УДК 622.271.33/624.121.(532+537)+625.033.38+627.43

ТЕОРИЯ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ И ОСНОВАНИЙ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНЫХ ОТКОСОВ*

А. В. Жабко

Theory of calculation of stability of slopes and bases. General theory of calculation of stability of homogeneous slopes

A. V. Zhabko

This article is the second part of the published work on the creation of a unified theory of calculating the stability of slopes. There is no theory for arbitrary geological conditions and even in homogeneous rock masses. Those individual calculation methods that already exist have a number of significant drawbacks. Therefore, the aim of this study is to develop a rigorous method for evaluating the stability of similar slopes and its further modification under more difficult conditions. The paper presents and proposes the use of a fundamentally new theory for calculating the stability of slopes and grounds, designed by the author and based on the fundamental theorems and principles of mechanics, such as the principle of possible displacements of Lagrange, Gauss principle of least constraint, Ostrogradskiy theorem of least lost work, and so on. The basis of the mathematical apparatus of the proposed theory is vibrational, differential and integral calculus. Drawing on the theory, author developed the method of calculation of stability of homogeneous slopes.
Using the principle of virtual displacements, the author deduces the condition of stability of the prism offset in general. On the basis of the theorem of least lost work author obtains an equation that allows to overcome the static uncertainty of the problem for assessment of equilibrium of the elementary compartment (unit). Author studied law of distribution of interblock reactions along the sliding surface with the corresponding proof of the results. The article also shows the derived formulas for the construction of the weakest sliding surfaces in homogeneous isotropic slopes. Author constructed sliding surfaces for the most commonly used values of slope angles and internal friction. One can see an assessment of the stability and extreme geometrical parameters of flat homogeneous slopes. Author received a nomogram of stability of flat homogeneous slopes. There also is a timetable for determining the width of the prism of possible collapse.
Keywords: slope; limit equilibrium method; method of limiting stressed state; the equilibrium condition; sustainability; extremum of the functional; differential equation; sliding surface; anisotropy; inhomogeneity; angle bending; used slope; stability of waste dumps; weak base; water cut.

Статья является второй частью публикуемой работы по созданию единой теории расчета устойчивости откосов. Такой теории в произвольных горно-геологических условиях и даже в однородных массивах горных пород не существует. Те отдельные расчетные способы, которые уже есть, обладают рядом существенных недостатков. Поэтому целью работы является создание строгого способа оценки устойчивости однородных откосов и его дальнейшая модификация под более сложные условия. В работе приводится и предлагается к использованию принципиально новая теория расчета устойчивости откосов и оснований, разработанная автором и основанная на фундаментальных теоремах и принципах механики, таких как принцип возможных перемещений Лагранжа, принцип наименьшего принуждения Гаусса, теореме наименьшей потерянной работы Остроградского и т. д. Основой математического аппарата предлагаемой теории являются вариационное, дифференциальное и интегральное исчисления. С опорой на теорию разработаны методики расчета устойчивости однородных откосов.
Используя принцип возможных перемещений, автор выводит условие устойчивости призмы смещения в общем виде. На основе закона о наименьшей потерянной работе получено уравнение, позволяющее преодолеть статическую неопределенность задачи по оценке равновесия элементарного отсека (блока). Изучены законы распределения межблоковых реакций вдоль поверхности скольжения, с соответствующим доказательством получаемых результатов. Выведены формулы для построения наиболее слабых поверхностей скольжения в однородных изотропных откосах. Построены поверхности скольжения для наиболее часто используемых значений углов откоса и внутреннего трения. Произведена оценка устойчивости и определены предельные геометрические параметры

* Первая часть статьи опубликована в вып. 4(40) за 2015 г., с. 45–57.

плоских однородных откосов. Получена номограмма устойчивости плоских однородных откосов. Приводится график для определения ширины призмы возможного обрушения.
Ключевые слова: откос; однородный откос; угол откоса; угол внутреннего трения; сцепление; высота откоса; метод предельного равновесия; условие равновесия; устойчивость; экстремум функционала; дифференциальное уравнение; поверхность скольжения.

Известно, что для равновесия плоской системы сил необходимо выполнение трёх условий геометрической статики. Однако задачи статики весьма эффективно решаются при использовании общих принципов механики. Так, для равновесия механической системы с одной степенью свободы, согласно принципу возможных перемещений, необходимо и достаточно выполнение равенства [1]:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0, \qquad (1)$$

где $\sum \delta A_k^a, \sum \delta A_k^r$ – сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил и реакций связей, соответственно, при любом возможном перемещении системы.

Необходимо указать на ошибку, допускаемую некоторыми исследователями. В литературе в качестве недостатка способа К. Терцаги упоминается то, что он удовлетворяет только одному условию статического равновесия – условию моментов. К. Терцаги исходит из предположения о круглоцилиндрической поверхности скольжения, таким образом возможным перемещением системы отсеков (призмы смещения) будет являться её смещение по дуге окружности относительно некоторого центра. Пренебрегая внутренними силами (силами, действующими между отсеками – межблоковыми реакциями) и используя выражение (1), получим необходимое и достаточное условие равновесия в виде разности внешних сдвигающих и удерживающих сил (моментов сил). Не составляет труда записать это условие через коэффициент устойчивости.

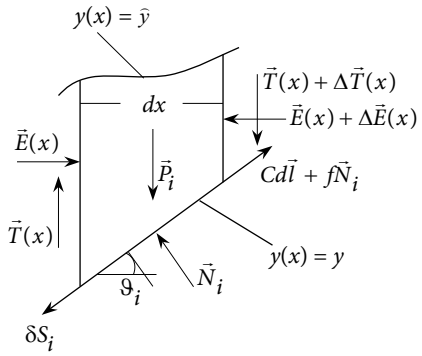


Рисунок 1 | Элементарный отсек и действующие на него силы / Figure 1 | Elementary compartment and operating forces.

Следовательно, условие равновесия по К. Терцаги является состоятельным, однако в способе не учтены межблоковые реакции, а поверхность скольжения принята гипотетично.

Введём систему координат (направление оси x – вправо, y – вверх) и рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы – призму смещения, состоящую из n материальных точек – центры масс элементарных отсеков (отсеки условно разделены вертикальными гранями). Выделим из призмы смещения произвольный отсек и рассмотрим его равновесие под действием приложенных активных сил и реакций связей (рис. 1). Условие равновесия для данного отсека представляется равенством:

$$\begin{gathered}-E(x)\cos\vartheta_i\delta S_i + \big(E(x)+\Delta E(x)\big)\cos\vartheta_i\delta S_i - \\ -T(x)\sin\vartheta_i\delta S_i + \big(T(x)+\Delta T(x)\big)\sin\vartheta_i\delta S_i + \\ +P_i\sin\vartheta_i\delta S_i - R_i\delta S_i = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

где ϑ_i – угол наклона поверхности скольжения в точке; $E(x)$, $T(x)$ – соответственно функции нормальной и касательной составляющих реакций по боковым граням отсека; Δ – приращение функции; δS_i – возможное (виртуальное) перемещение отсека; P_i – вес отсека; R_i – сила сопротивления по площадке скольжения.

