УДК 51-77: 519.252

ВОСПРОИЗВОДСТВО СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ И БРАКОВ. ВВЕДЕНИЕ

REPRODUCTION OF THE POPULATION AND MARRIAGE STRUCTURE. INTRODUCTION

©Сауханов Ж. К.
канд. экон. наук
Каракалпакский государственный университет
г. Нукус, Узбекистан, jsaukhanov@mail.ru
©Saukhanov Ja.
Ph.D., Karakalpak State University
Nukus, Uzbekistan, jsaukhanov@mail.ru
©Утемуратов Р. Б.
Каракалпакский государственный университет,
г. Нукус, Узбекистан, urv80@mail.ru
©Utemuratov R.
Karakalpak State University
Nukus, Uzbekistan, urv80@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается аналитическая модель воспроизводства населения, позволяющая прогнозировать как его половозрастную структуру, так и структуру браков.

Abstract. This article deals with the analytical model of reproduction the population allowing to predict as its gender and age structures as well as structures of marriages.

Ключевые слова: брак, воспроизводства, населения, модель, демография.

Keywords: marriage, reproduction, population model, demography.

1. Воспроизводство населения

Предположим, что в момент времени *t* известна плотность браков, длящихся время ι, между мужчиной возраста *x* и женщиной возраста у. обозначим эту плотность через $\omega(t,\tau,x,y)$. если она известна, то не представляет труда определить число пар, образуемых мужчинами возраста от *x* до *x+Δx* лет с женщинами в возрасте от у до *y+Δy* лет момент *t,* находящихся в браке в течение времени от *ι* до *ι+Δι*лет. Число таких браков

$$\omega(t,\tau,x,y)\Delta\tau\,\Delta x\,\Delta y+o(\Delta\tau\,\Delta x\,\Delta y)=\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\int_{x}^{x+\Delta x}\int_{y}^{y+\Delta y}\omega(t,\tau,x,y)d\tau\,dx\,dy.$$

Пусть $f(t,\tau,x,y)\Delta$ — количество рождений детей от момента $t-\Delta$ до*t,* приходящихся на один брак длительностью ι (от ι до *ι+Δι)* между мужчиной возраста *x* (от *x* до *x+Δx)* и женщиной возраста *y* (от *y* до *y+Δy).*

Замечание 1. В демографической статистике функция $f(t,\tau,x,y)$ называется брачной плодовитостью женщины [1] и обычно бывает известна.

Но вычисляется она в предположении, что $f(t,\tau,x,y)$ не зависит от параметров $\tau, x,$ т. е., что брачную плодовитость влияет лишь возраст женщины справедливо равенство $f(t,\tau,x,y)=f_1(t,y)$.

Пусть γ — доля родившихся мальчиков, а (1-γ) — девочек. Тогда число мальчиков $u(t,0)\Delta$, в момент *t* имеющих возраст от до Δ лет,

$$u(t,0)\Delta=\gamma\sum_{\iota}\sum_{x}\sum_{y} f(t,\tau,x,y)\Delta w(t,\tau,x,y)\Delta\iota\,\Delta x\,\Delta y, \tag{1}$$

а девочек $u(t,0)\Delta$ возраста от 0 до Δ лет

$$u(t,0)\Delta=(1-\gamma)\sum_{\iota}\sum_{x}\sum_{y} f(t,\tau,x,y)\Delta w(t,\tau,x,y)\Delta\iota\,\Delta x\,\Delta y. \tag{2}$$

При Δ→0, а также при $\Delta\iota,\Delta x,\Delta y\to 0$ получаем уравнение, связывающее плотности мальчиков и девочек с плотностями браков

$$u(t,0)\Delta=\gamma\int\int\int f(t,\tau,x,y)w(t,\tau,x,y)d\iota\,dx\,dy,$$

$$u(t,0)\Delta=(1-\gamma)\int\int\int f(t,\tau,x,y)w(t,\tau,x,y)d\iota\,dx\,dy. \tag{3}$$

Замечание 2. Естественным дальнейшим развитием уравнение (3) явилось бы введение функций $w(t,\tau,x,y)$, где *i* детей. Однако мы этого пока делать не будем, чтобы не увеличивать размерности модели.

