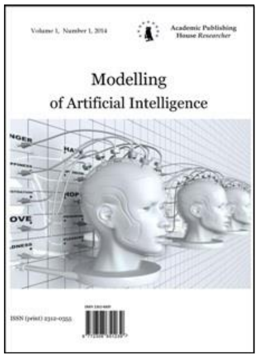
Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.
ISSN: 2312-0355
E-ISSN: 2413-7200
2017, 4(1): 21-28

DOI: 10.13187/mai.2017.1.21
www.ejournal11.com



Specification of a Stochastic Production Function Model in the Extended Class of Stochastic Frontier Models

Victoria A. Rudenko [a, *], Sergey A. Aivazyan [a], Mikhail Y. Afanasyev [a]

[a] CEMI RAS, Moscow, Russian Federation

Abstract

Copulas are being successfully applied for derivation of estimates in the models related to stochastic production functions. They can be used for handling of panel data, for the analysis of models with multiple outputs and for improvement of estimates in classical models.

The research proposes an algorithm for specification of extended class of models for stochastic production functions where a possible dependence between the error components is assumed. To describe this dependence we consider two functions: normal copula and Frank copula. Simulated data are used to prove the necessity to take into account potential dependence between the error components and to illustrate the importance of considering several types of copulas for different problems related to estimation of technical efficiency. In addition we analyze an influence of the choice of copula type on estimates of main parameters in the model and propose possible problems where classical models for stochastic production function can be applied.

Keywords: specification, dependence of random values, copulas, stochastic production function, technical efficiency.

1. Введение

В работе будут рассмотрены трехфакторные модели производственной функции следующего вида:

$$R_i = \beta_0 \cdot (K_i)^{\beta_1} \cdot (L_i)^{\beta_2} \cdot (I_i)^{\beta_3} \cdot e^{V_i - U_i}, \qquad i = 1,\dots,n,$$

где R_i – объем производства i-ой компании, K_i и I_i – объемы физического и интеллектуального капиталов соответственно, L_i – объем труда, n – число компаний в выборке. Случайные компоненты $V_i \sim N(0;\sigma_V^2)$ и $U_i \sim N^+(\mu;\sigma_U^2)$ могут быть статистически зависимы.

Описание процесса моделирования данных, подлежащих оцениванию, можно найти в (Aivazyan et al., 2014). Мы будем использовать несколько смоделированных наборов случайных величин V_i и U_i с различными степенями зависимости.

Теоретические аспекты использования копула-функций представлены во многих работах (напр., Sklar, 1996; Айвазян, Фантаццини, 2014; Blagoveschensky, 2012). В данном

* Corresponding author
E-mail addresses: vika57vika@yandex.ru (V.A. Rudenko), aivazian@cemi.rssi.ru (S.A. Aivazyan), miafan@cemi.rssi.ru (M.Y. Afanasyev)

исследовании будут рассмотрены две копулы: нормальная (из класса эллиптических) и копула Франка (из класса архимедовых).

Плотность двумерной нормальной копула-функции имеет вид:

$$c^{Norm}(u_1,u_2)=\frac{1}{|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T(\Sigma^{-1}-\mathrm{I})\zeta\right),$$

где $\zeta=\left(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2)\right)^T$ – вектор, компонентами которого являются обратные функции одномерного стандартного нормального распределения,

$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix}$ – корреляционная матрица, I – единичная матрица.

Плотность копулы Франка задается формулой:

$$c^{Frank}(u_1,u_2,\alpha)=\frac{-\alpha(e^{-\alpha}-1)e^{-\alpha(u_1+u_2)}}{\left((e^{-\alpha u_1}-1)(e^{-\alpha u_2}-1)+e^{-\alpha}-1\right)^2},\quad \alpha\neq 0.$$

Если $f_V(x)$ и $f_U(y)$ – одномерные плотности распределения величин V_i и U_i соответственно, а $F_V(x)$, $F_U(y)$ – соответствующие функции распределения, то совместная плотность распределения величин V_i и U_i выражается следующим образом:

$f^N(x,y)=c^{Norm}(F_V(x),F_U(y))\cdot f_V(x)\cdot f_U(y)$ – для нормальной копулы,

$f^F(x,y)=c^{Frank}(F_V(x),F_U(y))\cdot f_V(x)\cdot f_U(y)$ – для копулы Франка.

