



Alianças defensivas globais em grafos prisma complementares e roda

Rafael de Castro Freitas, *Graduando em Sistemas de Informação, UFG*,
Elisângela Silva Dias, *Doutora em Ciência da Computação, UFG*.

Resumo—Grafos são estruturas matemáticas discretas cuja teoria permite aplicações em muitos problemas. Alianças em grafos são um tema de pesquisa relativamente novo e neste trabalho nós estudamos as alianças defensivas, que podem ser utilizadas como modelo matemático em comunidades web, redes sociais, cadeias alimentares, etc. São descritos resultados teóricos em grafos roda e em prismas complementares de grafos completos.

Palavras-chave—Alianças em grafos, alianças globais, alianças defensivas, prismas complementares, grafos roda.

Global defensive alliances in complementary prism and wheel graphs

Abstract—Graphs are discrete mathematical structures whose theory is applicable to many problems. Alliances in graphs are a quite new field of study and in this paper we study the defensive alliances, which can be used as a mathematical model in web communities, social medias, food chain, etc. We describe theoretical results in wheel graphs and complementary prisms of complete graphs.

Index Terms—Alliances in graphs, global alliances, defensive alliances, complementary prisms, wheel graphs.

I. INTRODUÇÃO

Grafos podem ser utilizados para modelar e facilitar a visualização de diversas situações da vida real. Por exemplo, podemos utilizar um grafo para encontrar os menores caminhos para atravessar de um ponto da cidade a outro. Isso faz com que a Teoria dos Grafos seja bem explorada, pois a sua aplicação é extensa em diversas áreas, como a de negócios, tráfego, distribuição de produtos, entre outros.

Um conceito recente e que tem sido bastante estudado é o de *alianças* em grafos, que foi introduzido por Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [10] em 2003. As alianças se classificam em: defensivas, ofensivas e poderosas.

As alianças defensivas servem de modelo matemático para vários problemas teóricos e práticos em diversas áreas

Rafael de Castro Freitas é aluno de Graduação no Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás. E-mail: rafaelcastro@inf.ufg.br

Elisângela Silva Dias é professora adjunta no Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás. E-mail: elisangela@inf.ufg.br

do conhecimento, como a de comunidades *web*, redes sociais, cadeias alimentares, estrutura de dados, etc. Muitos pesquisadores [1, 2, 4, 8, 13, 14, 15] têm se dedicado a esse tema que é bastante complexo, uma vez que o cálculo do número da aliança em grafos pertence à classe de problemas NP-completos [13].

O objetivo desta pesquisa é obter novos resultados teóricos para alianças defensivas globais nos grafos roda e prismas complementares.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção II, apresentamos conceitos e definições necessários ao entendimento e à compreensão do trabalho. Na Seção III, apresentamos nossos resultados com suas respectivas demonstrações; apresentamos também, em forma de tabela, resultados já propostos anteriormente por outros pesquisadores. Na Seção IV, apresentamos nossas conclusões, problemas em aberto e trabalhos futuros. Por fim, apresentamos as referências bibliográficas utilizadas.

II. DEFINIÇÕES

Um grafo é uma estrutura definida por dois conjuntos: um conjunto não vazio de pontos ou *vértices* e um subconjunto de pares de vértices denominados *arestas*. Se existir uma aresta a definida por dois vértices u e v , dizemos que a conecta u e v . Ambos os conjuntos podem ser finitos ou infinitos; neste trabalho consideraremos apenas o caso finito. Denotamos o grafo G por $G = (V(G), E(G))$, tal que $V(G)$ é o conjunto de vértices e $E(G) = \{uv | u, v \in V(G)\}$. Consideramos $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$, onde $|V(G)|$ representa a cardinalidade do conjunto de vértices, e $|E(G)|$ representa a cardinalidade do conjunto de arestas. Quando duas arestas nunca conectam os mesmos vértices e nenhuma aresta conecta um vértice a ele mesmo, ele é chamado de *grafo simples*. Dizemos que um grafo é *não orientado* se $uv = vu$. Caso contrário, se $uv \neq vu$, temos um *grafo orientado*. Um *conjunto dominante* (CD) é um subconjunto $D \subseteq V(G)$, tal que cada vértice pertencente a $V(G) \setminus D$ é adjacente a pelo menos um vértice em D . Neste caso, dizemos que D domina o conjunto $V(G) \setminus D$.

Na Figura 1, temos um exemplo de um grafo qualquer. Observe que temos uma aresta ligando os vértices a e b , que são, portanto, adjacentes. Como não existem setas, dizemos que $ab = ba$ e o grafo é não orientado. Um CD neste grafo é $D = \{c, f\}$, posto que todos os outros elementos $\{a, b, d, e\}$ estão ligados a c , pertencentes a D .

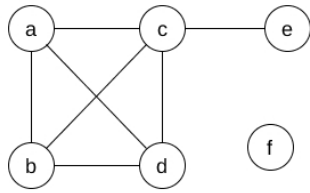


Fig. 1. Exemplo de um grafo G qualquer.

Dois vértices u e v em um grafo G são ditos *adjacentes* ou *vizinhos* se existir uma aresta a que os conecte. O conjunto de vértices conectados a um vértice dado v é chamado de *vizinhança*. Na *vizinhança aberta*, denotada por $N(v)$, consideramos todos os vértices adjacentes a v . A *vizinhança fechada*, denotada por $N[v]$, é o conjunto $N(v) \cup v$.

O *grau de um vértice* v , denotado por $d(v)$, é o número de arestas que incidem neste vértice. Se um vértice possui grau zero ele é chamado de vértice *isolado*. Um vértice é dito *pendente* se possuir grau igual a 1. Analisando o grafo G na Figura 1, temos que $d(a) = 3$, $d(e) = 1$ e $d(f) = 0$. Então, o vértice e é pendente e o vértice f é isolado.