2. Распадение браков

Рассмотрим уравнение распадения браков. Считается, что брак может прекратиться по трем причинам:

1) Расторжение брака — интенсивность $\mu_1(t,\tau,x,y)$;

2) Смерть мужа — интенсивность $\mu_2(t,\tau,x,y)$;

3) Смерть жены — интенсивность $\mu_3(t,\tau,x,y)$.

Под интенсивностью распадения браков понимается отношение прекратившихся по какой-либо причине браков за время от *t* до *t+Δt*к общему их числу на момент *t*, приходящееся на единицу времени, т.е.

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=\mu(t,\tau,x,y)=\frac{w(t,\tau,x,y)-w(t+\Delta,\iota+\Delta,x+\Delta,y+\Delta)}{w(t,\tau,x,y)}$$

Отсюда после умножения на $w(t,\tau,x,y)$ имеем уравнение

$$w(t+\Delta, \iota+\Delta, x+\Delta, y+\Delta) = w(t,\tau,x,y) - \mu(t,\tau,x,y)w(t,\tau,x,y), \qquad (4)$$

которое при $\Delta \to 0$ может быть приведено к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \iota} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\mu(t,\tau,x,y)w(t,\tau,x,y) = -[\mu_1(t,\tau,x,y) + \mu_2(t,\tau,x,y) + \mu_3(t,\tau,x,y)]w(t,\tau,x,y). \qquad (5)$$

Замечание 3. Предполагается, что функций $\mu_2(t,\tau,x,y)$ и $\mu_3(t,\tau,x,y)$, называемых обычно «силой» смертности мужчин и женщин, справедливы следующие равенства

$$\mu_2(t,\tau,x,y) = \mu_2^0(t,x), \qquad \mu_3(t,\tau,x,y) = \mu_3^0(t,x), \qquad (6)$$

т. е. считается, что сила смертности зависит лишь от возраста мужчины или женщины соответственно. Функция $\mu_1(t,\tau,x,y)$, как правило, обычно не известна. Публикуемые данные (например, [2, с. 50]) относятся и соотношению

$$1000\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \mu_1(t,\tau,x,y)\omega(t,\tau,x,y)d\tau\,dx\,dy}{\int_0^\infty U(t,x)dx + \int_0^\infty V(t,x)dy},$$

которые называют числом разводов, приходящихся на 1000 человек населения (величины U и V будут определены далее).

Горазда большую информацию о функции $\mu_1(t,\tau,x,y)$ несут таблицы данных о числе зарегистрированных разводов, распределенных по продолжительности брака и возрасту мужа и жены за время t (период длины Δ). Если параметры модели выбраны правильно, то величины

$$\int_1^{t+\Delta}\int_\iota^{\iota+\Delta}\int_x^{x+\Delta}\int_0^\infty \mu_1(t,\tau,x,y)\omega(t,\tau,x,y)dt\,d\tau\,dx\,dy,$$

$$\int_1^{t+\Delta}\int_\iota^{\iota+\Delta}\int_0^\infty\int_0^{y+\Delta} \mu_1(t,\tau,x,y)\omega(t,\tau,x,y)dt\,d\tau\,dx\,dy$$

должны быть близки к соответствующим числам таблицы [3].

Интенсивность разводов $\mu_1(t,\tau,x,y)$ можно было бы представить как $\sum_i \mu_{1i}$, где i — число детей в браке, т. е. учесть разные интенсивности разводов в зависимости от числа детей в браках.

3. Уравнения эволюции числа мужчин и женщин, не состоящих в браке

Рассмотрим теперь уравнения, отражающие эволюцию плотностей лиц, не состоящих в браке. Для простаты обозначим через $u(t,x)$ $[v(t,y)]$плотность не состоящих в браке мужчин (женщин) в момент t, находящихся в возрасте $x[y]$. Тогда число мужчин (женщин) в возрасте от x до $x+\Delta x$ лет (от y до $x+\Delta y$ лет) в момент t соответственно

$$\int_{x}^{x+\Delta x} u(t,x)dx = u(t,x)\Delta x + 0(\Delta x),$$

$$\int_{y}^{y+\Delta y} v(t,y)dy = v(t,y)\Delta y + 0(\Delta y).$$

В частности, при $x=0$ $(y=0)$ это будет количество рожденных мальчиков и девочек в интервале времени Δ, что уже встречалось в уравнениях (1)–(3).