Для откоса с предельными геометрическими параметрами на площадке скольжения выполняется условие предельного равновесия:

$$R_i = fN_i + Cdl = fN_i + C\frac{dx}{\cos\vartheta_i}, \qquad (3)$$

где $f = \mathrm{tg}\,\varphi$ – коэффициент внутреннего трения (тангенс угла внутреннего трения); N_i – нормальная реакция площадки скольжения; C – сцепление массива горных пород; dl, dx – соответственно дифференциалы дуги и аргумента.

Составим условие равновесия по направлению нормали к площадке скольжения:

$$N_i - P_i\cos\vartheta_i - \Delta T(x)\cos\vartheta_i + \Delta E(x)\sin\vartheta_i = 0. \qquad (4)$$

Используя выражения (2), (3) и (4), запишем условие равновесия отсека в общем виде:

$$\begin{gathered}\Big[\Delta E(x)\big(1+f\,\mathrm{tg}\vartheta_i\big) + \Delta T(x)\big(\mathrm{tg}\vartheta_i - f\big) + \\ + P_i\big(\mathrm{tg}\vartheta_i - f\big) - C\big(1+\mathrm{tg}^2\vartheta_i\big)dx\Big]\cos\vartheta_i\delta S_i = 0. \end{gathered} \qquad (5)$$

Преобразуем уравнение (5), используя соотношения:

$$dx \to 0 \Rightarrow \Delta E(x) = dE(x) = dE,\ \Delta T(x) = dT,$$

$$\Delta E(x) = \frac{\partial E}{\partial x}dx = E'dx,\ \Delta T(x) = T'dx.$$

$$\Big[E'\left(1+f\,\mathrm{tg}\vartheta_i\right)dx+T'\left(\mathrm{tg}\vartheta_i-f\right)dx+P_i\left(\mathrm{tg}\vartheta_i-f\right)-$$
$$-C\left(1+\mathrm{tg}^2\vartheta_i\right)dx\Big]\cos\vartheta_i\delta S_i=0. \qquad (6)$$

Запишем условие равновесия всей системы (призмы смещения), выразив возможное перемещение каждого отсека δS_i через возможное (горизонтальное) перемещение всей призмы δS_Γ (это перемещение одинаково для всех отсеков):

$$\delta S_i\cos\vartheta_i=\delta S_\Gamma.$$

Кроме того, учтем следующие соотношения:

$$P_i=\gamma\left(\hat{y}-y\right)dx,\ \mathrm{tg}\vartheta_i=y',$$

где γ – объемный вес горных пород; $\hat{y}$, y – соответственно функции линий откоса и поверхности скольжения; y' – производная функции поверхности скольжения.

Таким образом, имеем условие равновесия призмы смещения в виде:

$$\int\Big[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)+E'\left(1+fy'\right)+$$
$$+T'\left(y'-f\right)\Big]dx\delta S_\Gamma=0. \qquad (7)$$

Преобразуем условие равновесия (7) к виду:

$$\int\Big[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)+$$
$$+\left(T'+fE'\right)y'\Big]dx+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0, \quad (8)$$

где T_0, E_0, T_1, E_1 – внешние касательные и нормальные реакции на вертикальных гранях призмы смещения, соответственно, слева и справа.

Потребуем в выражении (8) выполнения условий $\int T'y'dx=0, \int fE'y'dx=0$, тогда, согласно лемме Дюбуа-Реймона [2], при отсутствии внешних касательных и нормальных составляющих реакций будем иметь $y'=\mathrm{const}$.

Таким образом, для того, чтобы межблоковые реакции на возможном перемещении всей призмы не совершали работу, то есть их можно было бы не учитывать при расчете (идеальные межблоковые связи, $\sum\delta A_k^r=0$), необходимо выполнение двух условий: 1) $T_0=E_0=T_1=E_1=0$; 2) $y'=\mathrm{const}$ (поверхность скольжения – плоскость). С другой стороны, при выполнении только второго условия межблоковые реакции работу совершать также не будут. Они выйдут из-под знака интеграла и будут считаться внешними, действующими на призму смещения (или её часть) по вертикальным граням крайних отсеков.

Зададимся вопросом: как должны распределяться между собой приращения касательной и нормальной составляющих межблоковых реакций (далее – реакций), чтобы при перемещении отсека они совершали экстремальную работу? Таким образом, имеем задачу линейного программирования:

$$E'\left(1+f\mathrm{tg}\vartheta_i\right)dx+T'\left(\mathrm{tg}\vartheta_i-f\right)dx\to\mathrm{extr}.$$

Градиент (антиградиент) функции в этом случае имеет координаты $\overrightarrow{\mathrm{grad}}=\left\{1+f\mathrm{tg}\vartheta_i,\mathrm{tg}\vartheta_i-f\right\}$, поэтому экстремальную работу на перемещении реакция будет производить при следующем условии (рис. 2):

$$\frac{\partial T}{\partial E}=\frac{T'}{E'}=\frac{\mathrm{tg}\vartheta_i-f}{1+f\mathrm{tg}\vartheta_i}=\mathrm{tg}\left(\vartheta_i-\varphi\right). \qquad (9)$$

Докажем справедливость равенства (9). Доказательство можно дать на основе принципа наименьшего принуждения, открытого К. Ф. Гауссом в 1829 г. [3]. Принципу К. Ф. Гаусса, в частности, можно дать энергетическое толкование, которое И. И. Рахманинов назвал началом наименьшей потерянной работы [3]: действительное движение среди кинематически возможных выделяется тем, что для него работа реакций связей на путях отклонения этого движения от свободного движения в каждый данный момент есть минимум. Если мы мысленно уберем реакцию смежного отсека, то есть, заменим несвободное движение свободным, то направление движения отсека не изменится. Поэтому угол наклона вектора отклонения несвободного движения от свободного совпадает с углом наклона площадки скольжения. Работа реакции в этом случае определится зависимостью:

$$A_R=R\left[f\sin\left(\xi-\vartheta_i\right)-\cos\left(\xi-\vartheta_i\right)\right]\Delta S_i,$$

где R – реакция смежного отсека; ξ – угол наклона реакции к горизонту; ΔS_i – перемещение отсека по площадке сдвига (вектор отклонения свободного движения от несвободного).

Учитывая, что величины R и ΔS_i произвольны и постоянны, для выполнения условия экстремума работы приравняем её производную по ξ к нулю. Отсюда

$$\xi=\vartheta_i-\varphi.$$

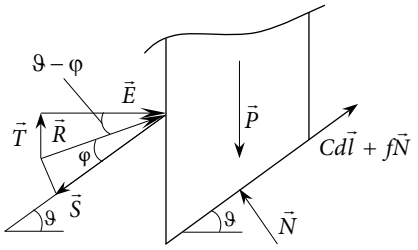


Рисунок 2. Направление действия межблоковой реакции / Figure 2 | Direction of the interblock reaction.

Из принципа К. Ф. Гаусса также следует, что для действительного движения системы реакции связей минимальны (М. В. Остроградский, 1836 г.) [3]. Равновесие является одним из истинных состояний системы. Поэтому, формализуя задачу, необходимо найти такой угол ξ, чтобы удержать в равновесии отсек минимальной по величине силой *R*. Решение поставленной задачи приводит к тем же результатам.

Важно отметить, что, согласно уравнению (9), направление реакции не зависит от формы отсека, а зависит от угла наклона его основания.

