае рассмотрим взаимодействие волн с жестким включением тогда на границе $r = R_1$ ставятся следующие условия:

$$u_r = U \cos \theta \quad u_\theta = U \sin \theta, \quad (17)$$

$$(\pi R_1^2 \rho \ddot{U}_{\text{вкл}}) = \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) \Big|_{r=R_1} R_1 d\theta, \quad (18)$$

где $\rho_{\text{вкл}}$ - плотность включения.

Определены перенос и поворот включения как жесткого целого с помощью выражений:

$$U = -\frac{\eta}{\alpha} e^{-i\alpha z} [F_1 \cos y H_2(\alpha_1 Z) J_1(\alpha_1 R_1) - C_1 H_1(\beta_1 R_1) + F_2 \cos y H_0(\alpha_1 Z) J_{-1}(\alpha_1 R_1) + F_2 \cos y H_0(\beta_1 Z) J_{-1}(\beta_1 R_1) - \beta_{N-1} H_{-1}(\alpha_1 R_1) + C_{-1} H_{-1}(\alpha_1 R_1)];$$

$$V = -\frac{\eta}{R_N} e^{-i\alpha z} [-F_1 \sin y H_2(\alpha_1 Z) J_1(\alpha_1 R_1) + F_2 \sin y H_2(\beta_1 Z) J_1(\beta_1 R_1) - A_1 H_1(\alpha_1 R_1) + D_1 H_{-1}(\beta_1 R_1) + F_1 \sin y H_0(\alpha_1 Z) J_{-1}(\alpha_1 R_1) + F_2 \sin y H_0(\beta_1 Z) J_{-1}(\beta_1 R_1) + A_{-1} H_{-1}(\alpha_1 R_1) + D_{-1} H_{-1}(\alpha_1 R_1)];$$

$$\theta = -\frac{4\eta}{\alpha^2} e^{-i\alpha z} [F_2 \sin y H_1(\alpha_1 Z) \{J_0(\beta_1 R_1) + \frac{2}{\beta_N R_N} J_{-1}(\beta_1 R_1)\} + D \{H_0(\beta_1 R_1) + \frac{2}{\beta_N R_N} H_{-1}(\beta_1 R_1)\}];$$

где U, V – перемещения в направлениях соответственных и y, θ -угол поворота, $\eta = \rho_{cp}/\rho_{вкл}$.

Решения уравнения (17) выражаются через функции Бесселя и Ханкеля 1-го и 2-го рода n -го порядка.

Особый интерес представляет случай неподвижного включения, т.е. $\eta=0$. Для такого включения условия на $r = R_N$ имеют вид:

$$U = V = \theta = 0, \quad u_r = u_\theta = 0.$$

Можно проверить, что от движения включения удерживается силами X и Y в направлениях соответственно x и y и моментом M в плоскости x - y , которые определяются формулами

$$\bar{X} = P \beta^2 R_n^2 \cos \gamma (g+h) e^{-i\omega t}$$

$$\bar{Y} = P \beta^2 R_n^2 \sin \gamma (-g+h) e^{-i\omega t}$$

$$\frac{M}{R_N} = -P \beta^2 R_1^2 \sin \gamma H_1(\beta_1 Z) \frac{\alpha_1 R_1 H_{-1}(\alpha_1 R_1) e^{-i\omega t}}{V_0}$$

где $\alpha = P/R_{n1}$ $\alpha_1 = (1-\nu_1^2)/(2\alpha_1 R_1)$,

$$\alpha_2 = (1+\nu_1^2)/\beta_1 R_1.$$

$$g = \frac{1-\nu_1}{4\alpha a} H_2(\alpha z) \left[\frac{\beta a H_1^1(\beta a) - H_{-1}(\beta a)}{\bar{V}_1} + \frac{1}{2\beta a} H_1(\alpha z) \left[\frac{H_1(\alpha a) - \alpha a H_1(\alpha a)}{\bar{V}_1} \right] \right],$$

$$h = \frac{1-\nu_1}{4\alpha a} H_{02}(\alpha z) \left[\frac{\beta a H_{-1}^1(\beta a) - H_{-1}(\beta a)}{\bar{V}_{-1}} + \frac{1}{2\beta a} H_0(\beta z) \left[\frac{\alpha a H_{-1}^1(\alpha a) - H_{-1}(\alpha a)}{\bar{V}_{-1}} \right] \right],$$

Приведены некоторые графики природы перераспределения напряжений около поверхности разрыва. На рис.2 даны графики коэффициента S_c как функции $\alpha_1 R_1$ для различных значений η и γ .

