SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2018 **Issue:** 05 **Volume:** 61

Published: 30.05.2018 http://T-Science.org

Galiya Amirgalievna Abdikalikova
Associate Professor,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
K.Zhubanov Aktobe Regional State University

Amire Khaliuly Zhumagaziev
Teacher,
Master of Natural Sciences,
K.Zhubanov Aktobe Regional State University

SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

MULTIPERIODIC SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF EQUATION WITH IDENTICAL MAIN PART

Abstract: *There is investigated periodical boundary value problem with an integral condition for the system of partial differential equation by Courant. Obtain the sufficient conditions of existence and uniqueness of the multiperiodical solution considered the problem.*

Key words: *multiperiodicity, Courant, boundary value problem, unique, matricant, integral condition.*

Language: *Russian*

Citation: Abdikalikova GA, Zhumagaziev AK (2018) MULTIPERIODIC SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF EQUATION WITH IDENTICAL MAIN PART. ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (61): 372-375.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-61-62 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.05.61.62

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЯ С ОДИНАКОВОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Аннотация: *Исследуется периодическая краевая задача с интегральным условием для системы уравнений в частных производных по Куранту. Получены достаточные условия существования и единственности многопериодического решения рассматриваемой задачи.*

Ключевые слова: *многопериодичность, Курант, краевая задача, однозначность, матрицант, интегральное условие.*

Введение

В теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных значительный интерес представляют задачи с нелокальными ограничениями [1], в которых условия связывают как характеристические, так и нехарактеристические точки рассматриваемой области. Одной из основных задач теории уравнений гиперболического типа является задача о разрешимости периодической краевой задачи. Заметим, что интегральные условия [2] возникают в тех случаях, когда границы области протекания физического процесса для непосредственного измерения недоступны, но могут быть известны средние значения некоторых физических величин, которые представимы в виде интегралов от искомого решения. Это связано не только с возрастанием их роли в приложениях к решению физико-технических задач, но и с особенностями, возникающими при их исследовании и представляющими теоретический интерес с точки зрения развития теории дифференциальных уравнений. Как известно, что для описания перемещения популяции используются уравнения, называемые в математической физике уравнением переноса. Среди таких уравнений значительное место занимает исследование односкоростного уравнения переноса. Отметим, что если в уравнении переноса одна из независимых переменных совпадает с временной переменной, то его называют эволюционным уравнением. Уравнение Мак Кендрика или возрастная модель старения Мак Кендрика является эволюционным уравнением.

В математической литературе немало работ, посвященных изучению почти периодических, многопериодических решений для некоторых классов уравнений в частных производных, в которых почти периодичность предполагается по временной переменной, отметим лишь [3]-[6], где приводятся подробный обзор и анализ по этим задачам. В монографии [7] исследован вопрос о существовании и единственности почти периодического решения по всем независимым переменным систем эволюционных уравнений. Статья [8] посвящена изучению существования единственного решения в широком смысле периодической задачи для гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка, приведенной к каноническому виду.

Многообразия возникающих вопросов, необходимых для выяснения свойств рассматриваемых задач, заставляет расширить круг применяемых методов исследования. Поэтому разработка новых эффективных методов исследования задач и развитие итерационных методов на уравнения в частных производных актуальны как для расширения класса разрешимых задач, так и для применения математического аппарата к задачам практики.

Постановка задачи. На $\overline{\Omega}=\{(t,x):0\le t\le T, at\le x\le at+q\}$, $T>0$, $q>0$ рассматривается периодическая краевая задача с интегральным условием для системы уравнений с одинаковой главной частью по Куранту

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=A(t,x)u+f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(0,x)\big|_{x\in[0,q]}-u(T,x)\big|_{x\in[T,T+q]}=0, \qquad (2)$$

$$\int_0^T K(s,x)u(s,x)ds=d(x). \qquad (3)$$

Здесь $u\in R^n$; $\Lambda_k=diag[a_k,a_k,...,a_k]$; симметрическая $A(t,x)$ и $K(t,x)$ $(n\times n)$-матрицы, n-вектор-функции $f(t,x)$ и $d(x)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$ и $[0,q]$, соответственно; многопериодичны по t, x с вектор-периодом (θ,ω) и ω-периодичны:

$$A(t+p_0\theta,x+p\omega)=A(t,x),$$
$$K(t+p_0\theta,x+p\omega)=K(t,x),$$
$$f(t+p_0\theta,x+p\omega)=f(t,x),$$
$$d(x+p\omega)=d(x),$$