Решаем совместно уравнения (6) и (9) относительно производных функций межблоковых реакций, откуда:

$$T' = -\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)}{\left(1+f^2\right)\left(1+y'^2\right)}\left(y'-f\right); \quad (10)$$

$$E' = -\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)}{\left(1+f^2\right)\left(1+y'^2\right)}\left(1+fy'\right). \quad (11)$$

Подставляем полученные соотношения (10) и (11) в уравнение (8), и после преобразований необходимое и достаточное условие равновесия призмы смещения представляется в виде:

$$\int\left[\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)}{1+y'^2}\right]dx + \\ +\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \quad (12)$$

Отметим, что касательная составляющая межблоковой реакции не может превышать величины кулоновского сопротивления сдвигу.

Выясним физический смысл функционала (12):

$$\sum\left(\gamma h\sin\vartheta_i\cos\vartheta_i - f\gamma h\cos^2\vartheta_i - C\right)dl\cos\vartheta_i = \\ = \sum\left(\tau - f\sigma_n - C\right)dl\cos\vartheta_i.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием равновесия призмы смещения или её части является нуль-вектор алгебраической суммы проекций внешних сил, действующих по площадкам скольжения (вдоль поверхности скольжения) каждого отсека на горизонтальную ось. Как и следовало ожидать, внешние силы не входят в условие равновесия в явном виде, что не противоречит представлениям теоретической механики.

Пусть имеется ненагруженный откос не связных пород. Кроме того, предположим, что поверхность скольжения пересекает линию откоса в начале и конце интервала, то есть на концах интервала выполняется условие $\hat{y}-y=0$. В этом случае, согласно лемме Лагранжа [2], из уравнения (12) будем иметь $y'=f$ во всех точках. То есть поверхность скольжения будет совпадать с откосом, что теоретически правильно для несвязных пород.

Анализируя уравнение (6), замечаем, что при условии $0 \le \vartheta_i \le \varphi$ работа касательной составляющей межблоковой реакции меняет знак. По теореме Менабреа [4], согласно которой при добавлении каких либо связей (межблоковой реакции), потенциальная энергия (работа) уменьшается и никогда не может увеличиваться, это невозможно. Следовательно, на этом участке реакция горизонтальна (рис. 3).

В этом случае производная межблоковой реакции определится формулой:

$$E' = -\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)}{\left(1+fy'\right)},$$

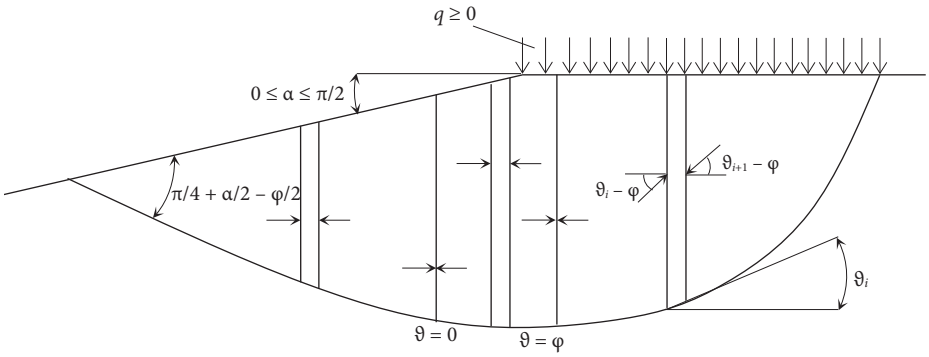


Рисунок 3. Распределение реакций на различных участках поверхности скольжения / Figure 3 | Distribution of reactions at different parts of sliding surface.

а условие равновесия призмы (или её части) примет вид:

$$\int\left[\frac{\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)}{1+fy'}\right]dx+$$
$$+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \qquad (13)$$

Функционал (13), достаточно подробно исследован автором в работе [5].

На участке ($\vartheta_i \le 0$) касательная составляющая межблоковой реакции также отсутствует ввиду увеличения угла наклона поверхности скольжения по мере приближения к откосу. Таким образом, на пассивном участке ($\vartheta_i \le \varphi$) межблоковая реакция всюду горизонтальна (см. рис. 3).

Таким образом, условие равновесия для всей призмы смещения свободного откоса имеет вид:

$$\int\limits_{\vartheta\le\varphi}\left[\frac{\gamma\left(\hat{y}-y_1\right)\left(y_1'-f\right)-C\left(1+y_1'^2\right)}{1+fy_1'}\right]dx+$$
$$+\int\limits_{\vartheta>\varphi}\left[\frac{\gamma\left(\hat{y}-y_2\right)\left(y_2'-f\right)-C\left(1+y_2'^2\right)}{1+y_2'^2}\right]dx=0. \qquad (14)$$

Перейдем к рассмотрению решения задачи по нахождению потенциальной поверхности скольжения в однородных откосах частного вида (плоских). Заметим, что поверхность скольжения в этом случае будет проходить как под откосом, так и под горизонтальной площадкой (верхней бермой).

Условие равновесия призмы смещения (14) получено из предположения равновесия каждого отсека, то есть выполнения предельного равновесия в каждой точке поверхности скольжения. Условия равновесия (5, 6) будут выполняться при произвольной высоте отсека, однако, вес (нагрузка) или прочность (сцепление) должны быть необходимыми и достаточными для выполнения условия предельного равновесия при заданной форме откоса и физико-механических характеристиках горных пород. Предположим, что найдется такой параметр $n > 0$, одинаковый для всех отсеков, разделив на который величину сцепления (или умножив объемный вес), мы получим выполнение условия предельного равновесия в каждой точке поверхности скольжения. Поместим начало системы координат в точку пересечения поверхности скольжения с откосом. Получим следующую задачу вариационного исчисления для нахождения наиболее опасной поверхности скольжения свободного откоса:

$$\int\limits_{\vartheta\le\varphi}\left[\frac{\left(kx-y_1\right)\left(y_1'-f\right)-\lambda\left(1+y_1'^2\right)}{1+fy_1'}\right]dx+$$
$$+\int\limits_{\vartheta>\varphi}\left[\frac{\left(kx-y_2\right)\left(y_2'-f\right)-\lambda\left(1+y_2'^2\right)}{1+y_2'^2}\right]dx+$$
$$+\int\limits_{\vartheta>\varphi}\left[\frac{\left(H-y_3\right)\left(y_3'-f\right)-\lambda\left(1+y_3'^2\right)}{1+y_3'^2}\right]dx\to\text{extr}, \qquad (15)$$

где k – тангенс угла наклона откоса; H – высота откоса; $\lambda = C/\gamma n > 0$ – постоянная, зависящая от формы откоса, физико-механических свойств горных пород, которая определяет предельную высоту откоса; n – постоянная, обеспечивающая выполнение условия предельного равновесия в пределах каждого отсека.

Ввиду важнейшего свойства вариации функционалов (вариация суммы равна сумме вариаций), для решения поставленной задачи необходимо определить функции, доставляющие экстремум каждому из функционалов в отдельности. Рассмотрим первый функционал (15). Уравнение Л. Эйлера [2] для данного функционала представляет собой нелинейное относительно производных дифференциальное уравнение второго порядка. Поэтому для упрощения его решения необходимо произвести замену переменных в функционале, тем самым понизив порядок уравнения, и возвратиться к прежним переменным. Например, можно положить:

$$\begin{cases} kx-y_1=y \\ x=x \end{cases}.$$

Граничным условием для определения произвольной постоянной в уравнении Л. Эйлера является условие трансверсальности [2]; в принятой системе координат оно имеет вид

$$y_1'\left(x=0\right)=-\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\varphi}{2}\right).$$

Вторым условием для принятой системы координат является $y_1(0) = 0$.