Теперь легко получит плотность $U(t,x)$ всех мужчин, находящихся в момент *t* в возрасте *x*, которая состоит из суммы плотности $u(t,x)$ и плотности мужчин в браке

$$U(t,x) = u(t,x) + \int_{\tau=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty}\omega(t,\tau,x,y)\,d\tau\,dy. \tag{7}$$

Аналогично плотность $V(t,y)$ всех женщин возраста y в момент *t*

$$V(t,y) = v(t,y) + \int_{\tau=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty}\omega(t,\tau,x,y)\,d\tau\,dx. \tag{8}$$

Легко написать уравнения смертности, учитывая (6). Однако изменение численностей не состоящих в браке групп различных полов, а, следовательно, и плотностей *u* и *v* момент происходить как за счет смертности, интенсивность которой обозначим $\mu_4(t,x)$ для не состоящих в браке мужчин и $\mu_5(t,y)$ для не состоящих в браке женщин, так и за счет вступления в брак.

Увеличение количества не состоящих в браке мужчин и женщин (возрастов *x>0* и *y>0*) может быть следствием распадений браков или смертности одного из супругов.

Таким образом, и моменту $t+\Delta$

$$\begin{aligned} u(t+\Delta),x+\Delta)x\Delta &= u(t,x)\Delta x - \mu_4(t,x)\Delta u(t,x)\Delta x - \\ &- \sum_{y} w(t,0,x,y)\Delta x\,\Delta y + \sum_{\tau}\sum_{y}(\mu_1+\mu_3)\Delta w(t,\tau,x,y)\Delta\tau\Delta x\,\Delta y. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь можно рассмотреть уравнение для изменения плотностей $u(t,x)$.

После сокращения правой и левой частей (9) на Δx и деления на Δ, устремляя вначале Δy и Δτ, а затем и Δи 0, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\mu_4(t,x)u(t,x) - \int_{y=0}^{\infty} w(t,0,x,y)dy + \int_{\tau=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty}(\mu_1+\mu_3)w(t,\tau,x,y)d\tau\,dy. \tag{10}$$

Аналогично выводится уравнение для $v(t,y)$. После замены $u(t,x)$ на $v(t,y)$, μ_4 на μ_5 и μ_3 на μ_2 получим

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\mu_5(t,x)v(t,x)-\int_{x=0}^{\infty}w(t,0,x,y)dy+\int_{\tau=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}(\mu_1+\mu_2)w(t,\tau,x,y)d\tau\,dx. \qquad (11)$$

Замечание 4. В рамках настоящей модели не представляет труда выделить плотности разведенных и вдовых мужчин и женщин, но мы этого пока не будем делать. Более того, учитывая замечание 2, можно установить число разведенных и вдовых супругов, имеющих *i* детей.

4. Уравнение воспроизводства браков

Попытаемся определить приращение плотности (числа) браков. Очевидно, интенсивность заключение браков зависит от очень многих факторов. Не имея целью в настоящей работе обсуждать их, выделим те, без учета которых нам не удалось бы преодолеть затруднения в построение чисто демографической модели. Далее будем говорить о «желание» вступить брак и о «выборе» не возникают сами по себе, а определяются объективными процессами (биологическими, историческими, социально–культурными и экономическими). Учитывая сказанное, эти сами по себе спорные термины «желание» и «выбор» будут употребляется в чисто вспомогательном смысле.

Итак, в первом приближении будем считать, что интенсивность заключения браков зависит от: а) наличия побуждающих причин, которое выражает в желании вступить в бра и характеризуется функцией ориентации (гипотеза 1); б) уверенности в правильном выборе супруга, которая характеризуется функцией выбора (гипотеза 2); в) возможности встречи, отражаемой в интенсивности встреч (гипотеза 3).