Так как параметры копул r и α принадлежат разным диапазонам значений, в качестве показателя степени зависимости компонент ошибки удобнее рассматривать коэффициент корреляции Спирмена ρ, который можно вычислить с их помощью (Smith, 2008).

Мы будем использовать следующие обозначения для полученных в ходе исследования моделей:

- M_1 – классическая модель стохастической производственной функции, в которой предполагается, что $U_i\sim N^+\left(0;\sigma_U^2\right)$, и случайные величины V_i и U_i являются независимыми;
- M_r – модель, в которой зависимость между случайными величинами $V_i\sim N\left(0;\sigma_V^2\right)$ и $U_i\sim N^+\left(\mu;\sigma_U^2\right)$ описывается с помощью нормальной копулы с коэффициентом зависимости $r\in[-1,1]$;
- M_α – модель, в которой зависимость между случайными величинами $V_i\sim N\left(0;\sigma_V^2\right)$ и $U_i\sim N^+\left(\mu;\sigma_U^2\right)$ описывается с помощью копулы Франка с коэффициентом зависимости $\alpha\in(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$.

Для каждой из них рассчитаем оценки технической эффективности $T\hat{E}_1$, $T\hat{E}_r$ и $T\hat{E}_\alpha$ соответственно, в общем случае имеющие вид $T\hat{E}_i=E\left(e^{-U_i}\,|\,V_i-U_i\right)$. Вывод о корректности оценок технической эффективности будет сделан на основе сравнения их с истинными значениями e^{-U_i}, полученными по данным моделирования.

Пусть $\rho=\rho(V_i,U_i)$ – истинное значение коэффициента корреляции Спирмена между компонентами ошибки, выбранное при моделировании,

$\hat{\rho}=\hat{\rho}(V_i,U_i)$ – оценка коэффициента корреляции Спирмена между компонентами ошибки,

$\hat{s} = \hat{s}(T\hat{E}_i, e^{-U_i})$ – оценка коэффициента корреляции между полученными при построении модели техническими эффективностями $T\hat{E}_i$ и истинными значениями эффективности e^{-U_i}.

Способ проверки гипотезы о равенстве нулю коэффициента нормальной копулы r или близости нулю коэффициента копулы Франка α можно найти в (Aivazyan et al., 2014).

2. Результаты и обсуждение

Ниже представлены результаты эмпирического анализа, полученные для каждой из рассматриваемых моделей при различных значениях коэффициента ρ. Объем выборки n во всех случаях был равен 80.

В Таблице 1 приведены результаты оценки параметров при моделировании с высокими коэффициентами корреляции $\rho = 0.94$ и $\rho = 0.79$.

В последней строке таблицы представлены результаты проверки гипотез о равенстве (близости) нулю коэффициентов соответствующих копула-функций.