Muitas vezes iremos nos deparar com grafos complexos, seja pela estrutura ou grau dos vértices; e de grande porte e, talvez, precisemos considerar somente uma parte dele. É possível trabalhar apenas com uma parte do grafo original, desde que as extremidades das arestas remanescentes sejam mantidas. Um grafo menor obtido a partir de outro é chamado de *subgrafo*. Dizemos que um subgrafo de G é um grafo $G' = (V(G'), E(G'))$ tal que $V(G') \subseteq V(G)$ e $E(G') \subseteq E(G)$. Um subgrafo é *induzido* se consiste em um subconjunto V' não vazio, tal que $V' \subseteq V(G)$, e E' consiste de todas as arestas de $E(G)$, cujos extremos pertencem a V' .

Na Figura 2, temos um grafo com um de seus possíveis subgrafos, neste caso subgrafo induzido, que foi construído tomando-se os vértices $\{a, b, d\}$ pertencentes ao grafo original e todas as arestas que ligam estes nós, no caso $\{ab, ad, bd\}$.

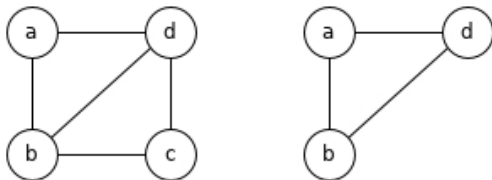


Fig. 2. Grafo e um de seus subgrafos.

Um grafo pode ser representado de várias maneiras, inclusive ao se permutarem os índices que identificam o conjunto de vértices. Neste caso, diremos que estes grafos são *isomorfos*. Sejam $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ e $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ dois grafos. Eles serão isomorfos se e somente se existir uma função bijetora $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que se a e b são adjacentes em G_1 , então $f(a)$ e

$f(b)$ são adjacentes em G_2 para todo a e b em $V(G_1)$.

Em outras palavras, dois grafos são isomorfos se a função f que os relaciona preservar as relações de adjacência. Portanto, nos grafos simples a relação de isomorfismo só será dada se o número de vértices, número de arestas e os graus de seus correspondentes forem iguais nos dois grafos. Entretanto, não há garantias de que dois grafos que respeitem estas premissas sejam isomorfos. Não se conhece ainda um conjunto útil de *invariantes* para determinar o isomorfismo entre grafos simples [12]. Um invariante de um grafo G é um valor igual para todos os seus isomorfos.

Na Figura 3, podemos ver dois grafos que são isomorfos, em que os vértices a, b, c, d, e e f em G_1 correspondem aos vértices z, w, x, y, u e v em G_2 , respectivamente, e o reposicionamento dos nós não altera a estrutura do grafo. Assim sendo, temos que $f(a) = z$, $f(b) = w$, $f(c) = x$, $f(d) = y$, $f(e) = u$ e $f(f) = v$.

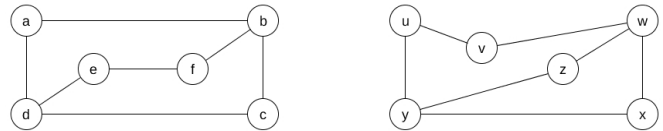


Fig. 3. Exemplo de isomorfismo entre um grafo G_1 e um G_2 .

Um *caminho*, denotado por P_n , é uma sequência de $k - 1$ arestas entre um vértice inicial v_0 e um vértice final v_n . O caminho pode ser um *ciclo*, denotado por C_n , se o início e o fim for no mesmo vértice, ou seja, se $v_0 = v_n$. Nomeamos *caminho simples* um caminho que não contenha a mesma aresta mais de uma vez. Podemos ver que os vértices 1, 5, 6, 3 no grafo da Figura 4 formam um caminho simples de comprimento 3, pois $\{1, 5\}$, $\{5, 6\}$ e $\{6, 3\}$ são arestas de G . Observe que os vértices 4, 5, 3, 1 não formam um caminho, pois $\{5, 3\}$ nem $\{3, 1\}$ não são arestas. Vemos ainda que os vértices 1, 2, 5, 1 formam um ciclo de comprimento 3, pois $\{1, 2\}$, $\{2, 5\}$ e $\{5, 1\}$ são arestas e este caminho começa e termina em 1.

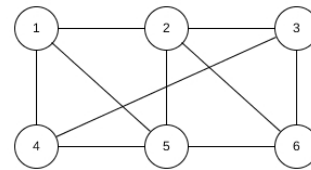


Fig. 4. Um grafo G simples.

Um grafo é *completo*, denotado por K_n , se quaisquer dois de seus vértices distintos forem adjacentes. Na Figura 5, tem-se um exemplo de um grafo completo. Uma *clique* é um subconjunto de vértices C , tal que $C \subseteq V(G)$, sendo que para cada dois vértices $x, y \in C$ existe uma aresta conectando-os, onde para todo par u, v de $V(G)$ existe uma aresta $uv \in E(G)$. Em outras palavras, uma clique é um subgrafo induzido de G e é um grafo completo, mas não necessariamente o grafo G precisa ser completo. Por

exemplo, na Figura 2 temos que o subgrafo à direita é uma clique.

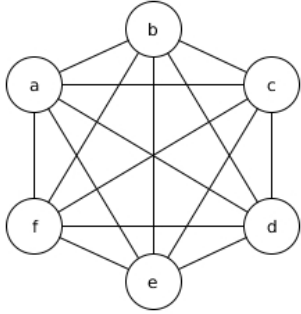


Fig. 5. Um grafo completo K_6 .

Um grafo *split* é um grafo cujos vértices podem ser particionados em uma clique e um conjunto independente. Um *conjunto independente* de um grafo G é um conjunto S de vértices, tal que $S \subseteq V(G)$, para o qual não existem vértices adjacentes em S . Em outras palavras, se dois vértices $u, v \in S$, não há uma aresta conectando-os. Por exemplo, na Figura 6 temos que os vértices $\{a, b, c, d, e\}$ formam a clique e os vértices $\{f, g\}$ formam o conjunto independente.

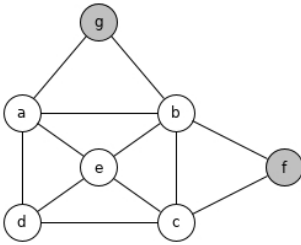


Fig. 6. Exemplo de um grafo split.

