Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500
SIS (USA) = 0.912
РИНЦ (Russia) = 0.156
ESJI (KZ) = 8.716
SJIF (Morocco) = 5.667
ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

QR – Issue QR – Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2019 Issue: 02 Volume: 70

Published: 12.02.2019 http://T-Science.org

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Gennady Evgenievich Markelov
Candidate of Engineering Sciences, associate professor,
corresponding member of International
Academy of Theoretical and Applied Sciences,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

A WORKING MATHEMATICAL MODEL OF A TECHNICAL SYSTEM

Abstract*: A working mathematical model of a technical system was obtained. The technical system involves parallel connection of resistors that have temperature-dependent resistance and total heat capacity. The created model is sufficiently full, accurate, adequate, productive, and economical. Such a model, when applied, requires less time and costs spent on research and enables efficient use of mathematical modeling tools.*

Key words*: working mathematical model, properties of mathematical models, principles of mathematical modeling.*

Language*: Russian*

Citation: Markelov, G. E. (2019). A working mathematical model of a technical system. *ISJ Theoretical & Applied Science, 02 (70),* 1-4.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-02-70-1 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.02.70.1

РАБОЧАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация*: Получена рабочая математическая модель технической системы. Техническая система включает параллельное соединение резисторов, сопротивление и полная теплоемкость которых зависят от температуры. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности. Применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.*

Ключевые слова*: рабочая математическая модель, свойства математических моделей, принципы математического моделирования.*

1. Введение

В работах [1; 2] изложен единый подход к построению рабочей математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Некоторые свойства математических моделей сформулированы в работах [3; 4]. В работе [5] приведен пример построения математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к исследованию, некоторые результаты которого опубликованы в работах [6–8]. Особенности внедрения единого подхода к построению математических моделей рассмотрены в работах [9; 10].

В работе [11] получена рабочая математическая модель одного из элементов технической системы. Целью настоящей работы является разработка в рамках единого подхода рабочей математической модели технической системы. Техническая система состоит из таких элементов и включает параллельное соединение резисторов, сопротивление и полная теплоемкость которых зависят от температуры.

2. Постановка задачи

Рассмотрим представленное на рис. 1 параллельное соединение n резисторов, сопротивление и полная теплоемкость которых зависят от температуры. Считаем i-й резистор высокотеплопроводным телом, температура T_i которого в начальный момент времени t_0 равна T_i^0, $i = 1, 2, \ldots, n$. На поверхности резистора площадью S_i происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_i^0, коэффициент теплоотдачи известен и равен α_i.

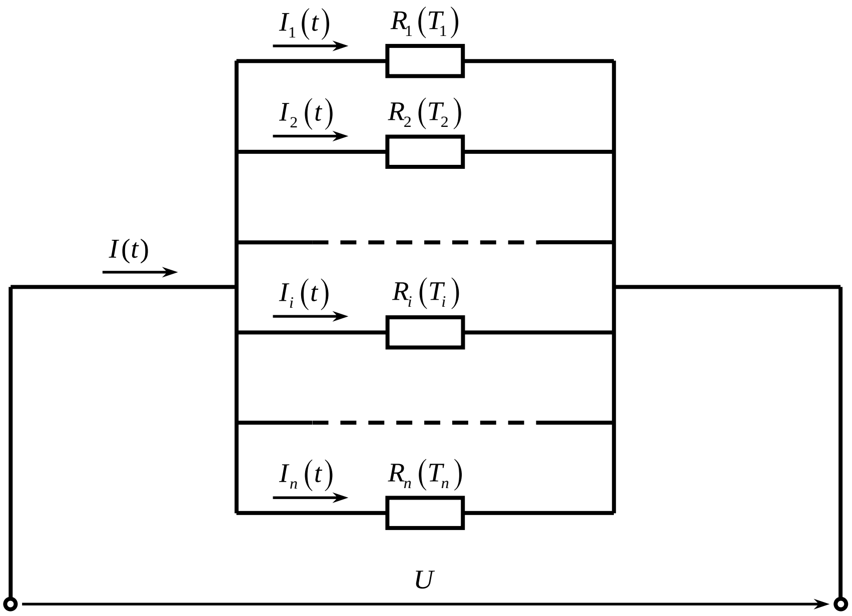

Рисунок 1 – Параллельное соединение элементов технической системы.