Таблица 1. Результаты, полученные при высоких степенях корреляции

Значения ρ	$\rho = 0.94$			$\rho = 0.79$		
Сравниваемые модели	M_1	M_r	M_α	M_1	M_r	M_α
Оценки параметров факторов производства						
$\ln K$	0.648	**0.66**	0.661	0.644	0.656	**0.658**
$\ln L$	0.227	**0.217**	0.219	0.229	0.222	**0.219**
$\ln I$	0.143	**0.144**	0.142	0.172	0.166	**0.167**
const	0.94	**0.99**	0.98	1.97	1.99	**2.00**
Оценки параметров компонент ошибки						
$\hat{\mu}$	0	**-0.871**	-0.854	0	0.082	**0.084**
$\hat{\sigma}_V$	0.134	**0.66**	0.857	0.196	0.528	**0.542**
$\hat{\sigma}_U$	0.507	**0.884**	0.957	0.422	0.375	**0.363**
$\hat{\rho}$	0	**0.966**	0.991	0	0.919	**0.989**
Диапазон значений эффективностей	(0.27; 0.95)	(0.43; 0.99)	(0.30; 0.97)	(0.33; 0.95)	(0.45; 0.99)	(0.45; 0.98)
$\hat{s}(T\hat{E}, e^{-U})$	-0.92	**0.93**	0.97	-0.64	0.66	**0.65**
Логарифм функц. правд.	−20.78	**–19.59**	-19.75	-20.81	-20.49	**-19.06**
$H_r: \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ \text{или} \\ \alpha \to 0 \end{array}\right.$		**отв.**	отв.		прин.	**отв.**

Видим, что в каждом случае оценки параметров основных факторов производства близки в рассмотренных моделях. Оценки параметров компонент ошибки в модели M_1 значительно отличаются от оценок в моделях M_r и M_α, которые, в свою очередь, хорошо согласуются между собой. Но несмотря на это, логарифмы функций правдоподобия в моделях с использованием копул могут значимо отличаться, что свидетельствует о необходимости рассмотрения нескольких видов копул для решения задач, связанных с оценкой технической эффективности. Так, в столбцах, соответствующих $\rho = 0.94$, приведенные значения логарифмов функций правдоподобия в моделях M_r и M_α в достаточной степени отличаются от логарифма правдоподобия M_1, что позволяет отклонить гипотезу о равенстве (близости) нулю коэффициента зависимости в обеих копулах. Однако в случае примера с $\rho = 0.79$ существенное отличие имеется только в модели с копулой Франка, хотя результаты, полученные с помощью обеих копул, согласованы друг с другом.

Анализ современной литературы по применению копула-функций в моделях стохастической границы показал, что наиболее часто при оценке параметров в моделях с использованием различных копул полученный коэффициент корреляции $\hat{\rho}$ не принимает экстремально высоких значений. В Таблице 2 приведены результаты оценки параметров при моделировании с небольшими значениями коэффициента корреляции $\rho = 0.39$ и $\rho = 0.16$.

Таблица 2. Результаты, полученные при низких степенях корреляции

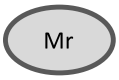
Значения ρ	$\rho = 0.39$			$\rho = 0.16$		
Сравниваемые модели	M_1	M_r	M_α	M_1	M_r	M_α
Оценки параметров факторов производства						
$\ln K$	0.690	0.694	0.691	0.806	**0.802**	0.802
$\ln L$	0.216	0.212	0.215	0.123	**0.125**	0.126
$\ln I$	0.145	0.144	0.145	0.137	**0.140**	0.139
const	1.427	1.491	1.445	1.77	**1.78**	1.78
Оценки параметров компонент ошибки						
$\hat{\mu}$	0	0.062	0.030	0	**0.029**	0.030
$\hat{\sigma}_V$	0.354	0.365	0.358	0.275	**0.267**	0.267
$\hat{\sigma}_U$	0.023	0.022	0.009	0.644	**0.646**	0.645
$\hat{\rho}$	0	0.472	0.557	0	**-0.011**	-0.041
Диапазон значений эффективностей	(0.981; 0.983)	(0.912; 0.965)	(0.962; 0.979)	(0.23; 0.89)	(0.23; 0.89)	(0.23; 0.89)
$\hat{s}(T\hat{E}, e^{-U})$	-0.15	0.13	**0.17**	0.36	**0.36**	0.36
Логарифм функц. правд.	-30.42	-29.79	**-29.68**	-52.11	**-52.05**	-52.05
$H_r : \begin{cases} r = 0 \\ \text{или} \\ \alpha \to 0 \end{cases}$		прин.	**прин.**		**прин.**	прин.