Все эти причины в свою очередь обусловлены долей не состоящих в браке мужчин и женщин. Поэтому нас будет интересовать доля лиц, состоящих в браке в момент *t*. Обозначим через $\alpha_1(t,x)[\alpha_2(t,y)]$ долю мужчин (женщин) в возрасте *x[y]*, состоящих в браке в момент *t*. Тогда легко определить, что

$$\alpha_1(t,x)=\frac{U(t,x)-u(t,x)}{U(t,x)},\ \alpha_2(t,y)=\frac{V(t,y)-v(t,y)}{V(t,y)}\ .$$

Одной из причин заключения новых браков является пример сверстников, но это не всегда. Естественно полагать, что среди представителей данного возраста одна часть ориентируется на сверстников, другая — на людей старшего или младшего возраста и т. д. Это позволяет, как будет видно из дальнейшего, моделировать ряд ситуаций воспроизводства браков, не выходя за рамки предлагаемой модели (т. е. без экзогенных факторов). Именно такая возможность в определенной степени оправдывает наше предположение. Несмотря на сделанные оговорки, все-таки будем считать, что справедливо следующая гипотеза.

Гипотеза 1. Существуют функции ориентации: $\beta_1(t,x,z)$ — для мужчин, $\beta_2(t,y,z)$ — для женщин такие, что $\int_0^{\infty}\beta_i(t,x,z)dz=1,\ \beta_i(t,x,z)\geq 0$ для любых значений t и $x\geq 0$, которые показывают долю мужчин $\beta_1(t,x,z)\Delta z$ возраста *x* или долю женщин $\beta_2(t,y,z)\Delta z$ возраста *y*, ориентирующихся на мужчин (женщин) от *z* до *z+Δz* лет. Тогда среди всех не состоящих в браке мужчин (женщин) доли желающих вступить в брак в возрасте *x(y)*

$$a_1(t,x) = \int_0^\infty \alpha_1(t,z)\beta_1(t,x,z)dz,$$
$$a_2(t,y) = \int_0^\infty \alpha_2(t,z)\beta_2(t,x,z)dz. \qquad (12)$$

Отсюда следует, что плотность мужчин (женщин), стремящихся вступить в брак $a_1(t,x)\,u(t,x)[a_2(t,y)\,v(t,y)]$.

Пусть $r_1(t,x,y)\Delta y$ — долю мужчин возраста *x*, имеющих намерение жениться на женщине возраста от у до *y+Δy,* а $r_2(t,x,y)$ — долю женщин возраста *y*, имеющих намерение выйти замуж за мужчину возраста *x*. Так как рассматриваются только желающие вступить в брак, то $0 \le r_i(t,x,y) \le 1,\ i = 1{,}2.$ Естественно, что функции r_1 и r_2 не являются симметричными по *x* и *y*, кроме того, они могут зависеть от времени *t*.

Гипотеза 2. Выбор происходит в соответствии с функциями r_1 и r_2, т. е. зависит только от возраста потенциальных супругов. Если выполнены гипотеза 1 и 2, то функции r_1 и r_2, β_1 и β_2 отображают все необходимые социально–экономические факторы.

В соответствии с этими гипотезами максимальное число брачных пар между мужчинами от *x* до *x+Δx*, лет и женщинами возраста от до у+Δу, которые могут образоваться за некоторое время: $\min[a_1 u(t,x) r_1(t,x,y); a_2 v(t,y) r_2(t,x,y)]\Delta x \Delta y$.

Пусть справедливо следующее предположение.

Гипотеза 3. Число образовавшихся брачных пар пропорционально (с коэффициентом *c(t)*) возможному (максимальному) числу браков длительности интервала времени Δ. Тогда число браков продолжительностью от 0 до Δ между мужчинами в возрасте от *x* до *x+Δx* и женщинами в возрасте от *y* до *y+Δy* в момент времени *t*.

$$w(t,0,x,y)\Delta\Delta x\Delta y = c(t)\ \min[a_1(t,x)u(t,x)\,r_1(t,x,y);\ a_2(t,y)v(t,y)\,r_2(t,x,y)]\Delta\Delta x\Delta y$$

После сокращения этого выражения на *ΔΔxΔy* имеем соотношение для плотностей

$$w(t,0,x,y) = c(t)\ \min[a_1(t,x)u(t,x)r_1(t,x,y);\ a_2(t,y)v(t,y)r_2(t,x,y)]\,. \qquad (13)$$

