SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2017 **Issue:** 02 **Volume:** 46

Published: 18.02.2017 http://T-Science.org

Gennady Evgenievich Markelov
Candidate of Engineering Sciences,
associate professor,
corresponding member of International
Academy of Theoretical and Applied Sciences,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

WORKING MATHEMATICAL MODEL OF ELECTRO-THERMAL SYSTEM

Abstract: *A mathematical model of an electro-thermal system was obtained within the scope of a unified approach to working mathematical model building. The electro-thermal system consists of resistors whose resistance and total heat capacity depend on temperature. The constructed mathematical model has the properties of fullness, accuracy, adequacy, productivity, and economy to a sufficient degree for the purposes of this study. The use of such a model lowers costs and time spent on studies, and allows expedient use of mathematical modeling capabilities.*

Key words: *working mathematical model, properties of mathematical models, principles of mathematical modeling.*

Language: *Russian*

Citation: Markelov GE (2017) WORKING MATHEMATICAL MODEL OF ELECTRO-THERMAL SYSTEM. ISJ Theoretical & Applied Science, 02 (46): 52-54.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-02-46-11 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2017.02.46.11

РАБОЧАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация: *В рамках единого подхода к построению рабочей математической модели получена математическая модель электротепловой системы. Электротепловая система состоит из резисторов, сопротивление и полная теплоемкость которых зависят от температуры. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности применительно к данному исследованию. Применение такой модели сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.*

Ключевые слова: *рабочая математическая модель, свойства математических моделей, принципы математического моделирования.*

1. Введение

В работах [1; 2] изложен единый подход к построению рабочей математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Некоторые свойства математических моделей сформулированы в работах [3; 4]. В работе [5] приведен пример построения математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к исследованию, некоторые результаты которого опубликованы в работах [6–8]. Особенности внедрения единого подхода к построению математических моделей рассмотрены в работах [9; 10].

Целью настоящей работы является разработка в рамках единого подхода рабочей математической модели электротепловой системы. Электротепловая система состоит из резисторов, сопротивление и полная теплоемкость которых зависят от температуры.

2. Постановка задачи

Рассмотрим последовательное соединение n резисторов, сопротивление и полная теплоемкость которых зависят от температуры. Считаем i-й резистор высокотеплопроводным телом, температура T_i которого в начальный момент времени t_0 равна T_i^0. На поверхности резистора площадью S_i происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_i^0, коэффициент теплоотдачи известен и равен α_i. Пусть

$$R_i(T_i) = \frac{R_i^0}{1+\beta_i\left(T_i - T_i^0\right)},$$

$$C_i(T_i) = C_i^0\left[1+\gamma_i\left(T_i - T_i^0\right)\right],$$

где $R_i(T_i)$ и $C_i(T_i)$ — сопротивление и полная теплоемкость i-го резистора; R_i^0 и C_i^0 — сопротивление и полная теплоемкость i-го резистора при $T_i = T_i^0$; β и γ — температурные коэффициенты, причем $\beta > 0$ и $\gamma > 0$. Разность электрических потенциалов на полюсах i-го элемента равна

$$U_i = \frac{U_i^0}{1+\beta_i\left(T_i - T_i^0\right)}, \tag{1}$$

где $U_i^0 = R_i^0 I$; I — сила постоянного электрического тока, протекающего через резисторы.

Пусть в рамках проводимого исследования представляет интерес разность электрических потенциалов

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i. \tag{2}$$

Построим рабочую математическую модель объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

3. Решение

Для решения поставленной задачи используем полученные в работе [11] результаты. Эти результаты позволяют легко построить иерархию математических моделей данного объекта исследования и определить условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину U.

Если разности $T_i - T_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, достаточно малы, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$U_0 = \sum_{i=1}^{n} U_i^0 = \sum_{i=1}^{n} R_i^0 I. \tag{3}$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае согласно выкладкам, приведенным в работе [11], установившееся значение величины U_i найдем по формуле

$$U_i^* = \frac{2U_i^0}{1+\sqrt{1+4\beta_i I U_i^0 / (\alpha_i S_i)}},$$

тогда установившееся значение искомой величины равно

$$U_* = \sum_{i=1}^{n} U_i^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{2U_i^0}{1+\sqrt{1+4\beta_i I U_i^0 / (\alpha_i S_i)}}. \tag{4}$$

Для относительной погрешности величины U_0 запишем

$$\delta(U_0) = \left|\frac{U - U_0}{U}\right| = \frac{U_0}{U} - 1 \le \frac{U_0}{U_*} - 1.$$

Следовательно, при выполнении неравенства

$$\frac{U_0}{U_*} - 1 \le \delta_0 \tag{5}$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины.