Как видно из столбца M_1, при смоделированном коэффициенте $\rho = 0.39$, диапазон значений полученных без учета копула-функций оценок технической эффективности очень маленький. Это связано с тем, что в данной модели принимается гипотеза об отсутствии неэффективности. В соответствии с методикой, предложенной в (Aivazyan et al., 2012) в этом случае следует рассмотреть классическую модель регрессии без компоненты неэффективности. Однако так как при проведении вычислений было установлено, что оценки параметров практически не отличаются, мы приводим данные по модели M_1, позволяющей найти ранги технических эффективностей. При проверке гипотезы H_r были получены следующие значения статистик: для нормальной копулы $Lr = 2(\ln L(H_r^A) - \ln L(H_r)) = 1.270$, а для копулы Франка $Lr = 2(\ln L(H_r^A) - \ln L(H_r)) = 1.492$. Критический уровень квантиля $\chi^2_{1-2\alpha}(1) = 1.6424$ при уровне значимости 0.1 больше каждого из них. Таким образом, гипотезу H_r следует принять в обоих случаях, но в силу слабого отличия найденных значений статистик от критического уровня, при решении конкретных исследовательских задач имеет смысл провести повторный анализ с использованием других видов копула-функций, соответствующих тем или иным целям исследования.

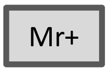
В случае, соответствующем значению $\rho = 0.16$, гипотеза о нулевых коэффициентах зависимости для обеих копул также принимается, причем различие в логарифмах функций правдоподобия незначительное. Кроме того, проведенные в ходе исследования вычисления указывают на то, что при слабой корреляции компонент ошибки использование нормальной копулы и копулы Франка позволяет получить оценки параметров, близкие к оценкам классической модели M_1, но не увеличивает существенно степень согласованности оценок технической эффективности с истинными значениями.

В работе (Aivazyan et al., 2012) была предложена схема спецификации классической модели стохастической производственной функции в предположении независимости компонент ошибки. Приведенные выше данные эмпирического анализа, а также другие выполненные в ходе исследования вычисления, свидетельствуют о необходимости ее расширения для случая возможной зависимости компонент при отсутствии информации о факторах эффективности.

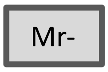
Будем использовать следующие дополнительные обозначения*:



– вычисление оценок модели из расширенного класса с учетом коэффициента зависимости выбранной копулы†,

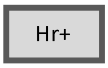


– в модели с копулой удалось получить оценки,

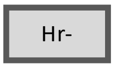


– в модели с копулой не удалось получить оценки (вследствие специфики состава выборочных данных, проблем неидентифицируемости и т.п.),

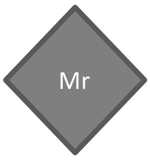
– применение процедуры проверки гипотезы H_r, скорректированной для выбранной копулы, против альтернативной H_r^A,



– в результате проверки гипотеза H_r не отвергается,



– в результате проверки гипотеза H_r отвергается в пользу альтернативы H_r^A,



– выбор модели с копулой в качестве результирующей.

В соответствии с целями данного исследования мы не рассматриваем случай наличия информации о факторах эффективности, от которых может значимо зависеть компонента U_i. При этом важно отметить, что проведенные дополнительные вычисления позволяют сформулировать предположение о том, что при наличии значимых факторов эффективности в моделях с копулами коэффициент зависимости компонент V_i и U_i близок к нулю. Этот факт, в свою очередь, свидетельствует о возможности применения классических моделей в предположении независимости компонент ошибки при решении ряда задач, связанных с использованием факторов эффективности.

* Обозначения, не приведенные в списке, можно найти в работе (Aivazyan et al., 2012).

† В обозначении приведена модель M_r для наглядности, вместо нее возможно использование любой копулы.