где p_i - целые числа, $i=\overline{0,n}$; $p\omega=(p_1\omega_1,p_2\omega_2,...,p_n\omega_n)$ - n-вектор.

Введем пространство $C(\overline{\Omega},R^n)$ непрерывных по t и x функций $u:\overline{\Omega}\to R^n$ с нормой $\|u\|_0=\max\limits_{(t,x)\in\overline{\Omega}}\|u(t,x)\|$;

$$\|A\|=\max_{(t,x)\in\overline{\Omega}}\|A(t,x)\|=\max_{(t,x)\in\overline{\Omega}}\max_{i=1,n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t,x)|,$$

$$\|d\|_1=\max_{x\in[0,q]}\|d(x)\|.$$

Целью работы является установление достаточных условий однозначной разрешимости в широком смысле периодической краевой задачи с условиями (1)-(3) для системы уравнений в частных производных с одинаковой главной частью по Куранту.

Методы исследований

Непрерывная на $\overline{\Omega}$ функция $u(t,x)$ называется многопериодическим решением краевой задачи с интегральным условием для системы с одинаковой главной частью по Куранту (1) при условиях (2)-(3) в широком смысле по Фридрихсу [9; 10], если функция $u(t,x)$ многопериодична по t и x, непрерывно дифференцируема по переменной t вдоль характеристики, удовлетворяет семейству обыкновенных дифференциальных уравнений и условиям (2)-(3).

Нелокальная краевая задача с интегральным условием (1)-(3) называется однозначно разрешимой в широком смысле, если для любых $f(t,x)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ и $d(x)\in C([0,q],R^n)$ она имеет единственное многопериодическое по t и x решение $u(t,x)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ непрерывно дифференцируемое по переменной t вдоль характеристики.

Через $C(\overline{H},R^n)$ обозначим пространство непрерывных по τ и ξ функций $\tilde{u}:\overline{H}\to R^n$ с нормой $\|\tilde{u}\|_0=\max\limits_{\xi\in[0,q]}\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|\tilde{u}(\tau,\xi)\|$.

Используя идеи работы [10] задачу с интегральным условием (1)-(3) для системы дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью, сводим в области $\overline{H}=\{(\tau,\xi):0\le\tau\le T, 0\le\xi\le q\}$, $T>0$, $q>0$ к задаче семейства обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}=\tilde{A}(\tau,\xi)\tilde{u}(\tau,\xi)+\tilde{f}(\tau,\xi),\ \tau\in[0,T], \qquad (4)$$

$$\tilde{u}(0,\xi)-\tilde{u}(T,\xi)=0,\ \xi\in[0,q], \qquad (5)$$

$$\int_0^T\tilde{K}(\tau,\xi)\tilde{u}(\tau,\xi)d\tau=\tilde{d}(\xi), \qquad (6)$$

где

$\tilde{u}(\tau,\xi)=u(\tau,\xi+a\tau)$, $\tilde{A}(\tau,\xi)=A(\tau,\xi+a\tau)$, $\tilde{K}(\tau,\xi)=K(\tau,\xi+a\tau)$,

$\tilde f(\tau,\xi)=f(\tau,\xi+a\tau)$, $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ - n -вектор.