Um grafo *roda*, denotado por W_n , é um ciclo com um vértice central que conecta todos os vértices do ciclo. Observe que este vértice central domina todos os demais. Na Figura 7, temos um exemplo de um grafo roda.

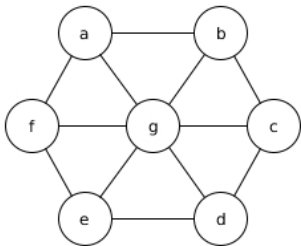


Fig. 7. Um grafo roda W_7 .

A. Alianças

O conceito de alianças em grafos é relativamente novo. Em um ambiente social, por exemplo, uma aliança pode

ser definida como um conjunto de pessoas que possuem interesses em comum e que se unem para um ataque ou para uma defesa. Na teoria dos grafos, essa definição é semelhante. Uma aliança em um grafo, de modo bem simples, é um conjunto de vértices com algumas propriedades em comum, como por exemplo grau do vértice ou vizinhança. Assim como na vida real, há alguns tipos diferentes de alianças em grafos, que serão definidas a seguir.

Seja $S \subseteq V(G)$. S é uma *aliança defensiva* (AD) se e somente se $\forall v \in S, |N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. Em outras palavras, todo vértice $v \in S$ tem no máximo um vizinho a mais em $V(G) \setminus S$ do que em S .

Uma aliança defensiva é *global* (ADG) quando todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a pelo menos um membro da aliança S , tornando S um conjunto dominante. Na Figura 8, temos um exemplo de aliança defensiva à esquerda. Os vértices $\{a, b, f\}$ do grafo à direita formam tanto uma AD, quanto um CD. Portanto, temos a formação de uma ADG.

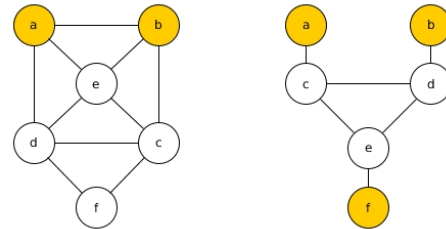


Fig. 8. Exemplo de aliança defensiva, à esquerda, e aliança defensiva global, à direita.

O número mínimo da ADG é denotado por $\gamma_a(G)$ e do conjunto dominante é $\gamma(G)$. Isto nada mais é do que a cardinalidade mínima do conjunto de vértices que forma a ADG, ou CD. É possível obter uma ADG se considerarmos todos os vértices do grafo, isso é trivial. Por este motivo trabalhamos com o valor mínimo, posto que é um problema em aberto e complexo em algumas classes de grafos.

III. RESULTADOS

Ao estudar alianças defensivas, alianças defensivas globais e alianças ofensivas globais, vimos que o problema de encontrar uma aliança mínima de cada um destes tipos se encontra na classe NP-completo, mesmo quando o problema é restrito a algumas classes de grafos, veja [5] e [11].

Para grafos roda, provamos os seguintes resultados.

Teorema 1: Para um grafo roda W_n , com $n \geq 4$, tem-se que:

$$\gamma_a(W_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova: Seja $V_e(W_n)$ o subconjunto de vértices externos de W_n , $v \in V_e(W_n)$, e S o conjunto que forma ADG, com $S \subseteq V_e$. Como o grafo roda é 3-regular, exceto pelo vértice central, isto é cada v possui 3 vizinhos, dois vértices

externos adjacentes mais o vértice central, que é comum a todos. Pela definição de aliança defensiva, sabemos que para todo vértice $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. Ou seja, cada um dos vértices $v \in V_e$ precisa de pelo menos mais um vizinho para que seja formado uma AD.

Note que os vértices externos do grafo roda formam um grafo ciclo C_{n-1} , já que desconsideramos o vértice central. Nesse contexto, temos que a cardinalidade do conjunto dominante para o grafo W_n é o mesmo do grafo C_n , isto é, $\gamma(W_n) = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$. Para determinar o conjunto dominante, não é necessário a exigência de ter pelo menos mais um vizinho da AD, uma vez que cada v consegue dominar dois vizinhos, e também o vértice central. Tendo em vista que toda ADG também é um conjunto dominante, é preciso de no mínimo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices no grafo, dispostos em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pares de vértices.

Para grafos em que $n \equiv 3 \pmod{4}$, é preciso acrescentar mais um vértice a um dos pares de vértices, totalizando $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, visto que não é possível obter um número exato de pares v , pois sempre dará um número ímpar. Por exemplo, considere $n = 7$. Aplicando a fórmula temos que $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$. Com isso teremos um vértice isolado quando separarmos em pares, e isto não pode ocorrer, já que este nó isolado terá mais vizinhos em $V(G) \setminus S$ do que no próprio S , e se este vértice ficar junto ao par o grafo não será totalmente coberto. Por esse motivo temos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, se $n \equiv 3 \pmod{4}$. ■

Teorema 2: Para um grafo roda W_n , com $n \geq 6$, tem-se que:

$$\gamma_a(W_n) = \begin{cases} 2 \cdot \gamma(W_{n-\lfloor \frac{\gamma_a(W_n-2)}{2} \rfloor}) - 1, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2 \cdot \gamma(W_{n-\lfloor \frac{\gamma_a(W_n-2)}{2} \rfloor}), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova: Seja W'_n um subgrafo induzido de W_n formado pelo subconjunto de vértices externos de W_n . E seja $V'_e(W'_n)$ o conjunto de vértices de W'_n . Observe que ao desconsiderar o vértice central de W_n , temos que W'_n é o grafo C_n . Portanto, o conjunto dominante de $\gamma(W'_n) = \gamma(C_n)$. O conjunto dominante de um grafo roda é dado por $\gamma(W_n) = 1$, uma vez que o vértice central consegue dominar todos os vértices, isso é trivial. Porém, se considerarmos o conjunto dominante de W_n não se obtém o valor mínimo de uma ADG todas as vezes. Isto ocorre porque devemos considerar o vértice central mais a metade dos vértices externos para que seja formada uma ADG, obtendo $\gamma_a(W_n) = 1 + \lfloor \frac{|V(W_n-1)|}{2} \rfloor$.