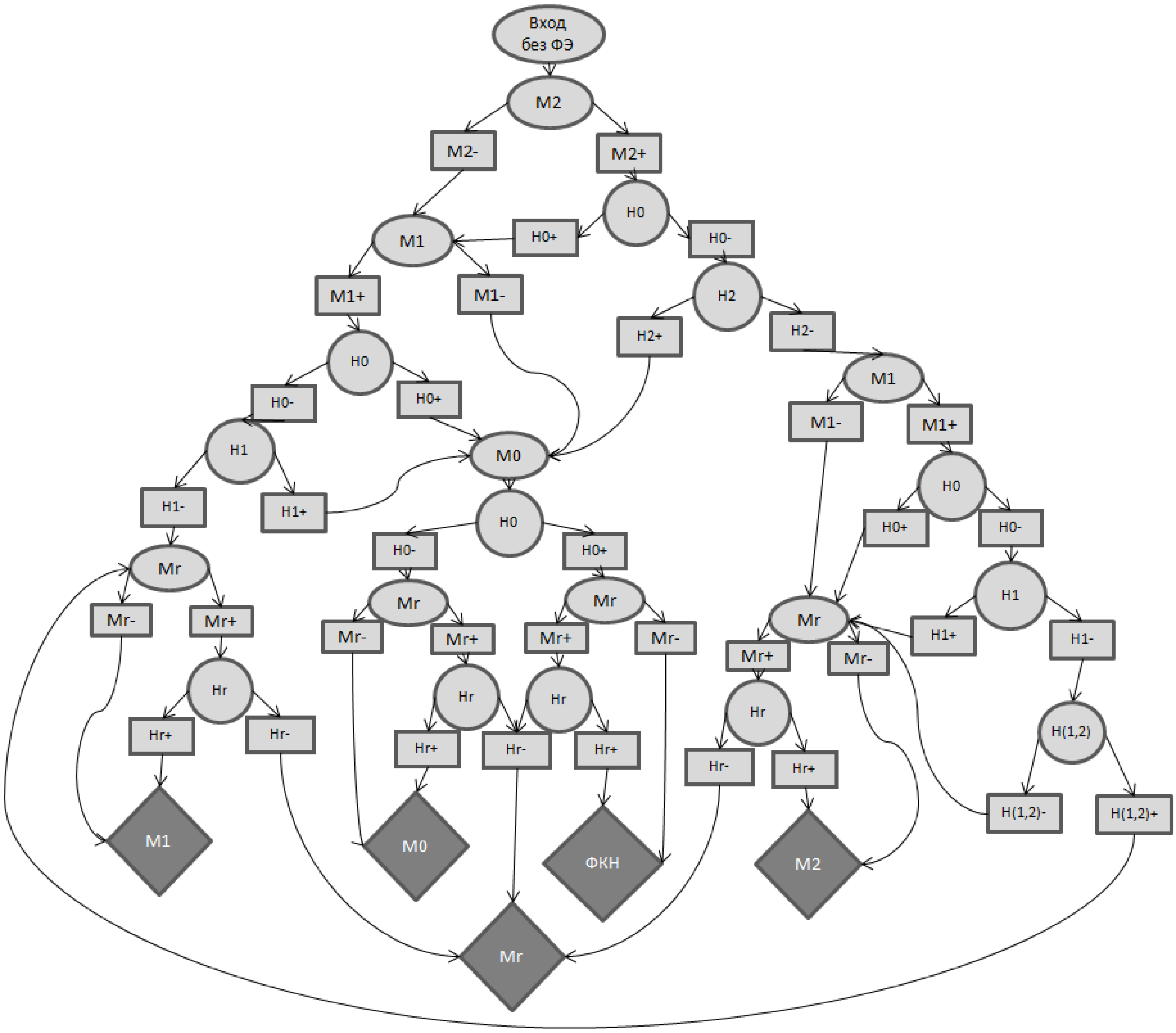


Рис. 1. Схема спецификации модели внутри расширенного класса при отсутствии информации о факторах эффективности.