При выполнении неравенства (5) математическая модель (3) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Затем определим условия, при которых применима математическая модель (4). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. Тогда согласно результатам, полученным в работе [11], приходим к задаче Коши

$$\frac{C_i^0 U_i^0}{\beta_i U_i^2}\frac{dU_i}{dt} = \frac{\alpha_i S_i U_i^0 - \alpha_i S_i U_i - \beta_i I U_i^2}{\gamma_i U_i^0 - \gamma_i U_i + \beta_i U_i}, \qquad U_i(t_0) = U_i^0, \tag{6}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, и найдем момент времени

$$t_i = t_0 + \frac{C_i^0}{\alpha_i S_i}\left[\frac{\gamma_i}{\beta_i}\left(\frac{U_i^*}{U_i^0} - 1 + \delta_0\right)\frac{U_i^0}{U_i^*} + \left(\frac{U_i^0}{2U_i^0 - U_i^*} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U_i^0 - U_i^*}{2U_i^0 - U_i^*}\frac{U_i^0}{U_i^*} - 1\right)\ln\left(2 - \frac{U_i^*}{U_i^0} - \delta_0\right) -$$
$$\left. - \left(\frac{U_i^0}{2U_i^0 - U_i^*} + \frac{\gamma_i}{\beta_i}\frac{U_i^0 - U_i^*}{2U_i^0 - U_i^*}\frac{U_i^0}{U_i^*}\right)\ln\left(\frac{U_i^0}{U_i^0 - U_i^*}\delta_0\right)\right],$$

для которого $U_i(t_i) = U_i^* / (1 - \delta_0)$. При $t \ge t_i$

$$\delta(U_i^*) = \left|\frac{U_i - U_i^*}{U_i}\right| = 1 - \frac{U_i^*}{U_i} \le \delta_0,$$

а значение U_i^* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $U_i(t)$. Пусть $t_* = \max\limits_{1 \le i \le n} t_i$, тогда легко показать, что при $t \ge t_*$

$$\delta(U_*) = \left|\frac{U - U_*}{U}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - U_i^*\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} U_i \le \delta_0.$$

Следовательно, можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (4) для нахождения искомой величины, причем

$$\delta_0 < \frac{U_0}{U_*} - 1,$$

так как в противном случае следует применять формулу (3).

Если не выполнено условие (5), то математическая модель (4) при $t \geq t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

4. Результаты

Построение иерархии математических моделей объекта исследования с учетом полученных в работе [11] результатов позволяет выявить рабочую математическую модель, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Действительно, если выполняется неравенство (5), то математическую модель (3) считаем рабочей. Если не выполнено условие (5), а временной интервал от t_0 до t_* можно в рамках проводимого исследования не рассматривать, то выбираем математическую модель (4) как рабочую, иначе — математическую модель (2), (6).

5. Заключение

Таким образом, сформулированы утверждения, которые позволяют установить рабочую математическую модель электротепловой системы. Построенная в рамках единого подхода модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности применительно к данному исследованию.

Очевидно, что применение такой математической модели не только сокращает затраты времени и средств на проведение исследования, но и позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

References:

1. Markelov GE (2015) On Approach to Constructing a Working Mathematical Model. ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (24): 287–290. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)52 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.52
2. Markelov GE (2015) Constructing a Working Mathematical Model. ISJ Theoretical & Applied Science, 08 (28): 44–46. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-28-6 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.08.28.6
3. Myshkis AD (2014) Elements of the Theory of Mathematical Models [in Russian]. LENAND, Moscow.
4. Zarubin VS (2010) Mathematical Modeling in Engineering [in Russian]. Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, Moscow.
5. Markelov GE (2012) Peculiarities of Construction of Mathematical Models. Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii, No. 4, Available: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/150.html (Accessed: 12.02.2017).
6. Markelov GE (2000) Effect of initial heating of the jet-forming layer of shaped-charge liners on the ultimate elongation of jet elements. J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 2, pp. 231–234.
7. Markelov GE (2000) Effect of initial heating of shaped charge liners on shaped charge penetration. J. Appl. Mech. and Tech. Phys., 41, No. 5, pp. 788–791.
8. Markelov GE (2000) Influence of heating temperature on the ultimate elongation of shaped-charge jet elements. Proc. of the 5th Int. Conf. “Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics”, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, p. 170.
9. Markelov GE (2015) Particular Aspects of Teaching the Fundamentals of Mathematical Modeling. ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (25): 69–72. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS*05(25)14 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.05.25.14
10. Markelov GE (2016) Teaching the Basics of Mathematical Modeling. Part 2. ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (33): 72–74. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-33-15 Doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.01.33.15
11. Markelov GE (2017) Working Mathematical Model of Electro-thermal System Component. ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (45): 1–3. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-45-1 Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2017.01.45.1