Seja D o conjunto dominante de W'_n , e seja S o conjunto que forma ADG em W'_n . Como foi dito no Teorema 1, um vértice $v \in D$ consegue dominar 2 vizinhos mais o vértice central. Entretanto, isso não é suficiente para formar uma ADG, visto que um vértice sozinho em W'_n não domina todo o grafo. Ao pegar a metade do conjunto S de dois grafos anteriores de W_n e subtrair o resultado da quantidade n de vértices, será obtido o grafo anterior com um n equivalente. Tendo o conjunto dominante desse grafo anterior em mãos, é possível obter uma ADG adicionando mais um vértice em cada $v \in D$, formando pares. Observe

que ao fazer isso, a quantidade de vértices é dobrada. Essa é uma construção que garante uma ADG mínima.

Em outras palavras, dado um W_n qualquer, a metade dos vértices do conjunto que forma ADG de dois grafos anteriores, $\frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2}$, que vamos chamar de x por enquanto, menos o próprio n , obtendo $n - x$, retorna o grafo anterior equivalente ao W_n , representado por W_{n-x} . Assim, o conjunto S é obtido ao dobrar a quantidade de vértices do conjunto dominante de W_{n-x} , obtendo a fórmula $2 \cdot \gamma(W_{n-\lfloor \frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2} \rfloor})$.

Para grafos com $n \equiv 2 \pmod{4}$ vértices, ao dobrar o conjunto D do grafo anterior equivalente, a quantidade de vértices ultrapassa uma unidade, já que sempre obteremos um número par de vértices. Porém, o conjunto S deixa de ser mínimo. Como foi demonstrado no Teorema 1 ao retirar um vértice, deixando o vértice isolado junto a um par, ainda é possível obter uma ADG, mínima, no grafo W_n . Por essa razão, tem-se que $2 \cdot \gamma(W_{n-\lfloor \frac{\gamma_a(W_{n-2})}{2} \rfloor}) - 1$. ■

Na Figura 9, temos um exemplo de ocorrência de ADG nos grafos roda W_7 e no W_9 . Note que o grafo W_7 está no conjunto de números $n \equiv 3 \pmod{4}$, então não é possível obter uma ADG com apenas metade dos vértices, por isso soma-se mais 1. Associando o CD para encontrar a ADG no grafo W_9 temos que o grafo equivalente ao W_9 é o W_7 , e isto pode ser obtido a partir da suboperação $\gamma(W_{9-\lfloor \frac{\gamma_a(W_9-2)}{2} \rfloor})$, presente na fórmula do Teorema 2. O CD do W_7 é 2. No exemplo da Figura 9 podemos ver que este conjunto pode ser formado pelos vértices $D = \{2, 5\}$. Sendo assim, ao querer obter a ADG do grafo W_9 basta dobrar o CD do grafo W_7 , $2 \cdot \gamma(W_7) = 2 \cdot 2$. Como resultado teremos que $\gamma_a(W_9) = 4$, assim como apresentado na Figura 9.

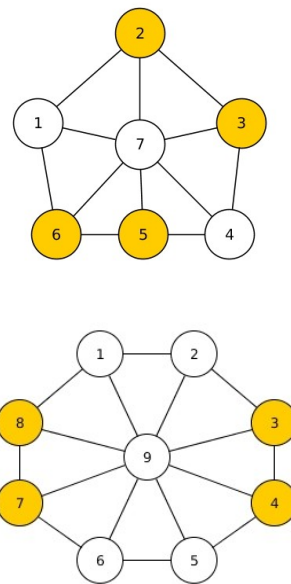


Fig. 9. Grafos roda W_7 e W_9 , respectivamente.

Teorema 3: Para o grafo $K_n\overline{K_n}$, com $n \geq 2$, tem-se que: $\gamma_a(K_n\overline{K_n}) = n$.

Prova: Seja G o grafo $K_n\overline{K_n}$. Observe que G é também um grafo split, já que o conjunto de vértices $V(K_n)$ forma uma clique, e o conjunto $V(\overline{K_n})$ forma um conjunto independente. No subgrafo $\overline{K_n}$ tem-se um conjunto de vértices folhas, ou seja, cada $v \in V(\overline{K_n})$ tem apenas um vizinho, que são os vértices pertencentes à clique. Então, para se ter uma ADG, é preciso pegar todo o conjunto $V(\overline{K_n})$, obtendo os n vértices.

No subgrafo K_n todos os vértices são conectados. Sendo assim, é possível obter uma ADG com $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices. Porém, esse conjunto não é dominante, uma vez que cada $v \in V(K_n)$ possui uma folha. Por conta disto, metade do grafo sempre ficará descoberta. Portanto, para se obter uma ADG no subgrafo $V(K_n)$, também é preciso de n vértices. ■

Na Figura 10, temos um exemplo de ADG no grafo $K_6\overline{K_6}$. O padrão de ocorrências para os outros grafos sempre será desta forma. Os vértices do grafo K_6 só conseguem cobrir todo o grafo se todos os vértices participarem da ADG, assim como os vértices do complemento de K_6 . Então, a ADG pode ser determinada tanto pelos vértices de K_6 quanto de $\overline{K_6}$.

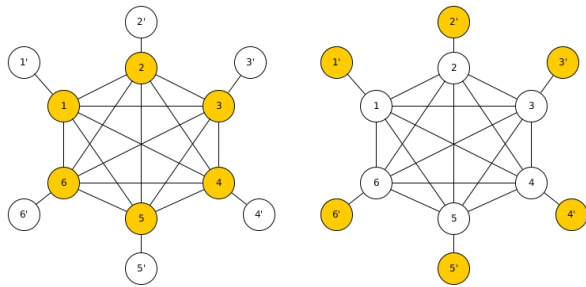


Fig. 10. Dois possíveis exemplos de ADG no grafo prisma complementar $K_6\overline{K_6}$.