Воспользовавшись условием трансверсальности, запишем уравнение, определяющее опасную поверхность скольжения в принятой системе координат:

$$kx-y_1=\lambda\frac{\left(kf-1\right)y_1'^2+2\left(k+f\right)y_1'+1-kf}{fy_1'^2-2f^2y_1'+k-f+kf^2}. \qquad (16)$$

Аналогичным образом для второго функционала (15) имеем дифференциальное уравнение:

$$kx - y_2 = \\ = \left(\lambda + C_1\right)\frac{\left(1+y_2'^2\right)^2}{2y_2'^3 - \left(k+3f\right)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f}. \quad (17)$$

Произвольную постоянную C_1 определим из условия:

$$kx - y_1\Big|_{y_1' = \operatorname{tg}\varphi} = kx - y_2\Big|_{y_2' = \operatorname{tg}\varphi}.$$

Таким образом, окончательно получим уравнение:

$$kx - y_2 = \\ = \lambda\frac{1+kf}{1+f^2}\frac{\left(1+y_2'^2\right)^2}{2y_2'^3 - \left(k+3f\right)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f}. \quad (18)$$

Перейдем к определению условия для поверхности скольжения в точке стыка участков откоса и горизонтальной площадки, то есть условия на прямой $x = H\operatorname{ctg}\alpha$: рассматриваются два последних интеграла (15), что приводит к разрывной вариационной задаче второго рода [2]. Условие в точке стыка представляет собой равенство условий трансверсальности по обе стороны от прямой $x = H\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом, имеем уравнение:

$$F_{2y_2'}\Big|_{x=H\operatorname{ctg}\alpha-0} = F_{3y_3'}\Big|_{x=H\operatorname{ctg}\alpha+0}, \quad (19)$$

где $F_{y'}$ – частная производная подынтегрального выражения по производной функции.

Взяв производные от подынтегральных выражений, приравняв их, а также учтя, что ординаты концов экстремалей в точке стыка равны, получим выражение:

$$y_2' = y_3'.$$

Таким образом, производные в точке стыка равны, то есть поверхность скольжения не преломляется при переходе, например, с участка откоса уступа на участок площадки. Можно показать, что это утверждение справедливо для произвольной формы границы между смежными отсеками.

Положив в правой части уравнения (17) $k = 0$, получим уравнение, определяющее форму наиболее опасной поверхности скольжения для третьего функционала (15):

$$H - y_3 = \left(\lambda + C_1\right)\frac{\left(1+y_3'^2\right)^2}{2y_3'^3 - 3fy_3'^2 - f}. \quad (20)$$

Для определения произвольной постоянной в этом уравнении приравняем к нулю подынтегральное выражение третьего функционала (15), что является требованием выполнения условия предельного равновесия для крайнего (верхнего) отсека:

$$F_3 = \frac{\gamma\left(H - y_3\right)\left(y_3' - f\right) - C\left(1+y_3'^2\right)}{1+y_3'^2} = 0.$$

Определяем из данного уравнения минимально возможную высоту крайнего отсека, в итоге получим следующее граничное условие:

$$y_3'\left(x_0\right) = f + \sqrt{1+f^2} = \operatorname{tg}\left(\pi/4 + \varphi/2\right),$$
$$H - y_3 = H_{90} = (2C/\gamma)\operatorname{tg}\left(\pi/4 + \varphi/2\right).$$

Далее определяем в уравнении (20) произвольную постоянную, и окончательно уравнение, описывающее наиболее опасную поверхность скольжения под бермой, будет иметь вид:

$$H - y_3 = \frac{C}{\gamma}\frac{\left(1+y_3'^2\right)^2}{2y_3'^3 - 3fy_3'^2 - f}. \quad (21)$$

Если призма смещения находится в равновесии, то каждый её отсек также уравновешен. Это в частности означает, что на возможном перемещении всей призмы смещения работы внутренних и внешних сил, действующих на отсек, равны по модулю. Удельная обобщенная внутренняя сила равна подынтегральному выражению (12) с обратным знаком:

$$F^i\left(x\right) = -F^e\left(x\right) = \\ = -\frac{\gamma\left(\hat{y} - y\right)\left(y' - f\right) - C\left(1+y'^2\right)}{1+y'^2}, \quad (22)$$

где $F^i(x)$, $F^e(x)$ – обобщенные внутренняя и внешняя сила на возможном (горизонтальном) перемещении всей механической системы (призмы смещения) соответственно.

Заметим, что функция обобщенной внутренней силы (22) должна убывать, в противном случае работа межблоковых реакций на возможном перемещении системы станет положительной, что, в свою очередь, невозможно. Другими словами межблоковые реакции станут отрицательно влиять на устойчивость. Действительно, когда межблоковые реакции постоянны (не зависят от x), то они не совершают работу на возможном перемещении (это не означает, что отсутствует межблоковое взаимодействие и напряжения равны нулю), а производная функции межблоковых реакций равна нулю. Таким образом, нулевое значение работы межблоковых реакций является её экстремальным (максимальным) значением, превысить которое она

не может. В общем случае работа межблоковых реакций представляет собой сумму работ нормальных и касательных составляющих, которые не зависят друг от друга и являются заведомо отрицательными. Поэтому равенство нулю работы внутренних сил на возможном перемещении системы означает: $E' = T' = 0$. Положим в уравнении (8) $E' = T' = 0$, получим следующее условие равновесия:

$$\int\left[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)\right]dx+\left(E_1-E_0\right)- \\ -f\left(T_1-T_0\right)=0. \quad (23)$$

Уравнения (12, 13, 23) позволяют оценить устойчивость призмы смещения по произвольной поверхности скольжения.

Определим условия применения второго и третьего функционалов (15). Для этого продифференцируем уравнение (22) по x и составим неравенство (индексы функции опущены):

$$\frac{dF^e}{dx}=\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}+\frac{\partial F}{\partial\left(\hat{y}-y\right)}\frac{d\left(\hat{y}-y\right)}{dx}= \\ =\gamma\left[y''\left(\hat{y}-y\right)\frac{1+2fy'-y'^2}{\left(1+y'^2\right)^2}+\frac{\left(\hat{y}'-y'\right)\left(y'-f\right)}{1+y'^2}\right]>0, \quad (24)$$

где y'' – вторая производная функции поверхности скольжения по x.

В случае, когда поверхность скольжения зарождается под действием гравитационных сил, например, в однородных откосах, первое слагаемое в неравенстве (24) не может быть меньше нуля. Произведём предварительный анализ условия (24). Первое слагаемое положительно при вогнутой форме поверхности скольжения и угле её наклона, не превышающем значения π/4 + φ/2, или же при выпуклой форме поверхности скольжения и углах её наклона, больших π/4 + φ/2.

Продифференцируем уравнение (18) по x и подставим их совместно в выражение (24). Приравняем его к нулю и получим условие для определения предельного значения производной поверхности скольжения под откосом:

$$\left(f+k\right)s^4+4\left(1-kf\right)s^3+2\left(kf^2-3f-2k\right)s^2+ \\ +4f\left(f+k\right)s+f-k-2kf^2=0, \quad (25)$$

где s – предельное значение производной (тангенса угла наклона) наиболее опасной поверхности скольжения, описываемой уравнением (18).