Пусть

$$R_i(T_i) = R_i^0\left[1+\beta_i\left(T_i - T_i^0\right)\right],$$

$$C_i(T_i) = C_i^0\left[1+\gamma_i\left(T_i - T_i^0\right)\right],$$

где $R_i(T_i)$ и $C_i(T_i)$ — сопротивление и полная теплоемкость i-го резистора; R_i^0 и C_i^0 — сопротивление и полная теплоемкость i-го резистора при $T_i = T_i^0$; β и γ — температурные коэффициенты, причем $\beta > 0$ и $\gamma > 0$. Через i-й резистор протекает электрический ток, сила которого равна

$$I_i = \frac{I_i^0}{1+\beta_i\left(T_i - T_i^0\right)}, \qquad (1)$$

где $I_i^0 = U/R_i^0$; U — постоянная разность электрических потенциалов на полюсах i-го элемента.

Пусть в рамках проводимого исследования представляет интерес величина

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (2)$$

Построим рабочую математическую модель объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

3. Решение задачи

Для решения поставленной задачи используем полученные в работе [11] результаты. Эти результаты позволяют легко построить иерархию математических моделей данного объекта исследования и определить условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину U.

Если разности $T_i - T_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, достаточно малы, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} I_i^0. \qquad (3)$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае согласно выкладкам, приведенным в работе [11], установившееся значение величины I_i найдем по формуле

$$I_i^* = \frac{2I_i^0}{1+\sqrt{1+4\beta_i U I_i^0/(\alpha_i S_i)}},$$

тогда установившееся значение искомой величины равно

$$I_* = \sum_{i=1}^{n} I_i^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{2I_i^0}{1+\sqrt{1+4\beta_i U I_i^0/(\alpha_i S_i)}}. \qquad (4)$$

Для относительной погрешности величины I_0 запишем

$$\delta(I_0)=\left|\frac{I-I_0}{I}\right|=\frac{I_0}{I}-1\le\frac{I_0}{I_*}-1.$$

Следовательно, при выполнении неравенства

$$\frac{I_0}{I_*}-1\le\delta_0 \qquad (5)$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины.

При выполнении неравенства (5) математическая модель (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Затем определим условия, при которых применима математическая модель (4). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. Тогда согласно результатам, полученным в работе [11], приходим к задаче Коши

$$\frac{dI_i}{dt}=\frac{\beta_i I_i^2}{C_i^0 I_i^0}\,\frac{\alpha_i S_i I_i^0-\alpha_i S_i I_i-\beta_i U I_i^2}{\gamma_i I_i^0-\gamma_i I_i+\beta_i I_i}, \qquad (6)$$

$$I_i(t_0)=I_i^0,$$

где $i=1,2,\ldots,n$, и найдем момент времени

$$t_i=t_0+\frac{C_i^0}{\alpha_i S_i}\left[\frac{\gamma_i}{\beta_i}\left(\frac{I_i^*}{I_i^0}-1+\delta_0\right)\frac{I_i^0}{I_i^*}+\left(\frac{I_i^0}{2I_i^0-I_i^*}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{I_i^0-I_i^*}{2I_i^0-I_i^*}\frac{I_i^0}{I_i^*}-1\right)\ln\left(2-\frac{I_i^*}{I_i^0}-\delta_0\right)-$$
$$\left.-\left(\frac{I_i^0}{2I_i^0-I_i^*}+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{I_i^0-I_i^*}{2I_i^0-I_i^*}\frac{I_i^0}{I_i^*}\right)\ln\left(\frac{I_i^0}{I_i^0-I_i^*}\delta_0\right)\right],$$

для которого $I_i(t_i)=I_i^*/(1-\delta_0)$. При $t\ge t_i$

$$\delta(I_i^*)=\left|\frac{I_i-I_i^*}{I_i}\right|=1-\frac{I_i^*}{I_i}\le\delta_0,$$

а значение I_i^* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_i(t)$. Пусть $t_*=\max\limits_{1\le i\le n}t_i$, тогда легко показать, что при $t\ge t_*$

$$\delta(I_*)=\left|\frac{I-I_*}{I}\right|=\sum_{i=1}^{n}\left(I_i-I_i^*\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}I_i\le\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (4) для нахождения искомой величины, причем

$$\delta_0<\frac{I_0}{I_*}-1,$$

так как в противном случае следует применять формулу (3).