A. Estado da arte

Para a compreensão dos resultados nas tabelas abaixo é necessário apresentar mais algumas definições. Uma *aliança defensiva forte* (ADF) ocorre se e somente se $\forall v \in S, |N[v] \cap S| > |N[v] \setminus S|$. Neste caso, a inequação é estrita e todo vértices v é fortemente defendido, ou seja, um vértice no conjunto S tem mais vizinhos em S , incluindo ele próprio, do que em $V(G) \setminus S$. Na Figura 11, os vértices destacados formam uma aliança defensiva forte. O vértice $\{2\}$, por exemplo, possui três vizinhos em S , visto que o próprio nó é incluso no conjunto, e dois vizinhos em $V(G) \setminus S$.

Se $S \subseteq V(G)$ e S é um conjunto não vazio de vértices, teremos uma *aliança ofensiva* (AO) se e somente se $\forall v \in \partial S, |N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. Em outras palavras, todo vértice na fronteira de S tem pelo menos um vizinho a mais em S do que em $V(G) \setminus S$. Na Figura 12, temos um exemplo de aliança ofensiva. O vértice $\{e\}$, por exemplo, tem dois vizinhos em S , e apenas um vizinho em $V(G) \setminus S$.

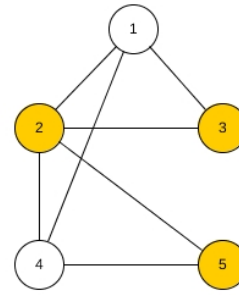


Fig. 11. Exemplo de aliança defensiva forte e aliança poderosa.

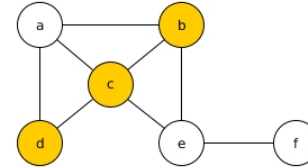


Fig. 12. Exemplo de uma aliança ofensiva.

Uma *aliança ofensiva global* (AOG) segue a mesma definição da ADG, ou seja, temos uma AOG quando todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a pelo menos um membro de S , tornando S um conjunto dominante. Na Figura 13, temos um exemplo de AOG em um grafo cúbico.

Uma aliança ofensiva é *forte* (AOF) se $v \in \partial S, |N[v] \cap S| > |N[v] \setminus S|$. Neste caso, a inequação também é estrita. Desse modo, pode-se dizer que toda aliança ofensiva forte é uma aliança ofensiva, todavia, nem toda aliança ofensiva é uma aliança ofensiva forte. Temos um exemplo de aliança ofensiva forte na Figura 13.

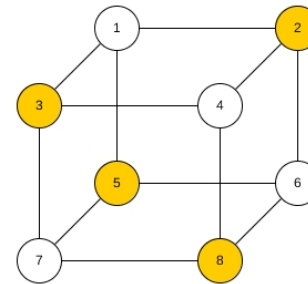


Fig. 13. Exemplo de aliança ofensiva global e ofensiva forte em um grafo cúbico.

Na Figura 11, temos a formação de uma aliança defensiva e ofensiva no conjunto $S = \{2, 3, 5\}$, pois os vértices possuem mais vizinhos em S do que fora de S , levando em consideração a vizinhança fechada de vértice. Nessas condições, quando uma aliança é defensiva e ofensiva ao mesmo tempo, ela é denominada *aliança poderosa* (AP).

Uma aliança é *defensiva forte global* (ADFG) quando todos os vértices em $V(G) \setminus S$ de uma ADF, é adjacente a pelo menos um membro da aliança S , tornando o conjunto S dominante.

Uma *aliança poderosa global* (APG) é definida quando

há um conjunto dominante, ou seja, quando todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a pelo menos um membro da aliança S . Na Figura 14, o conjunto $S = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 11, 12\}$ é tanto uma aliança poderosa, quanto um conjunto dominante.

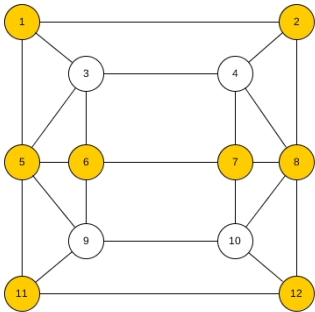


Fig. 14. Exemplo de aliança poderosa global.

O produto cartesiano $G_1 \times G_2$ de dois grafos G_1 e G_2 resulta em um outro grafo com um conjunto de vértices $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$. Os vértices (v_1, v_2) e (u_1, u_2) são vizinhos se seguir a condição de exclusividade:

- ou $[v_1 u_1 \text{ e } v_2 = u_2]$;
- ou $[v_2 u_2 \text{ e } v_1 = u_1]$.

Na Figura 15, temos um exemplo de produto cartesiano entre um grafo ciclo C_3 e um grafo caminho P_2 . Observe que os vértices de C_3 são multiplicados com todos os vértices de P_2 , resultando no conjunto $\{a, 1; a, 2; b, 1; b, 2; c, 1; c, 2\}$. Após obter os vértices, conectamos aqueles que possuem o vértice em comum, ou seja, $\{a, 1\}$ conecta-se com todos que possuem a ou 1 . Isto gera o grafo apresentado no exemplo.

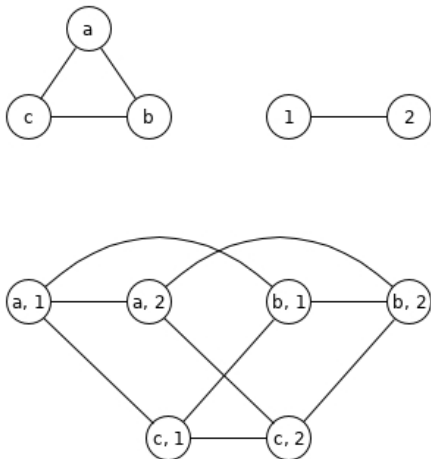


Fig. 15. Produto cartesiano $C_3 \times P_2$.

Na Figura 16, temos dois caminhos P_2 . Após multiplicarmos os vértices obtemos o conjunto $\{1, a; 1, b; 2, a; 2, b\}$. Executando o mesmo processo descrito no exemplo anterior, obtemos o grafo apresentado abaixo.