Impact Factor:

| | | |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 3.117 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 0.829 | ПИИЦ (Russia) = 0.156 | PIF (India) = 1.940 |
| GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 8.716 | IBI (India) = 4.260 |
| JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 5.667 | OAJI (USA) = 0.350 |

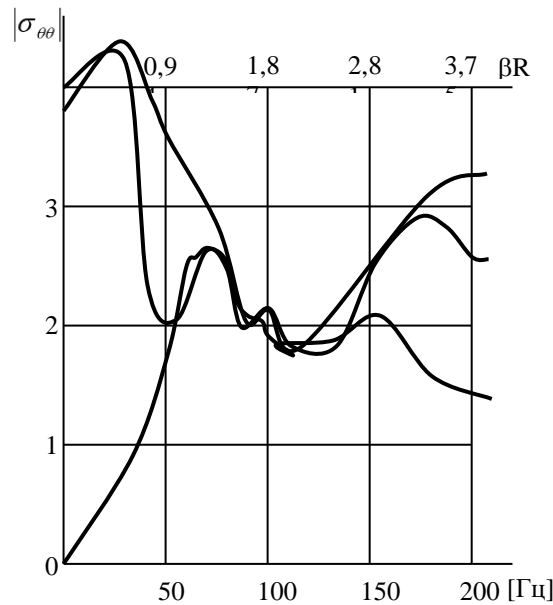


Рис.2. Влияние частоты колебаний волны на величину напряжений в характерных точках поверхности $\theta = 0, 45, 90, 135$

Видно, что радиальные напряжения при высоких волновых значениях почти в три раза больше, чем $\sigma_{\theta\theta}$.

Эти графики показывают, что при заданных η и θ имеется значение $\alpha_1 R_1 = \xi$, которое

максимизирует величину S_c . Исследовано распространение волн от источника \bar{O} (рис.1) в цилиндрических координатах \bar{r} и $\bar{\theta}$. Изучена зависимость $|\sigma_{\bar{r}\bar{r}} / \sigma_{\bar{\theta}\bar{\theta}}|$ от $\alpha \bar{r}$ при $\nu = 0,25$ (без цилиндрического тела).

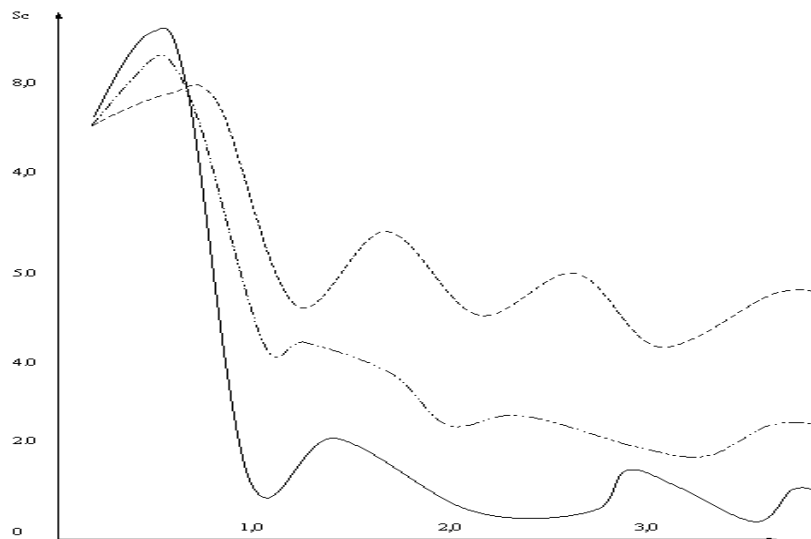


Рис. 3. Зависимость коэффициента концентрации энергии от волнового числа ($\nu=0.25$).