Замечание 5. Для уточнения некоторых параметров модели, например, *c(t),* могут служить публикуемые данные о числе браков, заключенных в течение времени τ на 1000 человек населения. В рамках настоящей модели это соотношение получается таким образом:

$$1000 \cdot \frac{\int_0^\tau \int_0^\infty \int_0^\infty w(t,\tau,x,y)\,d\tau\,dx\,dy}{\int_0^\infty U(t,x)dx + \int_0^\infty V(t,y)dy}.$$

Гораздо большую информацию о функциях β и r несут таблицы данных о браках по возрасту жениха и невесты, заключенных в году t (за период времениΔ). Если параметры модели выбраны правильно, то величины

$$\int_t^{t+\Delta}\int_x^{x+\Delta x}\int_y^{y+\Delta y} w(t,0,x,y)\,dt\,dx\,dy$$

Должны быть близки к соответствующим числам, стоящим в таблице (см., например, [2, с. 89]).

При образовании брачных пар можно было бы учесть также, имеются ли дети у какого-либо из будущих супругов. Для этого нужны функции $u_i(x)\left[v_j(y)\right]$ — плотностей мужчин с i=1, 2, … детьми (женщин с j=1, 2, … детьми) и несколько функций выбора r_1 и r_2, но уже при нескольких $c_{ij}(t)$ получается достаточно сложное выражение для плотности вновь образовавшихся браков с $(i+j)$ детьми

$$w_{i+j}(t,0,x,y)=\sum_{i=0}\sum_{j=0} c_{ij}(t)\min\left[a_1\,r_1\,u_i\,;\;a_2\,r_2\,v_j\right]$$

5. Модели воспроизводства браков и населения

Рассмотрим основные уравнения воспроизводства браков и населения в непрерывном и дискретном времени и начальные данные, необходимые для определения важнейших функций. Основными соотношениями модели являются уравнения распадения браков и эволюции не состоящих в браке мужчин и женщин, т. е. уравнения (5), (10), (11)

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial \tau}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}=-\mu w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=-\mu_4 u-\int_0^\infty w(t,0,x,y)dy+\int_0^\infty\int_0^\infty(\mu_1+\mu_3)w(t,\tau,x,y)d\tau\,dy\ , \qquad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\mu_5 v-\int_0^\infty w(t,0,x,y)dx+\int_0^\infty\int_0^\infty(\mu_1+\mu_2)w(t,0,x,y)d\tau\,dx$$

которые нужно решить в области $D=\{t\ge 0,\ \tau>0,\ x>0, y>0\}$. Если известно решение системы (14), т. е. $\{w,u,v\}$, то известны соотношения между мужчинами и женщинами, состоящими и не состоящими в браке, поэтому далее будем называть набор $\{w,u,v\}$ брачной структурой, а уравнения (14) — уравнениями брачной структуры.

Если $t=0$ — момент переписи населения, то можно найти некоторые начальные данные для решения уравнений (14), а именно функции

$$h(x)=u(t=0,x),$$

$$g(x)=v(t=0,x). \qquad (15)$$

Допустим, что имеется возможность определить и функцию

$$W(\tau,x,y)=w(t=0,\tau,x,y). \qquad (15')$$

Начальные данные (15) и (15') позволяют найти решение системы (14) только в области $\tau \geq t$, $x \geq t$, $y \geq t$. Для решения уравнений (14) во всей области D необходимо начальные данные (15) и (15') дополнить уравнениями воспроизводства населения (3) и браков (13), а именно

$$u(t,0)=\gamma\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\tau,x,y)\omega(t,\tau,x,y)d\tau\,dx\,dy\ ,$$

$$v(t,0)=(1-\gamma)\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\tau,x,y)\omega(t,\tau,x,y)d\tau\,dx\,dy\ ,$$

$$w(t,0,x,y)=c(t)\ \min\left[a_1(t,x)r(t,x)r_1(t,x,y)u(t,x);\ a_2(t,y)\,r_2(t,x,y)v(t,y)\right].\ (16)$$

Если сделать вполне естественное предположение, что

$$f(t,\tau,x,y)=0\ \textit{при}\ 0\le x<x_0\ ,0\le y<y_0$$

и, например, $a_1(t,x)=0$ и $a_2(t,y)=0$ при $0\le x<x_0$, $0\le y<y_0$, то этого вполне достаточно, чтобы решать уравнения эволюции брачной структуры во всей области D.