Проделаем подобную операцию с уравнениями (20) или (21). Как показывают расчеты, выполнение условия (24) под бермой с поверхностью скольжения, описываемой уравнениями (20), (21), невозможно, то есть данными уравнениями поверхность скольжения под верхней бермой не описывается.

В зависимости от углов откоса и внутреннего трения предельное значение производной (25) может получаться как больше, так и меньше величины π/4 + φ/2. При α = π/4 + φ/2 предельный угол наклона поверхности скольжения также равен π/4 + φ/2. Однако, условие трансверсальности для функционала (12) на произвольной вертикальной грани при произвольной форме откоса дает угол π/4 + φ/2. Это означает, что при любом угле откоса α, $s \le \mathrm{tg}\,(\pi/4 + \varphi/2)$, то есть данный угол доставляет абсолютный экстремум вариационной задаче и приурочивается к границе участков откоса и бермы, то есть к линии $x = H\mathrm{ctg}\alpha$.

Для определения наиболее опасной части поверхности скольжения для функционала (23) необходимо решить следующую вариационную задачу:

$$\int\left[\gamma\left(\hat{y}-y\right)\left(y'-f\right)-C\left(1+y'^2\right)\right]dx\to\max. \quad (26)$$

Необходимо отметить принципиальную разницу между функционалами (26) и (15). В функционале (26) отсутствует масштабный параметр λ, отвечающий за выполнение условия предельного равновесия. Дело в том, что функционал (26) предусматривает отсутствие влияния на устойчивость межблоковых реакций (внутренних сил), то есть равновесие обеспечивают только внешние силы, в том числе и боковые. Поэтому априори полагается выполнение условия предельного равновесия в каждой точке поверхности скольжения.

Для участка откоса $\hat{y}=kx$ дифференциальное уравнение поверхности скольжения (уравнение Л. Эйлера) имеет вид [2]:

$$\left(kx-y_4\right)=\frac{C_2-(C/\gamma)\left(y_4'^2-2ky_4'-1\right)}{k-f}, \quad (27)$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Для определения произвольной постоянной в уравнении (27) воспользуемся вполне очевидным граничным условием:

$$y_4'\left(x_0\right)=f+\sqrt{1+f^2}=\mathrm{tg}\omega=\mathrm{tg}\left(\pi/4+\varphi/2\right), \\ kx-y_4=H_{90}= \\ =(2C/\gamma)\mathrm{tg}\left(\pi/4+\varphi/2\right),\ \Rightarrow C_2=0.$$

Таким образом, окончательно будем иметь:

$$\left(kx-y_4\right)=-\frac{C}{\gamma}\frac{\left(y_4'^2-2ky_4'-1\right)}{k-f}. \quad (28)$$

Продифференцируем обе части выражения (28) по x, после несложных преобразований получим:

$$y_4'' = \frac{\gamma\left(k-f\right)}{2C}. \qquad (29)$$

Таким образом, согласно уравнению (29) кривизна поверхности скольжения на рассматриваемом участке постоянна и зависит от угла откоса и физических характеристик горного массива. То есть поверхность скольжения может быть выпуклой, плоской или вогнутой в зависимости от угла наклона откоса (верхней бермы). Данный результат весьма интересен и совпадает с результатами моделирования эквивалентными материалами (см. например, Г. Л. Фисенко [6]).

Положим в уравнении (28) $k = 0$, тогда уравнение поверхности скольжения под горизонтальной площадкой (верхней бермой) будет иметь вид:

$$\left(H-y_5\right) = \frac{C\left(y_5'^2-1\right)}{\gamma \mathrm{tg}\varphi}. \qquad (30)$$

Проверка уравнения (28) условием (24) показывает, что оно выполняется (разумеется, с обратным знаком) для углов откосов, не превышающих величины $\pi/4 + \varphi/2$.

Таким образом, для плоских однородных откосов наиболее слабая поверхность скольжения состоит из трёх участков (рис. 4), описываемых уравнениями (16), (18) и (30) соответственно.

Для построения поверхности скольжения необходимо также вычислить следующие угловые параметры (см. рис. 4):

$$\mathrm{tg}\psi = s,\ \ \mathrm{tg}\beta = t,$$

$$\frac{C\left(t^2-1\right)}{\gamma \mathrm{tg}\varphi} = \lambda \frac{1+kf}{1+f^2}\frac{\left(1+s^2\right)^2}{2s^3-\left(k+3f\right)s^2+2kfs+k-f}. \qquad (31)$$

Функционал (26) впервые в качестве условия равновесия призмы смещения и целевого выражения был предложен Ю. И. Соловьевым [7]. Он бездоказательно считал этот функционал основным условием равновесия для произвольной поверхности скольжения и на различных её участках. Кроме того, при нахождении потенциальной поверхности скольжения было сделано неверное предположение о том, что любая часть экстремальной поверхности также должна обладать экстремальным свойством (причем только по углу наклона). С другой стороны Ю. И. Соловьеву необходимо отдать должное, так как именно он впервые использовал принцип возможных перемещений для обоснования условия равновесия призмы смещения. Отметим также, что Ю. И. Соловьевым рассматривался гипотетический грунт, и поэтому о влиянии внешних сил на устойчивость призмы смещения (E_0, E_1, T_0, T_1) ничего не говорилось. Однако, как показано выше, условие устойчивости (23), включая внешние силы, является частным случаем общего условия устойчивости (8).

Дифференциальное уравнение (30) впервые было получено А. Г. Дорфманом [8] оптимизацией функционала Ю. И. Соловьева (26), однако при обосновании потенциальной поверхности скольжения для вертикального откоса и его предельной высоты не учитывалась высота вертикальной трещины отрыва, а граничное условие определялось в виде условия трансверсальности на поверхности горизонтальной площадки. Это привело к ошибочному завышению коэффициента устойчивости для откоса и как следствие к завышению предельной высоты откоса (для идеально связных пород $H = 4C/\gamma$) [8]. Эта же неточность послужила причиной ошибочной оценке давления грунта на подпорную стенку [9], вследствие неправильного обоснования пределов интегрирования. Кроме того, если составить условие трансверсальности для функционала (26) на пересечении с откосом, то выяснится, что они не пересекаются. Незнание границ применения функционала (26) приводило к абсурдным результатам и, в конце концов, заставило вышеупомянутых исследователей отказаться от его дальнейшего анализа.

Выше были получены дифференциальные уравнения, определяющие наиболее слабую поверхность скольжения. Представим эти уравнения в символичном виде:

$$kx - y = \mu\eta\left(p\right),$$

где $p \equiv y'$ – параметр.

