SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2016 Issue: 4 Volume: 36

Published: 30.04.2016 http://T-Science.org

Yunona Rinatovna Krakhmaleva
candidate of technical Sciences,
associate Professor of Mathematics,
Taraz state University named after M.Kh. Dulati,
Kazakhstan
yuna_kr@mail.ru

Andrey Titovets
master 2-year degree in Mathematics
Taraz state University named after M.Kh. Dulati,
Kazakhstan

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

TO THE QUESTION OF REDUCTION TO A CANONICAL FORM DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN MAPLE

Abstract: *The article discusses some issues of analysis of differential equations with variable coefficients.*

Key words: *Maple, analysis, type, equation.*
Language: *Russian*
Citation: Krakhmaleva YR, Titovets A (2016) TO THE QUESTION OF REDUCTION TO A CANONICAL FORM DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN MAPLE. ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (36): 197-200.
Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-36-34 ***Doi***: crossref http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.04.36.34

К ВОПРОСУ О ПРИВЕДЕНИИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СРЕДЕ MAPLE

Аннотация: *В статье рассматриваются некоторые вопросы анализа дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.*

Ключевые слова: *Maple, анализ, вид, уравнение.*

При составлении математической программы приведения к каноническому виду дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами в среде Maple 17 используются стандартные средства программы, такие как mapde (__, canom), mapde (__, canop), которые дают возможность создать универсальный алгоритм. При приведении к каноническому виду дифференциального уравнения в частных производных с переменными коэффициентами их задействовать возможно только, когда исходные уравнения довольно «простые». И хотя для работы с дифференциальными уравнениями в частных производных имеется достаточно большой набор инструментов пакета, математическая программа приведения к каноническому виду дифференциального уравнения в частных производных с переменными коэффициентами представляет сложную задачу.

Рассмотрим линейное уравнение в частных производных с переменными коэффициентами:

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y^2}+a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+a_0(x,y)u+d=0 \quad ,$$

где $u=u(x,y)$ - неизвестна функция.

Как известно, при классификации типов уравнений в частных производных вычисляют определитель ΔA квадратичной формы:

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y^2}=0$$

знак которого определяет тип рассматриваемого уравнения: если $\Delta A>0$, то уравнение эллиптического типа; если $\Delta A<0$ то уравнение гиперболического типа; если $\Delta A = 0$, то уравнение параболического типа:

```
a11 := _; b := _ : a22 := `___`; a1 := _; a2 := _; a0 := _; d := _; a12 := b/2;
PDE1 := a11·diff(u(x, y), x, x) + 2 ·a12·diff(u(x, y), x, y) + a22
   ·diff(u(x, y), y, y) + a1·diff(u(x, y), x) + a2·diff(u(x, y), y) + a0
   ·u(x, y) + d = 0;
dt := a12^2 − a11·a22;
if (dt > 0) then uravnenie giperbolicheskogo tipa; fi;
if (dt < 0) then uravnenie elipticheskogo tipa; fi;
if (dt = 0) then uravnenie parabolicheskogo tipa; fi;
```

При составлении программ приведения дифференциального уравнения в частных производных с переменными коэффициентами к каноническому виду средствами Maple многие разработчики предлагают не использовать выше написанную классификацию, а определять тип уравнений по характеристикам. Матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

при этом, очень удобно использовать для составления уравнения характеристик:

$$a_{11}(x,y)dy_2 - 2a_{12}(x,y)dydx + a_{22}(x,y)dx^2 = 0$$

Для наглядности покажем на примере дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

```
a11 := 1; b := -2 : a22 := -3; a1 := 0; a2 := 1; a0 := 0; d := 0; a12 := b/2; a12 = a21;
PDE1 := a11·diff(u(x, y), x, x) + 2·a12·diff(u(x, y), x, y) + a22
   ·diff(u(x, y), y, y) + a1·diff(u(x, y), x) + a2·diff(u(x, y), y) + a0
   ·u(x, y) + d = 0;
a21 := a12;
A11 := a11; A12 := a12; A21 := a21; A22 := a22;
AA := matrix(2, 2, [A11, A12, A21, A22]);
dtAA := det(AA);
XX1 := A11·r·r − 2·A12·r + A22;
XX2 := solve(XX1);
y1 := XX2[1];
y2 := XX2[2];
XX3 := dsolve(diff(y(x), x) = y1);
XX4 := dsolve(diff(y(x), x) = y2);
```