Рассмотрим теперь уравнения в дискретном времени, которые более удобны для расчетов (при этом, однако, нарушаются условия ординарности процесса. Так, за единицу времени теперь могут произойти некоторые пары событий — заключенные браке и рождение ребенка, рождение ребенка и смерти и т. д., но далее мы будем всем этим пренебрегать). Будем считать, что возрастные и временные интервалы удовлетворяют соотношению

$$\Delta=\Delta\tau=\Delta x=\Delta y=1,$$

где 1 — единица измерения времени (например, 1 год).

Приведем все уравнения пока без новых обозначений несмотря на то, что речь будет идти не о плотностях мужчин и женщин, не состоящих в браке, и браках в момент t, а численностях мужчин и женщин, не стоящих в браке, а возрасте от x до $x+1$ и от y до $y+1$ соответственно и о числе браков длительностью от τ до $\tau+1$ лет на начала годаt.

В случае дискретного времени уравнения (14) примут вид

$$w(t+1,\ \tau+1,x+1,y+1)=w(t,\tau,x,y)-\mu(t,\tau,x,y)w(t,\tau,x,y),$$

$$u(t+1,x+1)=u(t,x)-\mu_4(t,x)u(t,x)-\sum_y w(t,0,x,y)+\sum_\tau\sum_y(\mu_1+\mu_3)w(t,\tau,x,y).\ (17)$$

$$v(t+1,y+1)=v(t,y)-\mu_5(t,y)v(t,y)-\sum_x w(t,0,x,y)+\sum_\tau\sum_x(\mu_1+\mu_2)w(t,\tau,x,y).$$

И будут показывать, как величины w, u, v в момент $t+1$ в точках $\tau=1, 2, \ldots, x=1, 2, \ldots, y=1, 2, \ldots$ зависят от w, u, v в момент t, когда они заданы в точках $\tau=1, 2, \ldots, x=1, 2, \ldots, y=1, 2, \ldots$

Уравнения (16) в дискретном времени

$$u(t,0)=\gamma\sum_{\tau}\sum_{x}\sum_{y} f(\mathrm{t},\tau,\mathrm{x},\mathrm{y})w(\mathrm{t},\tau,\mathrm{x},\mathrm{y}),$$

$$v(t,0)=(1-\gamma)\sum_{\tau}\sum_{x}\sum_{y} f(\mathrm{t},\tau,\mathrm{x},\mathrm{y})w(\mathrm{t},\tau,\mathrm{x},\mathrm{y}). \qquad (18)$$

$$w(t,0,x,y)=c(t)\ \min[a_1\, r_1 u(t,x);\ a_2\ r_2 v(t,y)]$$

дадут в момент *(t+1)* величины *w, u, v* в точках $\tau=0$, $x=0$, $y=0$, которые нельзя было, получит с помощью (17).

Таким образом, (17) и (18) переведут исходные данные брачной структуры

$$h(x)=u(0,x),$$
$$g(y)=v(0,y),$$
$$W(\tau,x.y)=w(0,\tau,x,y),$$

заданные в момент *t=0,* в данные о брачной структуре в моменты t=1, 2, …, и могут рассматриваться как оператор, переводящий структуру $\{w(t),u(t),v(t)\}$ в структуры $\{w(t+1),u(t+1),v(t+1)\}$.

6. О выборе некоторых функций

Остановимся на обоснования вида некоторых функций, входящих в модель. К их числу относится функции интенсивности расторжения браков, ориентации и выбора.

Естественно предположить, что интенсивность расторжений браков не возрастает с увеличением длительности последних и мало зависит от возраста супругов, т. е. функции $\mu_1(t,\tau,x,y)$ является не возрастающей по τ и мало меняющейся по x и y. рассмотрим несколько примеров.

1. В качестве приближения функции $\mu_1(t,\tau,x,y)$ можно считать: $\mu_1(t,\tau,x,y)=ae^{-bx}$, где $a\geq 0,\ b\geq 0$. При $b=0$ $\mu_1=a=const$ и доля не расторгнутых браков должна падать с увлечением τ в геометрической прогрессии, что вероятно, мало соответствует действительности. Поэтому естественно предполагать, что *b>0.*

2. Другим $\mu_1(t,\tau,x,y)$ любопытным случаем является следующий: $\mu_1(t,\tau,x,y)=\max[a-b\tau,0],\ a,b>0,$ — функция, которая также зависит лишь от τ, но обращается в 0 при длительности брака $\tau\geq a/b$, что означает полное отсутствие разводов в дополнительных браках. Отметим только, что практически нет большой разницы между функциями μ_1, приведенным в этих примерах.