Будем считать, что выполнены условия (S), если:

1. Симметрическая $\tilde A(\tau,\xi)$ и $\tilde K(\tau,\xi)$ $(n\times n)$-матрицы, n-вектор-функция $\tilde f(\tau,\xi)$ непрерывны по τ и ξ на $\overline{H}$ и многопериодичны по τ, ξ с вектор-периодом (θ,ω): $\tilde A(\tau+p_0\theta,\xi+p\omega)=\tilde A(\tau,\xi)$, $\tilde K(\tau+p_0\theta,\xi+p\omega)=\tilde K(\tau,\xi)$, $\tilde f(\tau+p_0\theta,\xi+p\omega)=\tilde f(\tau,\xi)$;

2. n-вектор-функция $\tilde d(\xi)$ непрерывна на $[0,q]$ и ω-периодична:

$$\tilde d(\xi+p\omega)=d(\xi),$$

где p_i - целые числа; $i=\overline{0,n}$; $p\omega=(p_1\omega_1,p_2\omega_2,...,p_n\omega_n)$ - n-вектор.

Непрерывная функция $\tilde u(\tau,\xi)$ называется многопериодическим решением краевой задачи (4)-(6), если функция $\tilde u(\tau,\xi)\in C(\overline{H},R^n)$ многопериодична по τ, ξ и имеет непрерывную производную по переменной τ, а также удовлетворяет семейству обыкновенных дифференциальных уравнений (4), условиям (5)-(6) при всех $(\tau,\xi)\in\overline{H}$.

Краевая задача (4)-(6) называется однозначно разрешимой, если для любых $\tilde f(\tau,\xi)\in C(\overline{H},R^n)$, $\tilde d(\xi)\in C([0,q],R^n)$ она имеет единственное многопериодическое по τ и ξ решение $\tilde u(\tau,\xi)\in C(\overline{H},R^n)$.

Краевая задача (1)-(3) и задача (4)-(6) эквивалентны в следующем смысле: Если функция $u(t,x)$ непрерывна по t, x в $C(\overline{\Omega},R^n)$ и является (θ,ω)-периодическим решением краевой задачи (1)-(3), то для системы дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью функция $u(\tau,\xi+a\tau)=\tilde u(\tau,\xi)$ будет многопериодическим решением задачи (4)-(6) семейства обыкновенных дифференциальных уравнений, и наоборот, если непрерывная функция $\tilde u(\tau,\xi)$ из $C(\overline{H},R^n)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (4) и условиям (5)-(6), то с учетом замены $\tau=t$ и $\xi=x-at$ функция $\tilde u(t,x-at)=u(t,x)$ - многопериодическое решение задачи (1)-(3) на $\overline{\Omega}$.

Пусть $\tilde V(\tau,\xi)=(\tilde u^1(\tau,\xi),...,\tilde u^n(\tau,\xi))$ - фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{\partial\tilde u}{\partial\tau}=\tilde A(\tau,\xi)\tilde u,\ \tau\in[0,T],\ \tilde u\in R^n, \tag{7}$$

то матрица

$$\tilde K(\tau,s,\xi)=\tilde V(\tau,\xi)\cdot\tilde V^{-1}(s,\xi) \tag{8}$$

называется матрицей Коши.

Отметим, что матрица вида (8) при $\tau=s$ обращается в единичную $(n\times n)$-матрицу E и такую матрицу называют матрицантом. Таким образом, матрицант есть нормированная при $\tau=s$ фундаментальная матрица решений.

Краевая задача (7), (5)-(6) допускает нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\Delta(0,T)=\det[\tilde V(0,\xi)-\tilde V(T,\xi)]=0$.

Непосредственно можно показать, что $\tilde V(\tau,\xi)$ существует и единственно. Для этого строится решение $(\tilde u^1(\tau,\xi),...,\tilde u^m(\tau,\xi),\tilde u^{m+1}(\tau,\xi),...,\tilde u^n(\tau,\xi))$ системы (7), удовлетворяющее условию

$$\tilde V(0,\xi)-\tilde V(T,\xi)=E,$$

где $\tilde V(\tau,\xi)=(\tilde u^1(\tau,\xi),...,\tilde u^n(\tau,\xi))$, $\tilde u^i(\tau,\xi)=col(\tilde u_{1i},\tilde u_{2i},...,\tilde u_{ni})$, $i=\overline{1,n}$; E - $(n\times n)$ - матрица.