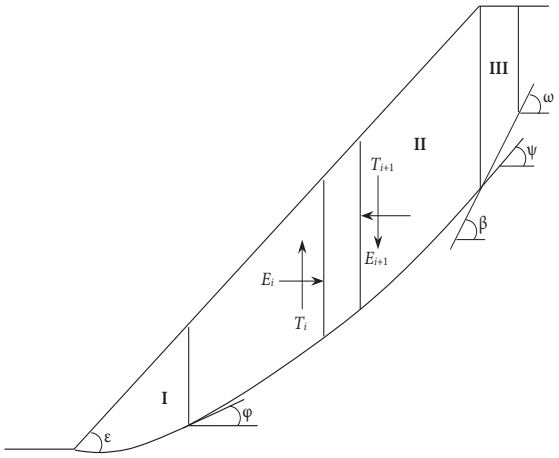
Тогда $d\left(kx-y\right) = \mu\eta'\left(p\right)dp$. Дифференцируя левую часть уравнения и принимая во внимание, что $dy = pdx$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} dx = \mu\dfrac{\eta'\left(p\right)}{k-p}dp \\ dy = \mu\dfrac{\eta'\left(p\right)}{k-p}pdp \end{cases}. \qquad (32)$$

Используя дифференциальные уравнения и преобразования (32), а также учтя, что

$$H = k\left(\int_0^{x_0} dx_1 + \int_{x_0}^{H/k} dx_2\right),$$

получим систему двух уравнений, определяющую предельные параметры плоских однородных откосов:



I: $\Delta E = E_{i+1} - E_i < 0$; $\Delta T = T_{i+1} - T_i = 0$ $\quad$ $\beta \geq \pi/4 + \varphi/2$; $\omega = \pi/4 + \varphi/2$

II: $\Delta E < 0$; $\Delta T < 0$ $\quad$ $\psi \leq \pi/4 + \varphi/2$; $\varepsilon = \pi/4 + \alpha/2 - \varphi/2$

III: $\Delta E = 0$; $\Delta T = 0$

Рисунок 4. Схема к построению поверхности скольжения и оценке устойчивости однородного откоса / Figure 4 | Illustration to the construction of sliding surface and to assessment of homogeneous slope stability.

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\mathrm{tg}\varphi} \left[\frac{\lambda\gamma(p-f)}{1+fp}\eta_1(p) - C\frac{1+p^2}{1+fp}\right]\frac{\eta_1'(p)}{k-p}dp + \\ \displaystyle\int\limits_{\mathrm{tg}\varphi}^{s}\left[\frac{\lambda\gamma(p-f)}{1+p^2}\eta_2(p) - C\right]\frac{\eta_2'(p)}{k-p}dp + \\ \displaystyle + \frac{2C^2}{\gamma f}\int\limits_{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}^{t}\left[\frac{(p^2-1)(p-f)}{f} - (1+p^2)\right]dp = 0 \\ \displaystyle\int\limits_{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\mathrm{tg}\varphi}\frac{\eta_1'(p)}{k-p}dp + \int\limits_{\mathrm{tg}\varphi}^{s}\frac{\eta_2'(p)}{k-p}dp = \frac{H}{\lambda k} \end{cases} . \quad (33)$$

Ширина призмы обрушения определится зависимостью:

$$a = \frac{2C}{\gamma f}\int\limits_{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}^{t} dp. \quad (34)$$

Для построения поверхности скольжения необходимо произвести интегрирование уравнений (32) при различных значениях верхнего предела. В результате будем последовательно получать координаты точек поверхности скольжения.

По результатам численного интегрирования были построены поверхности скольжения для некоторых значений углов откоса и внутреннего трения в предельном равновесии (рис. 5–10). Вертикальными линиями на рисунках отсечены точки поверхностей скольжения с углом наклона, равным углу внутреннего трения горных пород, а также границы участков откоса и горизонтальной площадки (бермы). Для построения поверхностей скольжения был принят пятиградусный интервал углов внутреннего трения.

В результате численного решения уравнений (33) определены предельные параметры плоских однородных откосов, а также вычислены отношения ширины призмы обрушения к высоте откоса a/H в предельном состоянии. Данные сведены в таблицу.

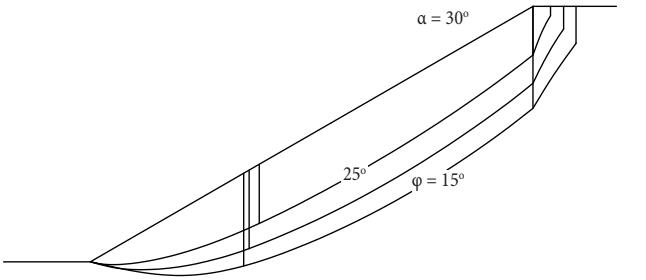


Рисунок 5. Поверхности скольжения в однородном плоском откосе для α = 30° / Figure 5 | Sliding surfaces in plane homogeneous slope for α = 30°.

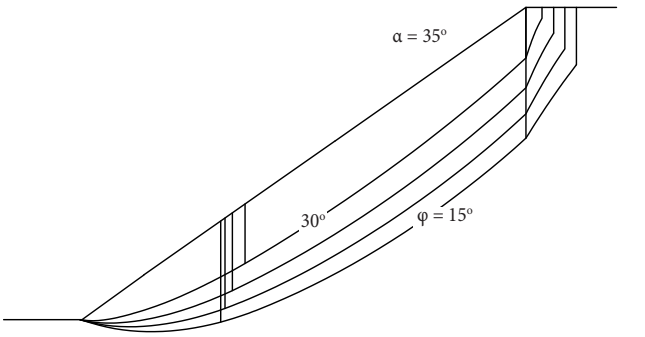


Рисунок 6. Поверхности скольжения в однородном плоском откосе для α = 35° / Figure 6 | Sliding surfaces in plane homogeneous slope for α = 35°.

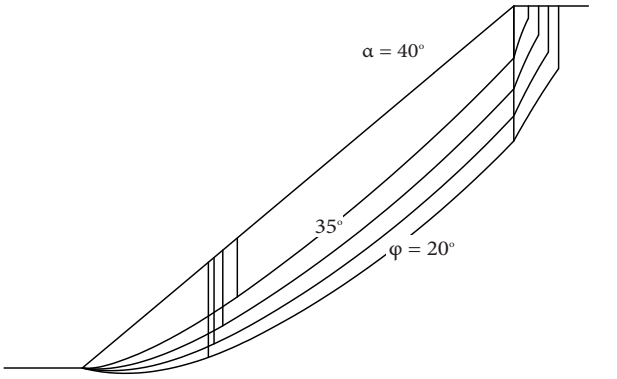


Рисунок 7. Поверхности скольжения в однородном плоском откосе для α = 40° / Figure 7 | Sliding surfaces in plane homogeneous slope for α = 40°.

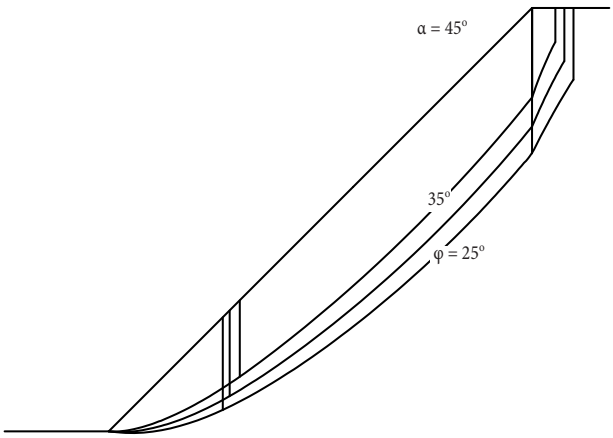


Рисунок 8. Поверхности скольжения в однородном плоском откосе для α = 45° / Figure 8| Sliding surfaces in plane homogeneous slope for α = 45°.