Рассмотрим несколько примеров функций ориентации, не различия мужчин и женщин.

3. Пусть $\beta(t,x,z)=const$ для любых *x* из*z*. Тогда для выполнения

$$\int_0^\infty \beta(t,x,z)dz=\int_0^T \beta(t,x,z)dz=1,$$

где Т — максимальный возраст людей (например, 100 лет), необходимо, чтобы $\beta(t,x,z)=1$. В этом случае $a(t,x)=(1/T)\int_0^T \alpha((t,x))dx$ — средняя доля людей, состоящих в браке. Следовательно, доля не желающих вступать в брак: $1-a(t,x)$ и, скорее всего, будет слишком большой, чтобы соответствовать действительности.

4. Пусть $\beta(t,x,z)=\delta(x-x_0)_\infty$, т. е. всюду равно нулю, кроме точки x_0, но выполнено $\int_0^\infty \beta(t,x,z)dz=1$. Тогда

$$\int_0^\infty \beta(t,x,z)\alpha(t,x_0),$$

и доля желающих вступит в брак не зависит от возраста и равна доле людей возраста x_0, состоящих в браке. Если x0 — возраста 25–40 лет, то $a(t,x_0)\approx 90-95\%$, т. е. практически все имеют желание вступить в брак.

5. Пусть

$$\beta(t,x,y)=\begin{cases} const>0 \text{ при } |z-x|<\Delta_0, \\ 0 \text{ - остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\beta(t,x,y)=1/2\Delta_0$, доля желающих вступить в брак равна $1/2\Delta_0\int_{x-\Delta_0}^{x+\Delta_0}\alpha(t,x)dz$ — среднему числу сверстников, состоящих в браке.

6. Пусть, наконец, $\beta(t,x,z)=\delta[z-(x+\Delta_0)]$, тогда доля желающих вступить в брак

$$\int_0^\infty \beta(t,x,z)\alpha(t,x_0)dz=\alpha(x+\Delta_0),$$

т. е. равна доле людей, уже состоящих в браке и старших, чем рассматриваемые, на Δ_0 лет. Можно считать также, что $\Delta_0=\Delta_0(x)$.

Таким образом, функция $\beta(t,x,z)$ дает широкие возможности для моделирования. По-видимому, наиболее приемлемыми являются функции примеров 5 и 6. Однако функция ориентации не позволяет моделировать ситуацию, когда 100% людей имеют желание вступить в брак, что является безусловным ограничением. Но и эту трудность можно преодолеть, полагая непосредственно $a(t,x)=1$ при $x\geq x_1$ и $a(t,x)=0$ — в остальных случаях.

Аналогично примеры можно привести и для функций выбора r_1 и r_2, но мы ограничимся лишь двумя.

7. Пусть функции r_1 и r_2 представляют собой константу для любого момента времени t, т. е. для любого x в r_1 и любого y r_2

$$r_1(t,x,y)=\begin{cases} R_1 \quad \text{при } \underline{y}\leq y\leq \overline{y} \\ 0-\text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$r_2(t,x,y)=\begin{cases} R_2 \quad \text{при } \underline{x}\leq x\leq \overline{x} \\ 0-\text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$0\leq R_1\leq 1, \quad 0\leq R_2\leq 1.$$

При $R_1=R_2=1$ число браков будет, определяется лишь функциями a_1 и R_1, a_2 и R_2, т. е. численностью желающих вступить в брак мужчин и женщин.

8. Рассмотрим вырожденный случай

$$r_1(t,x,y)=\begin{cases} 1 \text{ при } x=x-\bar{\Delta}=y, \\ 0-\text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$r_2(t,x,y)=\begin{cases} 1 \text{ при } y=y+\bar{\Delta}=x, \\ 0-\text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это означает, что мужчины выбирают женщин моложе себя на $\hat{\Delta}$ лет, а женщины — мужчин старше себя на $\bar{\Delta}$ лет. Заметим, что при $\bar{\Delta}\neq\hat{\Delta}$ число вновь заключенных браков, очевидно, будет рано нулю, поэтому пары могут возникать лишь, когда $\hat{\Delta}\neq\bar{\Delta}$, как предполагалось в [4].