Если не выполнено условие (5), то математическая модель (4) при $t\ge t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Разработка новой математической модели при формировании иерархии математических моделей объекта исследования может привести к уточнению найденных ранее условий применимости построенных математических моделей. Действительно, используя математическую модель (2), (6), можно уточнить условие применимости формулы (3). Для этого найдем момент времени

$$t_i=t_0+\frac{C_i^0}{\alpha_i S_i}\left[\left(\frac{I_i^0}{2I_i^0-I_i^*}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{I_i^0-I_i^*}{2I_i^0-I_i^*}\frac{I_i^0}{I_i^*}-1\right)\ln\left(1+\frac{I_i^*}{I_i^0}\delta_0\right)-\frac{\gamma_i}{\beta_i}\delta_0-$$
$$\left.-\left(\frac{I_i^0}{2I_i^0-I_i^*}+\frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{I_i^0-I_i^*}{2I_i^0-I_i^*}\frac{I_i^0}{I_i^*}\right)\ln\left(1-\frac{I_i^*}{I_i^0-I_i^*}\delta_0\right)\right],$$

для которого $I_i(t_i)=I_i^0/(1+\delta_0)$. При $t\le t_i$

$$\delta(I_i^0)=\left|\frac{I_i-I_i^0}{I_i}\right|=\frac{I_i^0}{I_i}-1\le\delta_0,$$

а значение I_i^0 можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I_i(t)$. Пусть $t^*=\min\limits_{1\le i\le n}t_i$, тогда легко показать, что при $t\le t^*$

$$\delta(I_0)=\left|\frac{I-I_0}{I}\right|=\sum_{i=1}^{n}\left(I_i^0-I_i\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}I_i\le\delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины.

Если выполнено условие (5) или $t\le t^*$, то математическая модель (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

4. Результаты

Построение иерархии математических моделей объекта исследования с учетом, полученных в работе [11] результатов, позволяет выявить рабочую математическую модель, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Действительно, если выполняется неравенство (5) или в рамках проводимого исследования $t\le t^*$, то математическую модель (3) считаем рабочей. Если не выполнено условие (5), а временной интервал от t_0 до t_* можно в рамках проводимого исследования не рассматривать, то выбираем математическую модель (4) как рабочую, иначе — математическую модель (2), (6).

5. Заключение

Таким образом, в рамках единого подхода сформулированы утверждения, которые позволяют установить рабочую математическую модель технической системы. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности применительно к данному исследованию.

Очевидно, что применение такой математической модели не только сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, но и позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

References:

1. Markelov, G. E. (2015). On Approach to Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (24),* 287–290.
   Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)52 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.52
2. Markelov, G. E. (2015). Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science, 08 (28),* 44–46.
   Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-28-6 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.08.28.6
3. Myshkis, A. D. (2011). *Elements of the Theory of Mathematical Models* [in Russian]. Moscow: URSS.
4. Zarubin, V. S. (2010). *Mathematical Modeling in Engineering* [in Russian]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana.
5. Markelov, G. E. (2012). Peculiarities of Construction of Mathematical Models. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii, No. 4,* http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/150.html
6. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of the jet-forming layer of shaped-charge liners on the ultimate elongation of jet elements. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 2,* 231–234.
7. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of shaped charge liners on shaped charge penetration. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 5,* 788–791.
8. Markelov, G. E. (2000). *Influence of heating temperature on the ultimate elongation of shaped-charge jet elements*. Proc. of the 5th Int. Conf. “Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics”. (p. 170). Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics.
9. Markelov, G. E. (2015). Particular Aspects of Teaching the Fundamentals of Mathematical Modeling. *ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (25),* 69–72.
   Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*05(25)14 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.05.25.14
10. Markelov, G. E. (2016). Teaching the Basics of Mathematical Modeling. Part 2. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (33),* 72–74.
    Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-33-15 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.01.33.15
11. Markelov, G. E. (2019). A Working Mathematical Model of a Technical System Element. *ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (69),* 52–55.
    Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-69-11 Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.01.69.11