3. Выводы

В соответствии с приведенными результатами исследования можно сделать следующие выводы:

1. При решении задач, связанных с оценкой технической эффективности, в случае отсутствия статистического или какого-либо иного обоснования некоррелированности компонент ошибки в модели стохастической производственной функции, вычисления и анализ следует проводить в соответствии с расширенной схемой спецификации модели.

2. В случае, когда в результате проведенного анализа значения функций правдоподобия модели с использованием копул оказались существенно выше значений правдоподобия классической модели, но недостаточно, чтобы отвергнуть гипотезу о незначимости коэффициента зависимости в копуле, следует рассмотреть другие виды копула-функций, выбор которых должен быть обусловлен целями исследования. Для каждой новой рассмотренной копулы следует заново проводить анализ в соответствии с расширенной схемой спецификации модели.

3. Возможно использование классической модели стохастической производственной функции для оценки параметров факторов производства и решения связанных с этим задач. Кроме того, гипотезу об отсутствии зависимости между компонентами ошибки допустимо принять в двух случаях: при наличии информации о значимых факторах эффективности, а

также в случае малых отличий величин функций правдоподобия в моделях с использованием копул и классической модели.

4. Аппарат копула-функций позволяет расширить диапазон значений оценок технической эффективности за счет введения дополнительного параметра зависимости компонент ошибки. Значения эффективностей зависят от выбора конкретной копулы, но их ранги являются в высокой степени согласованными.

4. Благодарности

Это исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 16-06-00361 А.

Литература

Айвазян, Фантаццини, 2014 – *Айвазян, С.А., Фантаццини, Д.* Методы эконометрики. М.: Магистр, 2014.

Aivazyan et al., 2012 – *Aivazyan S.A., Afanasiev M.Y., Rudenko V.A.* Some specification aspects for three-factor models of a company's production potential taking into account intellectual capital. *Applied econometrics,* 2012, №. 27 (3), pp. 36–69.

Aivazyan et al., 2014 – *Aivazyan S.A., Afanasiev M.Y., Rudenko V.A.* Analysis of dependence between the random components of a stochastic production function for the purpose of technical efficiency estimation. *Applied econometrics,* 2014, № 34 (2), pp. 3–18.

Amsler et al., 2009 – *Amsler Ch., Prokhorov A., Schmidt P.* Using copulas to model time dependence in stochastic frontier models. *Econometric Reviews*, 2009, № 33 (5-6), Special Issue in Honor of Les Godfrey.

Blagoveschensky, 2012 – *Blagoveschensky Y.N.* Basics of copula's theory. *Applied econometrics*, 2012, №26 (2), pp. 113-130.

Carta, Steel, 2012 – *Carta, A., Steel, M.F.G.* Modelling multi-output stochastic frontiers using copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2012, № 56 (11), pp. 3757-3773.

Lai, Huang, 2013 – *Lai, H.P., Huang, C.* Maximum likelihood estimation of seemingly unrelated stochastic frontier regressions. *Journal of Productivity Analysis*, 2013, № 40 (1), pp. 1-14.

Poonkham, Sriboonchitta, 2013 – *Poonkham K., Sriboonchitta S.* Efficiency of convention hotels in Thailand: An analysis using stochastic frontier with copula. *The Empirical Econometrics and Quantitative Economics Letters*, №2 (3), 2013, pp. 103–110.

Shi, Zhang, 2011 – *Shi, P., Zhang, B.* An Empirical Research on Technological Efficiency & its Influential Factors of Low Carbon Enterprises in China. *Management Science and Engineering,* 2011, № 5 (3), pp. 11-15.

Sklar, 1996 – *Sklar, A.* Random variables, distribution functions, and copulas: Personal look backward and forward. *Lecture notes. Monograph series*, 1996, № 28, pp. 1-14.

Smith, 2008 – *Smith, M.D.* Stochastic frontier models with dependent error components. *The Econometrics Journal*, 2008, № 11 (1), pp. 172–192.

References

Aivazyan, Fantatstsini, 2014 – *Aivazyan, S.A., Fantatstsini, D.* (2014). Metody ekonometriki [The methods of econometrics]. M.: Magistr.