Отметим, теперь, что случай примере 8 при $\bar{\Delta}=\hat{\Delta}$ не максимизирует возможное число браков. В примере 7 их количество при $R_1=R_2=1$ определяется лишь числом желающих вступить в брак, поэтому в соответствии с (13) число браков может быть максимально возможным.

7. Размерность модели

Проанализируем причины упрощения модели и остановимся лишь на тех из них, которые связаны с размерностью.

Рассмотрим вектор, который определяет структуру $\{w(t,\tau,x,y),(t,x),v(t,y)\}$. Если выбрать в качестве возрастных интервалов годичные, то размерность векторов $u(t,x)$ и $v(t,y)$ равна 100 при $0\leq x\leq 99$ и $0\leq y\leq 99$, что вполне пригодно для любого прогноза.

Исследуем теперь размерность вектора $w(t,\tau,x,y)$ при $0\leq\tau\leq 40$, $15\leq y\leq 55$ и $15\leq x\leq 55$, т. е. рассмотрим лишь наиболее число встречающиеся браки. Тогда размерность $w(t,\tau,x,y)$ при любом будет равна 40×40×40=64000.

Таким образом, с учетом общего числа семей в Республике Каракалпакстан для каждого фиксированного набора τ, x, y число браков $w(t,\tau,x,y,)$ будет около 1000, что уже представляет собой достаточно детальное деление, поэтому дальнейшее дробление браков, например, по числу детей нам не представляется возможным.

Резкое укрупнение возрастных интервалов, как легко видеть, повлечет за собой вместе со значительным уменьшением размерности и большую потерю точности прогноза, так как при этом будет теряться возрастная структура.

Вполне приемлемой является группа браков длительностью $\tau\geq 19$ без указания продолжительности брака, но это приводит к уменьшению размерности лишь в 2 раза.

Вероятно, целесообразно рассматривать двухлетние возрастные группы, что приведет к уменьшению размерности в 8 раз, но при этом произойдет значительная потеря точности в основных уравнениях (17) и (18). Это будет происходить из-за того, что при двухлетнем интервале следует учитывать интенсивности двойных событий (вступление в брак и рождение ребенка, вступление в брак и развод, и т. д.), чем мы пока пренебрегали. Безусловно, самое радикальное снижение размерности может произойти при пятилетних возрастных группах. Однако такое сокращение влечет за собой необходимость учета групп событий (вступление в брак, рождение детей, развод или смерть супругов и т. д.), вероятностями которых в пределах пятилетних интервалов пренебрегать уже нельзя, что мы естественно, детали при рассмотрении малых интервалов Δ и с некоторой натяжной для годовых.

Список литературы:

1. Венецкий И. Т. Математические методы и демография. М.: Статистика, 1991.
2. Стешенко В. С. Изучение воспроизводство народонаселения. М., 1991.
3. Демографический ежегодник Узбекистана 1991–2016 годы. Статистический сборник. Ташкент, 2003. 304 с.
4. Староверов О. В. Модели движения населения. М., 1979.

References:

1. Venetskii, I. T. (1991). Matematicheskie metody i demografiya. Moscow, Statistika.
2. Steshenko, V. S. (1991). Izuchenie vosproizvodstvo narodonaseleniya. Moscow.
3. Demograficheskii ezhegodnik Uzbekistana 1991–2016 gody. Statisticheskii sbornik. Tashkent, 2003, 304.
4. Staroverov, O. V. (1979). Modeli vosproizvodstva naseleniya. Moscow.

Работа поступила в редакцию 05.04.2017 г.

Принята к публикации 10.04.2017 г.

Ссылка для цитирования:

Сауханов Ж. К., Утемуратов Р. Б. Воспроизводство структуры населения и браков. Введение // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. №5 (18). С. 8-19. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/saukhanov (дата обращения 15.05.2017).

Cite as (APA):

Saukhanov, Ja., & Utemuratov, R. (2017). Reproduction of the population and marriage structure. Introduction. *Bulletin of Science and Practice*, (5), 8-19