Denotamos por $\overline{G} = (V(\overline{G}), E(\overline{G}))$ como sendo o complemento de um grafo G em que ambos possuem o mesmo

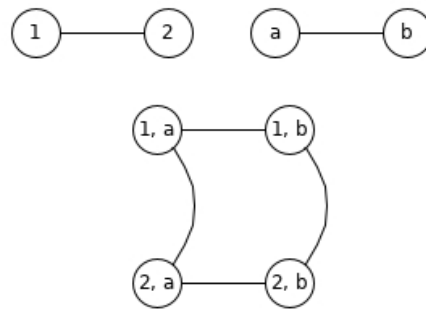


Fig. 16. Produto cartesiano $P_2 \times P_2$.

conjunto de vértices e \overline{G} possui um conjunto de arestas complementares. Em outras palavras, se uma aresta uv existir em G , os vértices u e v não são vizinhos em \overline{G} e vice-versa.

O prisma complementar, denotado por $G\overline{G}$, é o emparelhamento perfeito de um grafo G com o seu complemento. O grafo resultante é a união disjunta de $G \cup \overline{G}$, emparelhando os vértices correspondentes com suas arestas complementares. Podemos ver o grafo prisma complementar $C_4\overline{C_4}$ na Figura 17.

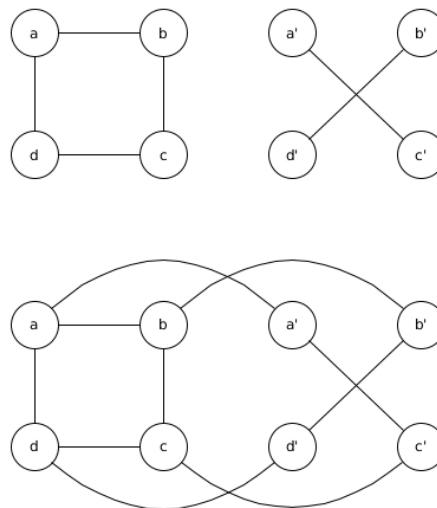


Fig. 17. Grafo prisma complementar $C_4\overline{C_4}$.

O número mínimo da k -aliança defensiva em um grafo é denotado por $a_k(G)$; da AD é denotado por $a(G)$; da ADF é denotado por $\hat{a}(G)$; da ADG é denotado por $\gamma_a(G)$; da ADFG é denotado por $\gamma_{\hat{a}}(G)$; da AO é denotado por $a_o(G)$; da AOF é denotado por $\hat{a}_o(G)$; da AOG é denotado por $\gamma_o(G)$; da AP é denotado por $a_p(G)$; da APG é denotado por $\gamma_{a_p}(G)$.

Nas tabelas I, II, III, IV encontram-se os resultados que traduzem o estado da arte nas classes de grafos explicitados. Na Tabela III, acrescentamos resultados para o estado da arte nas classes de grafos roda e prisma complementar de grafos completo e também fazendo a correlação entre CD e ADG. Os pontos de interrogação significam que

não foram encontrados resultados naquela classe de grafo, sendo problemas ainda em aberto.

TABELA I
RESULTADOS EM ALIANÇAS DEFENSIVAS E k -ALIANÇAS DEFENSIVAS.

Grafo	a	a_k
$G \times H$	$\leq \min\{a(G)\hat{a}(H), \hat{a}(G)a(H)\}$ [14]	$\geq \max\{a_{k-\Delta_2}(G), a_{k-\Delta_1}(H)\}, \Delta_1(G) \text{ e } \Delta_2(H)$ [15] $a_{k-s} \leq \min\{a_k(G), a_k(H)\}, s \in \mathbb{Z}$ [15] $a_{k_1+k_2} \leq a_{k_1}(G)a_{k_2}(H)$ [15]

TABELA II
RESULTADOS EM ADFG, ADF E AO.

Grafo	$\gamma_{\hat{a}}$	\hat{a}	a_o
$C_n \bar{C}_n, n \geq 10$	$\lceil \frac{3n}{4} \rceil$ [8]	?	?
$G \times H$?	$\leq \hat{a}(G)\hat{a}(H)$ [15]	?
$C_n \times C_m$, se n, m são múltiplos de 4	?	?	$\frac{3}{8}nm$ [6]

TABELA III
RESULTADOS EM ADG.