Известно [7], что общее решение системы (4) можно представить в виде

$$\tilde u(\tau,\xi)=\tilde V(\tau,\xi)C^*(\tau)+ + \int_0^\tau\tilde V(\tau,\xi)\tilde V^{-1}(s,\xi)\tilde f(s,\xi)ds, \tag{9}$$

где $C^*(\tau)$ - неизвестная вектор-функция.

Отметим, что при выполнении условии $\|\tilde V(T,\xi)\|<\sigma<1$ существует единственное решение уравнения (4), определяемое в виде

$$\tilde u^*(\tau,\xi)=\int_0^T G(\tau,s,\xi)\tilde f(s,\xi)ds, \tag{10}$$

где

$$G(\tau,s,\xi)=\begin{cases}\tilde V(\tau,\xi)K(T,s,\xi), & 0\le\tau\le s\le T,\\ \tilde V(\tau,\xi)K(T,s,\xi)+K(\tau,s,\xi), & 0\le s\le\tau\le T\end{cases}$$

Заключение

При исследовании и решении периодической краевой задачи с интегральным условием для системы уравнений в частных производных по Куранту применен метод характеристик, а также итерационный метод позволяющий наряду с однозначной разрешимостью устанавливать и корректную разрешимость задачи. Установлены достаточные условия существования и единственности многопериодического решения по всем независимым переменным. Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (S), *то краевая задача (4)-(6) для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений имеет единственное многопериодическое решение, представимое в виде (10).*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1)-(3) имеет единственное* (θ,ω)*-периодическое решение* $u^*(t,x)$ *в широком смысле.*

Из теоремы 1 вытекает, что задача (4)-(6) однозначно разрешима.

Так как задача (4)-(6) эквивалентна задаче (1)-(3), то получим, что задача (1)-(3) имеет единственное многопериодическое решение $u^*(t,x)$ в широком смысле по Фридрихсу.

Отметим, что если дополнительно предположить относительно входных данных и построенного многопериодического решения в широком смысле непрерывной дифференцируемости по переменным t и x, то функция $u(t,x)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, обладающая непрерывными частными производными $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$, удовлетворяющая уравнению (1) при всех $(t,x)\in\overline{\Omega}$ с условиями (2)-(3) является и классическим решением периодической краевой задачи (1)-(3).

References:

1. Nakhushev A.M. (2006) Zadachi so smescheniem dlya uravnenii v chastnyh proizvodnyh. Moscow, Nauka. -287p.
2. Golubeva N.D., Pulkina L.S. (1996) Ob odnoi nelokalnoi zadache s integralnymi usloviyami //Matematicheskie zametki, Vol.59, no. 3, pp.326-328.
3. Cesari L. (1974) A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems. //Riv. math. Univ. Parma. -3, no. 2. - pp.107-131.
4. Pucci P. (1979) Problemi ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche //Boll. Unione Mat. Ital. B. -16, no. 5.-Pp.87-99.
5. Bassanini P. (1981) Iterative methods for quasilinear hyperbolic systems in the first canonic form //Appl. Anal. -12, no. 2. -pp.105-117.
6. Veivoda O. (1981) et al. Partial differential equations: Time-periodic solutions //Alphen aan den Rijn. Sijthoff: Noordhoff, -358p.
7. Umbetzhanov D.U. (1990) Pochti periodicheskie resheniya evolyucionnyh uravnenii. Alma–Ata, Nauka. -187p.
8. Zhestkov S.V. (1984) O postroenii mnogoperiodicheskih reshenii polulineinyh giperbolicheskih sistem uravnenii v chastnyh proizvodnyh s pomoschyu harakteristik //Differencialnye uravneniya. -Vol.20, no. 9. –pp.1630-1632.
9. Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. (1968) Sistemy kvazilineinyh uravnenii i ih prilozheniya k gazovoi dinamike. –Moscow, Nauka. – 592p.
10. Abdikalikova G.A. (2005) O razreshimosti odnoi nelokalnoi kraevoi zadachi //Matematicheskii zhurnal IM MON RK. –Vol.5, no. 3(17). –pp.5-10.