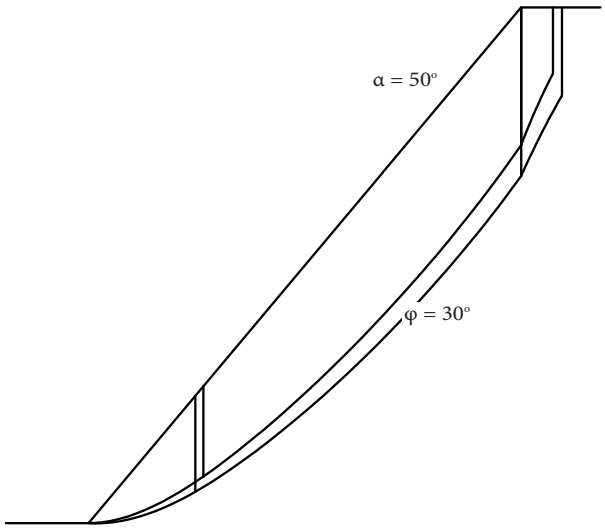


Рисунок 9. Поверхности скольжения в однородном плоском откосе для α = 50/ Figure 9 | Sliding surfaces in plane homogeneous slope for α = 50

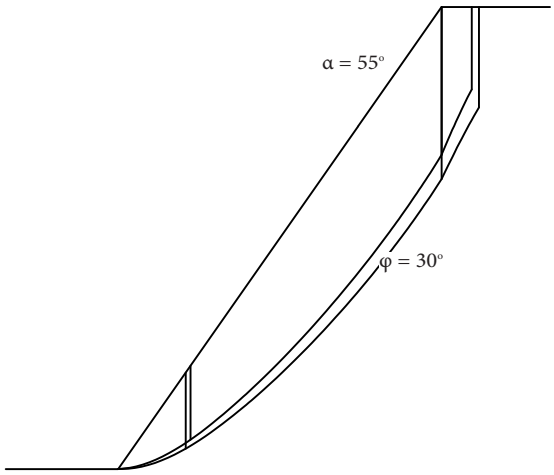


Рисунок 10. Поверхности скольжения в однородном плоском откосе для α = 55° / Figure 10 | Sliding surfaces in plane homogeneous slope for α = 55°.

Значения отношений *C*/γ*H* (сверху), *a*/*H* (по центру) и λγ/*C* (снизу) для предельно устойчивых плоских однородных свободных откосов

Угол устойчивого откоса α, град	Угол внутреннего трения φ, град: 15	20	25	30	35	40
20	0,0191 0,146 1,833	0 0 2*C*/γ				
25	0,0389 0,170 1,800	0,0145 0,096 1,776	0 0 2*C*/γ			
30	0,0558 0,169 1,743	0,0312 0,120 1,734	0,0118 0,069 1,716	0 0 2*C*/γ		
35	0,0705 0,162 1,671	0,0466 0,125 1,664	0,0263 0,089 1,665	0,0101 0,052 1,652	0 0 2*C*/γ	
40	0,0838 0,154 1,586	0,0607 0,124 1,576	0,0404 0,096 1,582	0,0231 0,069 1,595	0,0090 0,040 1,585	0 0 2*C*/γ
45	0,0964 0,147 1,486	0,0740 0,121 1,473	0,0540 0,098 1,477	0,0363 0,076 1,495	0,0210 0,055 1,519	0,0083 0,032 1,513
50	0,1088 0,142 1,371	0,0869 0,119 1,353	0,0672 0,098 1,354	0,0494 0,079 1,371	0,0335 0,062 1,402	0,0196 0,045 1,437
55	**0,1232** **0,144** **1,255**	*0,0999* *0,117* *1,215*	0,0805 0,098 1,212	0,0627 0,081 1,226	0,0465 0,065 1,257	0,0318 0,051 1,301
60	**0,1409** **0,151** **1,146**	**0,1174** **0,126** **1,093**	**0,0960** **0,103** **1,065**	*0,0764* *0,083* *1,061*	0,0600 0,068 1,088	0,0448 0,055 1,132
65	**0,1607** **0,156** **1,027**	**0,1368** **0,132** **0,962**	**0,1149** **0,111** **0,924**	**0,0947** **0,092** **0,907**	**0,0761** **0,074** **0,911**	*0,0589* *0,058* *0,936*
70	**0,1832** **0,157** **0,893**	**0,1589** **0,135** **0,821**	**0,1365** **0,116** **0,774**	**0,1157** **0,098** **0,749**	**0,0963** **0,081** **0,741**	**0,0781** **0,066** **0,751**
75	**0,2097** **0,154** **0,740**	**0,1849** **0,134** **0,663**	**0,1618** **0,117** **0,613**	**0,1402** **0,100** **0,582**	**0,1200** **0,085** **0,568**	**0,1008** **0,071** **0,567**
80	**0,2425** **0,143** **0,555**	**0,2167** **0,127** **0,482**	**0,1927** **0,111** **0,435**	**0,1701** **0,097** **0,405**	**0,1488** **0,083** **0,388**	**0,1285** **0,071** **0,382**
85	**0,2864** **0,118** **0,319**	**0,2590** **0,105** **0,265**	**0,2334** **0,093** **0,232**	**0,2093** **0,082** **0,211**	**0,1864** **0,071** **0,198**	**0,1645** **0,061** **0,192**
90	**0,3837** **0** **0**	**0,3501** **0** **0**	**0,3185** **0** **0**	**0,2887** **0** **0**	**0,2603** **0** **0**	**0,2332** **0** **0**

Анализ предельных поверхностей скольжения показывает, что при увеличении угла внутреннего трения кривизна поверхности сколь-

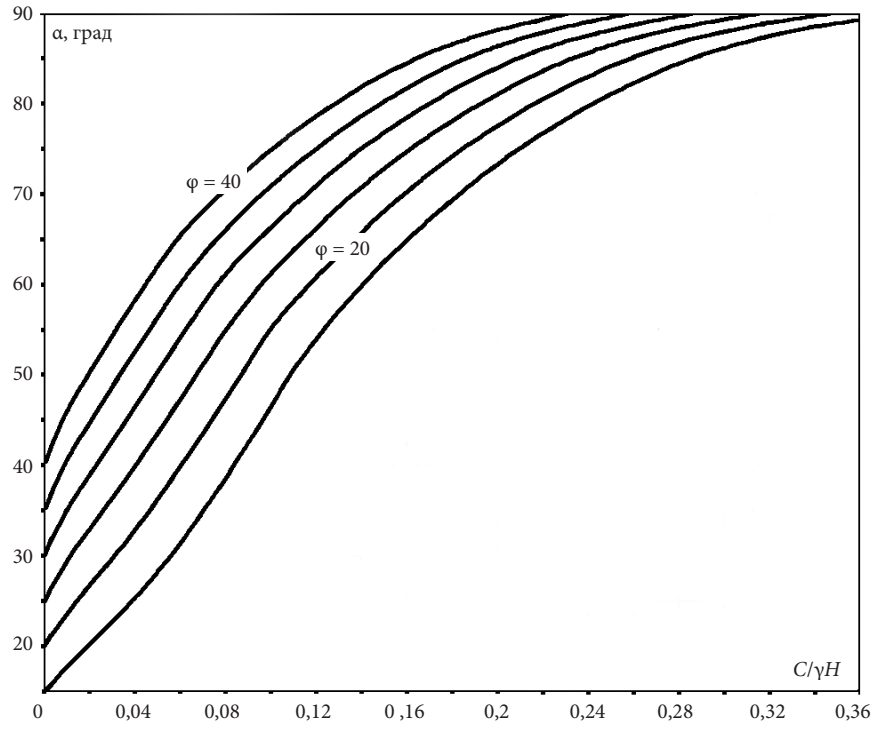


Рисунок 11. Номограмма устойчивости плоских однородных откосов / Figure 11 | Nomogram of stability of plane homogeneous slopes.