Grafo	γ_a
$C_n \bar{C}_n, n \geq 10$	$\lceil \frac{3n}{4} \rceil$ [8]
$G, n \geq 2 \text{ e } m \geq 3$	$\lceil \frac{3n}{4} \rceil - 1$, se $n \equiv 3 \pmod{4}$ [8] $G\bar{G} \geq G + \bar{G}$ [14] $G_1 \circ G_2 \geq \lceil \frac{n_1 n_2}{\Delta_1 \Delta_2 + 1} \rceil$ [14] $G_1 \times G_2 \geq \lceil \frac{2n_1 n_2}{3} \rceil$, se $G_i = P_{n_i}, C_{n_i}, i = 1, 2$ [3] $G_1 \times G_2 = \frac{2n_1 n_2}{3}$, se $G_i = P_{n_i}, C_{n_i}, i = 1, 2 \text{ e } n_1 n_2 \equiv 0 \pmod{3}$ [3]
$G \circ H, m \geq 5$	$P_2 \circ C_m = 2\lceil \frac{m}{2} \rceil$ [14] $P_3 \circ C_m = m + \lceil \frac{m-1}{2} \rceil$ [14] $m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$, se $G \in \{P_3, C_3\}, H \in \{P_m, S_m\}$ [14] $2m - 1$, se $G \in \{P_4, C_4, P_5, C_5\}$ e se $H \in \{P_m, C_m\}$ [14] $2m + 2$, se $G \in \{P_6, C_6\}$ e se $H \in \{P_m, S_m\}$ [14] $G \circ C_m = 2m + 4$, se $G \in \{P_6, C_6\}$ [14] $3m$, se $G \in \{P_7, C_7\}$ e se $H \in \{P_m, C_m\}$ [14] $G \circ C_m = 3m + 1$, se $G \in \{P_7, C_7\}$ [14]
$P_n \circ C_m, n \geq 3 \text{ e } 5 \leq m \leq 13$	$\leq (2m - 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil$, se $n \equiv 0, 4 \pmod{5}$ [13] $\leq (2m - 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil + 5$, se $n \equiv 1 \pmod{5}$ [14] $\leq (2m - 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil - \lceil \frac{m}{2} \rceil$, se $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ [14]
$P_n \circ C_m, n \geq 3 \text{ e } m \geq 5$ ou $C_n \circ C_m, n \geq 3 \text{ e } m \geq 5$	$(2m - 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil$, se $n \equiv 0 \pmod{5}, n \neq 2 \pmod{6}$ [14] $(2m - 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2m + 4$, se $n \equiv 1 \pmod{5}, n \equiv 3 \pmod{6}$ [14] $\leq (2m + 4)\frac{n}{2}$, se $n \equiv 0 \pmod{6}$ [14]
$P_n \circ C_m, n \geq 8 \text{ e } m \geq 14$ ou $C_n \circ C_m, n \geq 8 \text{ e } m \geq 14$	$\leq (2m + 4)\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3m + 1$, se $n \equiv 1 \pmod{6}$ e $n \neq 0 \pmod{5}$ [14] $\leq (2m + 4)\lceil \frac{n}{2} \rceil + m + \lceil \frac{m-1}{2} \rceil$, se $n \equiv 2 \pmod{6}$ [14] $\leq (2m + 4)\lceil \frac{n}{2} \rceil + m + \lceil \frac{m-1}{2} \rceil$, se $n \equiv 3 \pmod{6}, n \neq 0 \pmod{5}$ [14] $\leq (2m + 4)\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2m - 1$, se $n \equiv 4 \pmod{6}, n \neq 1 \pmod{5}$ [14] $\leq (2m + 4)\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2m - 1$, se $n \equiv 5 \pmod{6}$ [14]
$P_n \circ P_m, n \text{ e } m \geq 8$ ou $C_n \circ P_m, n \text{ e } m \geq 8$	$\leq (2m - 1)\frac{n}{2}$, se $n \equiv 0, 3, 4 \pmod{5}$ e $n \neq 0, 5 \pmod{6}$ [14] $\leq (2m - 1)\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2m + 2$, se $n \equiv 1 \pmod{5}$ [14] $\leq (2m + 2)\frac{n}{2}$, se $n \equiv 0 \pmod{6}$ [14] $\leq (2m + 2)\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2m - 1$, se $n \equiv 5 \pmod{6}$ [14]
$K_n \circ K_m$	$\lceil \frac{mn}{2} \rceil$ [14]
$G \circ K_m, n \geq 3 \text{ e } m \geq 5$	$\lceil \frac{m \times 3}{4} \rceil \times \gamma(G) - \lceil \frac{m}{2} \rceil \times (\lceil \frac{m}{2} \rceil - \lceil \frac{m}{4} \rceil)$, se $G \in \{C_n, P_n\}$ [14] $\frac{mn}{3}$, se $mn \equiv 0 \pmod{3}$ [8]
$P_m \times P_n$, se $2 \leq m \leq n$ $a = 1 + \lceil \frac{m+2}{4} \rceil - \lceil \frac{m+2}{4} \rceil$ $b = 1 + \lceil \frac{n+2}{4} \rceil - \lceil \frac{n+2}{4} \rceil$	$\leq \lceil \frac{3}{2} \rceil m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a$, se $m \equiv n \equiv 1 \pmod{3}$ [8] $\leq \lceil \frac{3}{2} \rceil m$, se $m \equiv n \equiv 2 \pmod{3}$ [8] $\leq \min\{\lceil \frac{m}{3} \rceil n + \lceil \frac{m}{3} \rceil + b, \lceil \frac{m}{3} \rceil m\}$, se $m \equiv 1 \text{ e } n \equiv 2 \pmod{3}$ [8] $\leq \min\{\lceil \frac{m}{3} \rceil m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a, \lceil \frac{m}{3} \rceil n\}$, se $m \equiv 2 \text{ e } n \equiv 1 \pmod{3}$ [8]
$C_m \times P_n$, se $m \geq 3 \text{ e } n \geq 2$, ou $m \geq 7 \text{ e } m \equiv 1 \pmod{6}, n = 2, 4$ $a = 1 + \lceil \frac{m+2}{4} \rceil - \lceil \frac{m+2}{4} \rceil$	$\frac{mn}{3}$, se $mn \equiv 0 \pmod{3}$ [8] $\leq \min\{\lceil \frac{m}{3} \rceil m, \lceil \frac{m}{3} \rceil n\}$, se $n \equiv 2 \text{ e } m \neq 0 \pmod{3}$ [8] $\leq \min\{\lceil \frac{m}{3} \rceil n, \lceil \frac{m}{3} \rceil m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a\}$, se $n \equiv 1 \text{ e } m \neq 0 \pmod{3}$ [8] $\leq \frac{mn}{3} + \min\{\frac{m}{3}, \frac{n}{3}\}$, se $n \equiv 2 \pmod{6}$ [8] $\leq \frac{mn}{3} + \min\{\frac{m}{3}, \frac{n}{3} + \lceil \frac{m+2}{4} \rceil - \lceil \frac{m+2}{4} \rceil\}$, se $n \equiv 4 \pmod{6}$ [8]
$C_m \times C_n$, se $3 \leq m \leq n$, ou $m = 4, n \geq 7, n \equiv 1 \pmod{6}$	$\lceil \frac{mn}{3} \rceil$, se $mn \equiv 0 \pmod{3}$ [8] $\leq \min\{\lceil \frac{m}{3} \rceil m, \lceil \frac{m}{3} \rceil n\}$, se $mn \neq 0 \pmod{3}$ [8]

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho, foram estudados os grafos roda e prismas complementares, identificando o comportando da aliança defensiva global (ADG) nestas classes de grafos. Foi possível, por exemplo, encontrar uma relação entre um conjunto dominante e uma ADG, obtendo assim outro resultado equivalente nos grafos roda,