Используя подходящие разложения для функции Ханкеля, можно показать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} y = \frac{P \sin \gamma}{\frac{\alpha_N^2}{\beta_N^2} + 1} \left\{ \frac{1 - \nu_N}{2} [H_2(\alpha_N z) + H_0(\alpha_N z)] - [H_2(\beta_N z) - H_0(\beta_N z)] \right\}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{x} = \frac{P \cos \gamma}{\frac{\alpha_N^2}{\beta_N^2} + 1} \left\{ \frac{1 - \nu_N}{2} [H_2(\alpha_1 z) - H_0(\alpha_1 z)] - [H_2(\beta_1 z) + H_0(\beta_1 z)] \right\}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{M} = 0$$

На следующем примере рассмотрим взаимодействие цилиндрических волн с

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.156
 ESJI (KZ) = 8.716
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

цилиндрическим слоем (граничные условия на контакте слоя $r = R_2$) и свободной поверхности ($r = R_1$).

Из общих решений получим решения для $n=1,2$. Численные результаты приведены на рис. 3. Из рисунка 3 видно, что концентрация напряжения существенно зависит от места расположения источника гармонических волн.

Из этого $\alpha_1 P_1 = 2$ значения результаты статического и динамического напряженного состояния отличаются коренным образом при близких $r_0/D=2$ расстояниях источника. Теперь рассмотрим некоторые предельные случаи. Здесь приведены результаты для отверстия. Если в уравнении (1) r_0 стремится к бесконечности, то можно воспользоваться асимптотическими разложениями функции Ханкеля для больших значений аргумента

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \sigma_{\theta\theta} \Big|_{r=R_1} \approx 4 \left[1 - \frac{1}{k^2} \right] \sum_{m=0}^{\infty} C^{m+1} \epsilon_{n1} S_m \cos e^{-i\alpha}$$

где α - конечное.

Это выражение полностью совпадает с выражениями, полученными [6] для плоской падающей волны. Определяя асимптотическое статическое решение, получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta} \Big|_{r=R_1} \approx 4 \left[1 + \left(\frac{R_1}{r_0} \right)^2 + \frac{4}{r_0} \cos \theta \right] \times \sum_{m=2}^{\infty} \left(-\frac{R_1}{r_0} \right)^{m-2} (m-1) \cos m\theta,$$

где r_0 - конечное. Это решение точно совпадает с решением статической задачи.

Отличие полученных в настоящей работе результатов от результатов обычной задачи о дифракции волны оправдывает их учет во многих практических задачах.

Таблица 1.

| R_1/r_0 | 3 | 4 | 5 | 50 | 60 | 80 |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Θ , град | 60° | 70° | 90° | 90° | 90° | 90° |
| $ \sigma_{\theta\theta}^* $ | 1,541 | 1,536 | 1,525 | 1,414 | 1,416 | 1,416 |

В таблице 1. приведены концентрации напряжений в зависимости от R_1/r_0 при различных значениях θ . Видно, что максимальное напряжение $|\sigma_{\theta\theta}^*|$ в цилиндрическом теле возникает при $\theta = 30^\circ$

$$(\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta} / \sigma_{\bar{r}\bar{r}}).$$

При $R_1/r_0 > 50$ воздействие цилиндрического источника раскладывается как плоская волна, т.е. можно не учитывать радиус кривизны волны.

Выводы.

1. Задача дифракции гармонических волн в цилиндрическом теле решается в потенциалах перемещений. Потенциалы перемещений определяются из решений уравнения Гельмгольца. Произвольные постоянные определяются из граничных условий, которые ставятся между телами.

В результате поставленная задача сводится к системе неоднородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, которые решаются методом Гаусса с выделением главного элемента.

2. Контурные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на свободной поверхности цилиндрических тел достигают своего максимального значения в

$$Q = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при воздействии поперечных волн} \\ \frac{\pi}{4} & \text{при воздействии продольных волн} \end{cases}$$

Контурные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ при воздействии поперечных гармонических волн на 15-20% больше, чем при воздействии продольных волн.