$$a1 := 1$$
$$a22 := -3$$
$$a1 := 0$$
$$a2 := 1$$
$$a0 := 0$$
$$d := 0$$
$$a12 := -1$$
$$-1 = a21$$
$$PDE1 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) - 2\left(\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} u(x,y)\right) - 3\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = 0$$
$$a21 := -1$$
$$A11 := 1$$
$$A12 := -1$$
$$A21 := -1$$

$$A22 := -3$$

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$dtAA := -4$$

$$XX1 := r^2 + 2r - 3$$

$$XX2 := 1, -3$$

$$y1 := 1$$

$$y2 := -3$$

$$XX3 := y(x) = x + \_C1$$

$$XX4 := y(x) = -3x + \_C1$$

Как видно, элементы матрицы используются для уравнения характеристик не определяя тип уравнения. Только значение детерминанта указывает для сведущего, что данное уравнение относится к гиперболическому типу.

Рассмотрим теперь этот же алгоритм на примере дифференциального уравнения в частных производных с переменными коэффициентами:

$$x\frac{\partial u}{\partial x^2} + 2(x+y)\frac{\partial u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$$

$a11 := x;\ b := 2(x+y) : a22 := y;\ a1 := 0;\ a2 := 0;\ a0 := 0;\ d := 0;\ a12 := \frac{b}{2};$

```
PDE1 := a11·diff(u(x, y), x, x) + 2·a12·diff(u(x, y), x, y) + a22
  ·diff(u(x, y), y, y) + a1·diff(u(x, y), x) + a2·diff(u(x, y), y) + a0
  ·u(x, y) + d = 0;
a21 := a12;
A11 := a11; A12 := a12; A21 := a21; A22 := a22;
AA := matrix(2, 2, [A11, A12, A21, A22]);
dtAA := det(AA);
XX1 := A11·r·r − 2·A12·r + A22;
XX2 := solve(XX1);
y1 := XX2[1];
y2 := XX2[2];
XX3 := dsolve(diff(y(x), x) = y1);
XX4 := dsolve(diff(y(x), x) = y2);
XX5 := solve(rhs(XX3), _C1);
```

$$a11 := x$$

$$a22 := y$$

$$a1 := 0$$

$$a2 := 0$$

$$a0 := 0$$

$$d := 0$$

$$a12 := x + y$$

$$PDE1 := x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) + 2(x+y)\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y)\right) + y\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) = 0$$

$$a21 := x + y$$

$$A11 := x$$

$$A12 := x + y$$

$$A21 := x + y$$

$$A22 := y$$

$$AA := \begin{bmatrix} x & x+y \\ x+y & y \end{bmatrix}$$

$$dtAA := -x^2 - x\,y - y^2$$

$$XX1 := x\,r^2 - 2\,(x+y)\,r + y$$

$$XX2 := \left\{ r = r, x = \frac{y\,(2\,r-1)}{r\,(r-2)}, y = y \right\}$$

$$y1 := r = r$$

$$y2 := x = \frac{y\,(2\,r-1)}{r\,(r-2)}$$

Определитель квадратичной формы представляет выражение, зависящее как от x, так и от y и которое требуется решить для определения типа исходного уравнения, не дойдя до самих характеристик. Следовательно, вызывает определенную трудность решение определителя квадратичной формы исходного уравнения, что и усложняет задачу приведения к каноническому виду дифференциального уравнения в частных прозводных с переменными коэффициентами.

References:

1. Bitsadze AV (1982) Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moscow: Nauka, 1982, -336p.
2. Vladimirov VS (1981) Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moscow: Nauka, 1981,-512p.
3. Mikhaylov VP (1983) Differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi. M.: Nauka, 1983, -424p.
4. Goloskokov DP (2004) Uravneniya matematicheskoy fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple uchebnik dlya vuzov - SPb.: Piter, 2004. -539p.
5. D'yakonov VP (2006) Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii Izd: Piter, 2006.
6. Savotchenko SE, Kuz'micheva TG (2001) S13 Metody resheniya matematicheskikh zadach v Maple: Uchebnoe posobie – Belgorod: Izd. Belaudit, 2001. – 116 p.
7. Kanatnikov AN, Krishchenko AP, Chetverikov VN (2000) Differentsial'noe ischislenie funktsiy mnogikh peremennykh.M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2000.— 456 p.
8. Sdvizhkov OA (2003) - Matematika na komp'yutere: Maple 8 [2003, DjVu, Rus] God vypuska: 2003 Izdatel'stvo: Solon-Press Seriya: Biblioteka studenta ISBN: 5-98003-039-5.