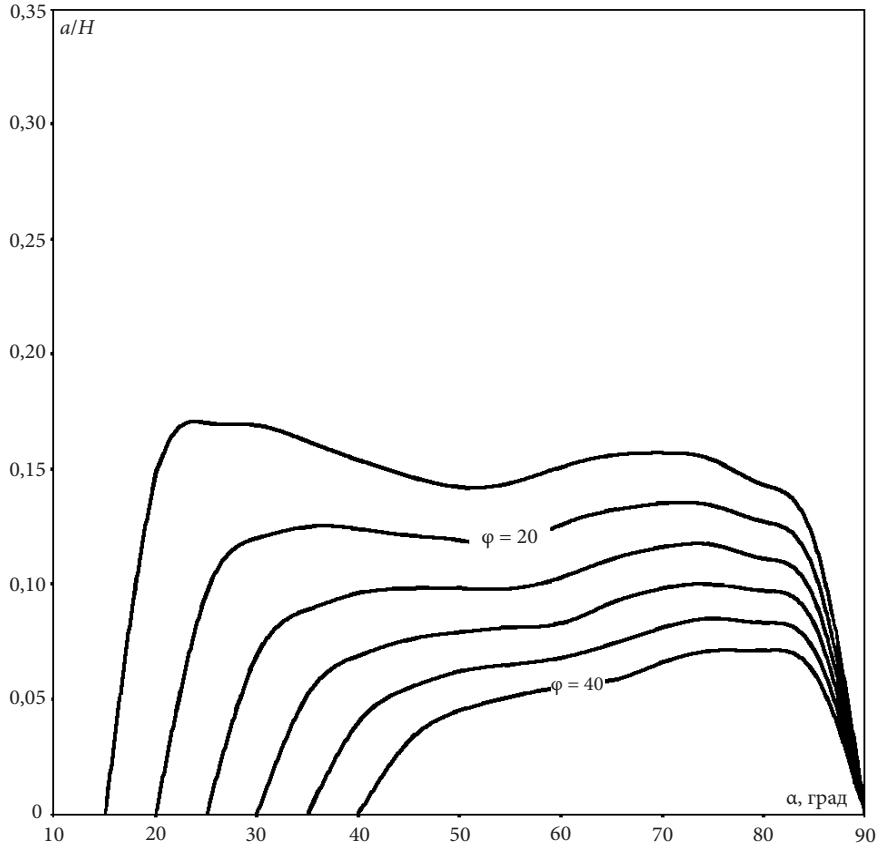


Рисунок 12. Номограмма для определения ширины призмы обрушения / Figure 12 | Nomogram for determining the width of a collapse prism

жения уменьшается и в пределе (при равенстве углов откоса и внутреннего трения) превращается в плоскость. При увеличении угла откоса поверхности скольжения, построенные для разных углов внутреннего трения, стягиваются воедино.

По данным таблицы построена номограмма устойчивости плоских однородных откосов (рис. 11).

Часто в практике открытых горных работ встаёт задача по определению ширины призмы обрушения, по данным таблицы построена номограмма для определения её величины (рис. 12).

Принято к публикации 27.02.2016

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов. 12-е изд. М.: Высш. шк., 2002. 416 с.
2. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. 2-е изд. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950. 296 с.
3. Маркеев А. П. О принципе наименьшего принуждения // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 1. С. 113–121.
4. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. Киев: гос. изд. техн. лит., 1963. 791 с.
5. Жабко А. В. Исследование закономерностей, определяющих геометрию поверхности скольжения в откосах и расчетные характеристики, в изотропных горных массивах: дис. … канд. техн. наук. Екатеринбург, 2009. 152 с.
6. Фисенко Г. Л. Устойчивость бортов карьеров и отвалов. М.: Недра, 1965. 378 с.
7. Соловьев Ю. И. Устойчивость откосов из гипотетического грунта // Тр. НИИЖТ. Вопросы инженерной геологии, оснований и фундаментов. 1962. Вып. 28. С. 83–97.
8. Дорфман А. Г. Вариационный метод исследования устойчивости откосов // Сб. ДИИТ. Вопросы геотехники. 1965. Вып. 9. С. 17–25.
9. Дорфман А. Г., Дудинцева И. Л. Расчет давления на подпорные стены при выпоре грунта по линии минимального сопротивления сдвигу // Сб. ДИИТ. Вопросы геотехники. 1972. Вып. 20. С. 68–75.

REFERENCES

1. Targ S. M. 2002, *Kratkii kurs teoreticheskoy mekhaniki: uchebnik dlya vtuzov* [Short Course of Theoretical Mechanics]. 416 p.
2. Lavrent'yev M. A., Lyusternik L. A. 1950, *Kurs variatsionnogo ischisleniya* [Variational calculus course]. 296 p.
3. Markeev A. P. 1998, O printsipe naimen'shego prinuzhdeniya [About the principle of least constraint]. *Sorosovskiy obrazovatel'nyy zhurnal – Soros Educational Journal*, no. 1, pp. 113–121.
4. Pisarenko G. S. 1963, *Soprotivleniye materialov* [Strength of materials]. 791 p.
5. Zhabko A. V. 2009, *Issledovanie zakonomernostey, opredelyayushchih geometriyu poverkhnosti skol'zheniya v otkosakh I raschetnyye kharakeristiki, v izotropnykh gornykh massivakh* [Research of laws that define the geometry of the slip surface in slopes and calculating characteristics in the isotropic mountain ranges]. 152 p.
6. Fisenko G. L. 1965, *Ustoichivost' bortov kar'erov I otvalov* [The stability of pit walls and dumps]. 378 p.
7. Solov'yev Yu. I. 1962, Ustoichivost' otkosov iz gipoteticheskogo grunta [The stability of slopes made of the hypothetical soil]. *Trudy NIIZhT. Voprosy inzhenernoy geologii, osnovaniy i fundamentov – Proceedings of JSC "Railway Research Institute"*, no. 28, pp. 83–97.
8. Dorfman A. G. 1965, Variatsionnyy metod issledovaniya ustoichivosti otkosov [The variational method of research of of slope stability]. *Sbornik DIIT. Voprosy geotechniki – Proceedings of Dnepropetrovsk National University. Geotechnical issues*, no. 9, pp. 17–25.
9. Dorfman A. G., Dudintseva I. L. 1972, Raschet davkeniya na podpornye steny pri vypore grunta po linii minimal'nogo soprotivleniya sdvigu [Calculation of pressure on retaining walls with pile heave along the line of minimum shear resistance]. *Sbornik DIIT. Voprosy geotechniki – Proceedings of Dnepropetrovsk National University. Geotechnical issues*, no. 20, pp. 68–75.

Андрей Викторович Жабко,
кандидат технических наук, доцент
zhabkoav@mail.ru
Уральский государственный горный университет,
Россия, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Andrey Viktorovich Zhabko,
PhD, Associate Professor
zhabkoav@mail.ru
Ural State Mining University,
Ekaterinburg, Russia