3. Когда источник гармонических волн

находится на расстоянии пяти радиусов ($r > 5R$) от цилиндрического тела, высокочастотный характер изменения контурных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, воздействующих на внутреннюю свободную поверхность, хорошо аппроксимировать решением для плоской ($r > \infty$) волны. Далее все значения приближаются к одной и той же асимптоте.

Impact Factor:

| | | |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 3.117 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 0.829 | PIHHI (Russia) = 0.156 | PIF (India) = 1.940 |
| GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 8.716 | IBI (India) = 4.260 |
| JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 5.667 | OAJI (USA) = 0.350 |

References:

1. Guz, A. N., Kubenko, V. D., & Cherevko, M. A. (1978). *Difraktsiya uprugix voln.* (p.307). Kiyev: Naukova dumka.
2. Safarov, I. I., & Umarov, A. O. (2014). Vozdeystviye prodolnix i poperechnix voln na silindricheskiye sloi s jidkostyu. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mexanika. Informatika, Vip.3(26)*, pp. 69-75.
3. Safarov, I. I., Axmedov, M. S., & Umarov, A. O. (2014). Dinamicheskiye napryajeniya i smesheniya vblizi silindricheskoy podkreplenny polosti ot ploskoy garmonicheskoy volni. *Yejemesyachniy nauchniy jurnal «Prospero» (Novosibirsk), №3*, pp. 57-61.
4. Safarov, I. I., Teshayev, M. K., Boltayev, Z. I., & Nuriddinov, B. Z. (2017). Of Own and Forced Vibrations of Dissipative Inhomogeneous Mechanical Systems. *Applied Mathematics, 8*, pp.1001-1015.
5. Safarov, I. I., Teshayev, M. K., Boltayev, Z. I., & Akhmedov, M. S. (2017). Damping Properties of Vibrations of Three-Layer Viscoelastic Plate. *International Journal of Theoretical and Applied Mathematics, 3(6)*: 191-198.
6. Safarov, I. I., & Boltayev, Z. I. (2017). Propagation of Natural Waves in Extended Cylindrical Viscoelastic Panels. *International Journal of Emerging Engineering Research and Technology Volume 5, Issue 10*, pp.37-40.
7. Safarov, I. I., Akhmedov, M., & Umarov, A. (2017). *Own vibrations of toroidal shell with flowing liquid.* (p.177). Lambert Academic Publishing (Germany).
8. Safarov, I. I., Akhmedov, M. S., & Buronov, S. (2017). *Method of finite elements in the calculations of pipelines.* (p.225). Lambert Academic Publishing (Germany).
9. Safarov, I. I., Teshayev, M. K., & Boltayev, Z. I. (2017). *Distribution of harmonic waves in expansion plastic and cylindrical viscoelastic bodies.* (p.218). Open Science Publishing Raleigh, North Carolina, USA.
10. Safarov, I. I., Boltayev, Z. I., Axmedov, M. S., & Rajabov, O. (2017). Numerical solution of the problem on the impact plane non-stationary elastic waves by a cylindrical body. *Discover 2017,53, (256)*. April, pp.255-265.
11. Safarov, I. I., Marasulov, A., Akhmedov, M. S., & Shodiyev, Z. O. (2017). Voltage Deformable State Parallel Arrangement of Cylindrical Pipe with a Liquid under Harmonic Loads. *Case Studies Journal ISSN (2305-509X)-Volume 6, Issue-1-Jan-2017*, pp. 36-47.
12. Safarov, I. I., Akhmedov, M. S., & Rajabov, O. (2017). About the Natural Oscillations Viscoelastic Toroidal Shell with the Flowing Fluid. *World Wide Journal of Multidisciplinary Research and Development (WWJMRD), 3(7)*.
13. Rashidov, T. R. (1973). *Dinamicheskaya teoriya seymostoykosti slojnix sistem podzemnix soorujeniy.* (p.182). Tashkent: Fan.
14. Mau, M. (1963). Dinamicheskiye napryajeniya i smesheniye v blizi silindricheskoy poverxnosti razriva ot ploskoy garmonicheskoy volni sdviga. *Prikladnaya mexanika, perevod s angliyskogo, t.30, ser Ye, № 3*, pp.117-126.