TABELA IV
RESULTADOS EM AOG

Grafo	γ_o	
$P_n \circ C_m$	m , para $n = 3$ [14] $m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 2$, para $n = 4$ [14] $2m$, para $n = 5$ [14] $\leq (\frac{n-2}{2}) \times m + 2$, para $n \geq 6 \text{ e } m = 3$ e se n par [14] $\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m$, para $n \geq 6 \text{ e } m = 3$ e se n ímpar [14] $= (\frac{n-2}{2}) \times m + 3$, para $n \geq 6 \text{ e } m \in \{4, 5, 6\}$ e se n par [14] $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m$, para $n \geq 6 \text{ e } m \in \{4, 5, 6\}$ e se n ímpar [14] $3m$, para $n = 7 \text{ e } m \geq 7$ e se $m \leq 9$ [14] $\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor (m + 4) + m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$, para $n = 7 \text{ e } m \geq 7$ e se $m \geq 10$ [14] $(\frac{n-2}{2}) \times m + 4$, para $m \geq 7 \text{ e } n \in \{6, 8, 10\}$ [14]	
	$C_n \circ C_m$	$m + 2$, para $n = 3$ [14] $m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m + 2$, para $n = 4 \text{ e } m \geq 4$ [14] $2m + 4$, para $n = 5 \text{ e } m \geq 7$ [14] $\leq (\frac{n-2}{2}) \times m$, para $n \geq 7 \text{ e } m = 3$ e se n par [14] $\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m + 2$, para $n \geq 7 \text{ e } m = 3$ e se n ímpar [14] $\leq (\frac{n-2}{2}) \times (m + 3)$, para $n \geq 6 \text{ e } m \in \{4, 5, 6\}$ e se n par [14] $\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m$, para $n \geq 6 \text{ e } m \in \{4, 5, 6\}$ e se n ímpar [14]

e isso pode ser usado como estratégia em uma guerra. Por exemplo, deseja-se saber quantos tanques de guerra aliados são necessários e como posicioná-los no campo de batalha. Também podemos aplicar em redes, ao querer obter um resultado preciso sobre como e quantos roteadores, ou switches, posicionar. Entre outros.

Após a atualização do atual estado da arte, notou-se que existem poucos ou nenhum resultado em alguns tipos de alianças para determinadas classes de grafos, o que caracteriza que é um problema em aberto.

Ao estudar a ADG nos grafos roda e prismas complementares de grafos, pode-se perceber que para o prisma complementar do grafo completo é mais fácil de se encontrar um padrão e de obter uma ADG. Ao passo que outros grafos são mais complicados de se enxergar este mesmo padrão, já que os vértices encontram-se mais dispersos. Isto foi observado ao estudar o produto $P_n \bar{P}_n$. Foi obtido resultado para ADG neste grafo, mas não foi possível definir uma fórmula fechada como as apresentadas na Seção III. Dito isto, como trabalho futuro, espera-se obter esta fórmula para o grafo em questão, além de explorar outros tipos de alianças em outras classes, tais como produto cartesiano, produto lexicográfico, grafos linha, produto corona e também prismas complementares de outros grafos.

REFERÊNCIAS

- BERMUDO, S.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M.; YERO, I. G. *On global offensive k-alliances in graphs*. Applied Mathematics Letters, vol. **23**, p. 1454 – 1458 (2010).
- BRIGHAM, R. C.; DUTTON, R. D.; HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T. *Powerful alliances in graphs*. Discrete Mathematics, Elsevier, vol. **309**, p. 2140 – 2147 (2009).
- CHANG, C.W.; CHIA, M. L.; HSU, C. J.; KUO, D.; LAI, L. L. *Global defensive alliances of trees and Cartesian product of paths and cycles*. Discrete Applied Mathematics, vol. **160**, p. 479 – 487 (2012).
- DIAS, E. S. *Alianças Defensivas em Grafos*, 1 ed. Goiânia: Editora UFG, v. **13**, 140p (2012).

- [5] DOURADO, M.C.; FARIA, L.; PIZANA, M. A.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. *On Defensive Alliances and Strong Global Offensive Alliances*. Discrete Applied Mathematics, vol. **163**, p. 136 – 141 (2014).
- [6] FAVARON, O.; FRICKE, G.; GODDARD, W.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T.; KRISTIANSEN, P.; LASKAR, R. C.; SKAGGS, R. D. *Offensive Alliances in Graphs*. Discussiones Mathematicae, Graph Theory 24, p. 263 – 275 (2004).
- [7] GODDARD, W. and HENNING, M. *Independent domination in graphs: A survey and recent results*. Discrete Math., vol. **313**, p. 839–854 (2013).
- [8] GONÇALVES, B. C. *Alianças defensivas globais em alguns produtos de grafos*. Relatório de Graduação, 51p. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás. Goiânia (2016).
- [9] HAYNES, T.W.; HENNING, M. A. and van der MERWE, L. C. *Domination and total domination in complementary prisms*. J. Combin. Optimization, Springer Netherlands (2008).
- [10] HEDETNIEMI, S.; HEDETNIEMI, S.; KRISTIANSEN, P. *Alliances in graphs*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, vol. **48**, p. 157–177 (2004).
- [11] JAMIESON, L. *Algorithms and Complexity for Alliances and Weighted Alliances of Various Types*. All Dissertations, vol. **66** (2007).
- [12] ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*, 6 ed., São Paulo: McGraw-Hill, p. 589 – 675 (2009).
- [13] SHAFIQUE, K.H. *Partitioning a Graph in Alliances and its Application to Data Clustering*. PhD thesis, School of Computer Science, University of Central Florida, Orlando (2004).
- [14] SILVA, L. R. S. da. *Sobre Alianças Defensivas e Ofensivas Globais em Alguns Produtos de Grafos e Grafos Simpliciais*. Tese de Doutorado, 67p. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás. Goiânia (2015).
- [15] YERO, I. G; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ. *Defensive alliances in graphs: a survey*. Departamento de Matemáticas, Escuela Politécnica Superior de Algeciras, Universidad de Cádiz. Espanha (2013).

Rafael de Castro Freitas cursa Sistemas de Informação no Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás.

Elisângela Silva Dias possui Doutorado em Ciência da Computação pela Universidade Federal de Goiás e atualmente é Professora e Coordenadora do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação no Instituto de Informática da mesma.