Aivazyan et al., 2012 – *Aivazyan S.A., Afanasiev M.Y., Rudenko V.A.* (2012). Some specification aspects for three-factor models of a company's production potential taking into account intellectual capital. *Applied econometrics,* №. 27 (3), pp. 36–69.

Aivazyan et al., 2014 – *Aivazyan S.A., Afanasiev M.Y., Rudenko V.A.* (2014). Analysis of dependence between the random components of a stochastic production function for the purpose of technical efficiency estimation. *Applied econometrics,* № 34 (2), pp. 3–18.

Amsler et al., 2009 – *Amsler Ch., Prokhorov A., Schmidt P.* (2009). Using copulas to model time dependence in stochastic frontier models. *Econometric Reviews*, № 33 (5-6), Special Issue in Honor of Les Godfrey.

Blagoveschensky, 2012 – *Blagoveschensky Y.N.* (2012). Basics of copula's theory. *Applied econometrics*, №26 (2), pp. 113-130.

Carta, Steel, 2012 – *Carta, A., Steel, M.F.G.* (2012). Modelling multi-output stochastic frontiers using copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, № 56 (11), pp. 3757-3773.

Lai, Huang, 2013 – *Lai, H.P., Huang, C.* (2013). Maximum likelihood estimation of seemingly unrelated stochastic frontier regressions. *Journal of Productivity Analysis*, № 40 (1), pp. 1-14.

Poonkham, Sriboonchitta, 2013 – *Poonkham K., Sriboonchitta S.* (2013). Efficiency of convention hotels in Thailand: An analysis using stochastic frontier with copula. *The Empirical Econometrics and Quantitative Economics Letters*, №2 (3), pp. 103–110.

Shi, Zhang, 2011 – *Shi, P., Zhang, B.* (2011). An Empirical Research on Technological Efficiency & its Influential Factors of Low Carbon Enterprises in China. *Management Science and Engineering*, № 5 (3), pp. 11-15.

Sklar, 1996 – *Sklar, A.* (1996). Random variables, distribution functions, and copulas: Personal look backward and forward. *Lecture notes. Monograph series*, № 28, pp. 1-14.

Smith, 2008 – *Smith, M.D.* (2008). Stochastic frontier models with dependent error components. *The Econometrics Journal*, № 11 (1), pp. 172–192.

Спецификация модели стохастической производственной функции в расширенном классе моделей

Виктория Алексеевна Руденко [a,*], Сергей Арутюнович Айвазян [a], Михаил Юрьевич Афанасьев [a]

[a] ЦЭМИ РАН, г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. На сегодняшний день аппарат копула-функций успешно используется для получения оценок в моделях стохастической производственной функции. Его применяют при работе с панельными данными (Amsler et al., 2009; Shi, Zhang, 2011), для анализа моделей с множеством выпусков (Lai, Huang, 2013; Carta, Steel, 2012), для улучшения оценок в классических моделях (Smith, 2008; Poonkham, Sriboonchitta, 2013).

В работе предложена схема спецификации расширенного класса моделей стохастической производственной функции, внутри которого допускается возможная зависимость случайных составляющих ошибки. Зависимость компонент описана с помощью двух копула-функций: нормальной и копулы Франка. На смоделированных данных доказана не только необходимость учета возможной зависимости компонент, но и значимость использования нескольких видов копул при решении различных задач, связанных с оценкой технической эффективности. Кроме того, рассмотрено влияние выбора копула-функции на оценки основных параметров модели и сформулированы возможные задачи, для решения которых могут использоваться классические модели стохастической производственной функции.

Ключевые слова: спецификация, зависимость случайных величин, копула-функции, стохастическая производственная функция, техническая эффективность.

* Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: vika57vika@yandex.ru (В.А. Руденко), aivazian@cemi.rssi.ru (С. А. Айвазян), miafan@cemi.rssi.ru (М.Ю. Афанасьев)