5. **Dugdale, D.S.** Yielding of steel sheets containing slits [Text] / D.S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8, №2. – P. 100 – 104.

6.**Herrmann, K. P.** Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading [Text] / K. P. Herrmann, V.V.Loboda, I.V. Kharun // Theor. and Appl. Fract. Mech. – 2004. – 42. – P. 335 – 348.

7. **Loboda, V.** Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding [Text] / V.Loboda, Y.Lapusta, A.Sheveleva // Int. J. Solids Struct. – 2010. – 44. – P. 5538–5553.

8. **Voloshko,** O. Analytical and numerical study of cohesive zones for a crack in an adhesive layer between identical isotropic materials[Text] / O. Voloshko, Y. Lapusta, V. Loboda // Eng. Fract. Mech. – 2010. – Vol.77. – P. 2577–2592.

Надійшла до редколегії 01.07.2016

УДК 515.2:519.6

Ю.И.Николаенко[1], С.В. Моисеенко[2], О.А.Самойленко[1]

[1]Херсонский физико-технический лицей при ХНТУ и ДНУ
[2]Херсонский национальный технический университет

ПОЛНЫЕ БАЗИСЫ БИКУБИЧЕСКОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Статья посвящена построению наиболее широкого семейства базисов бикубического квадратного конечного элемента и выделению из него квазигармонических базисов. Получены пятипараметрическое семейство полных базисов и трехпараметрическое семейство базисов бикубического конечного элемента, полных по отношению ко всем гармоническим полиномам до третьей степени включительно. Из трехпараметрического семейства выделено два квазигармонических базиса, которые с высокой точностью аппроксимируют гармонические функции. При построении базисных функций в виде бикубических полиномов были применены обязательные условия: функция в своем узле равна единице, в других – нулю, и к ним добавлено условие полноты, которое обеспечивает точную аппроксимацию линейных функций, а также учтена симметрия (геометрия) конечного элемента. В качестве дополнительной меры гармоничности базисных функций взята сумма квадратов отклонений значений лапласианов базисных функций от нуля. Для сравнения свойств рассмотренных базисов вычислены: относительная погрешность, среднеквадратическое отклонение, матрицы Грама этих базисов и числа обусловленности.

Ключевые слова: бикубический конечный элемент, квазигармонический базис, аппроксимация гармонических функций.

Статтю присвячено побудові найбільш широкої сім'ї базисів бікубічного квадратного скінченного елемента та виділенню з нього квазігармонічних базисів. Одержано п'ятипараметричну сім'ю повних базисів і трипараметричну сім'ю базисів бікубічного скінченного елемента, повних щодо всіх гармонічних поліномів до третього степеня включно. Із трипараметричної сім'ї виділено два квазігармонічні базиси, які дозволяють апроксимувати гармонічні функції з достатньо високим ступенем точності. Під час побудови базисних функцій у вигляд бікубічних поліномів було застосовано обов'язкові умови: функція у своєму вузлі дорівнює одиниці, в інших – нулю, і до них додано умову повноти, яка забезпечує точну апроксимацію лінійних функцій, а також враховано симетрію (геометрію) скінченного елемента. Як додаткову міру гармонічності базисних функцій було взято суму квадратів відхилень значень лапласіанів базисних функцій від нуля. Для порівняння властивостей розглянутих базисів обчислено: відносну похибку, середньоквадратичне відхилення, матриці Грама цих базисів і число обумовленості.

Ключові слова: бікубічний скінченний елемент, квазігармонічний базис, апроксимація гармонічних функцій.

© Николаенко Ю.И., Моисеенко С.В., Самойленко О.А., 2016

The work is dedicated to building the broadest family of basises of bicubic finite element and the allocation of its quasi-harmonic basises. The five-parameter family of complete basises and three-parameter family of bicubic finite element basises, complete with respect to all harmonic polynomials up to the third degree inclusive were built. Two quasi-harmonic basises that accurately approximate the harmonic functions were extracted from the three-parameter family. Mandatory conditions such as: the function of its site is one, in otherwise - zero, were used in the construction of the basis functions in the form of bicubic polynomials. Completeness condition was added to these conditions, which provides an accurate approximation of linear functions, as well as the symmetry (geometry) finite element was taken into account. The sum of squared deviations Laplacians values of basis functions from zero was taken as an additional measure of the basis functions harmony. Relative error, mean-square deviation, the Gram matrix of these bases and the condition number were calculated for comparison of properties of considered basises.

Key words: bicubic finite element, quasiharmonic basis, harmonic approximation functions.

Постановка проблемы. При решении ряда краевых задач математической физики методом конечных элементов (МКЭ) целесообразно применять конечно-элементные базисы, которые позволяют аппроксимировать гармонические функции с высокой точностью. Поиск эффективных методов аппроксимации и, как следствие, моделей высокой степени точности аппроксимации является актуальной задачей.

Анализ публикаций по теме исследования. В данной работе исследован конечный элемент (КЭ) с квадратным носителем с двенадцатью регулярно расположенными узлами на границе (рис. 1).

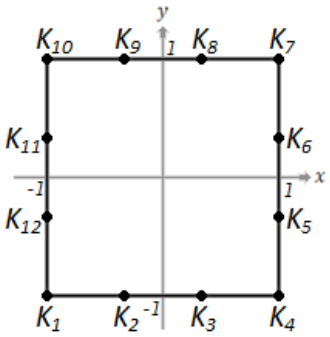

Рис. 1. Бикубический КЭ

КЭ (рис. 1) называют бикубическим, если его базисные функции (БФ) на каждой из сторон квадрата являются полиномами третьей степени [1]. Это гарантирует согласованность аппроксимаций на двух соседних элементах. Бикубический КЭ встречаем еще в работе И.Эргатудиса, Б.Айронса, О.Зенкевича [2], изданной в 1968 г. БФ этого элемента $N_1(x,y)$, $N_2(x,y)$ для узлов K_1 и K_2 соответственно имеют вид

$$N_1(x,y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9(x^2+y^2)-10),$$
$$N_2(x,y) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x). \qquad (1)$$

Все остальные БФ могут быть получены с помощью отображения функций относительно осей симметрии квадрата.

Впоследствии, в работах А.Н. Хомченко и его учеников, был построен ряд отдельных базисов и даже бесконечные семейства базисов бикубического КЭ [3;4].

В 2009 г. в статье [5] было построено однопараметрическое семейство полных базисов бикубического КЭ, БФ которого имеют вид

$$N_1(x,y)=\frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9(x^2+y^2)+(72p+9)(xy+x+y)+72p-1),$$
$$N_2(x,y)=\frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-8p-6x-(8p+1)y). \quad (2)$$

Большинство ранее построенных базисов бикубического КЭ можно получить из базиса (2) при отдельных значениях параметра p. Например, классический базис (1) можем получить при p = -1/8.

В 2011 г. в публикации [6] был построен квазигармонический (КГ) базис бикубического КЭ, приспособленный для аппроксимации гармонических функций:

$$N_{KГ_1}(x,y)=\frac{1}{4928}(1-x)(1-y)\begin{pmatrix}161-81(x+y)+216xy-396(x^2+y^2)+\\+297(x^2y+xy^2)+2079x^2y^2\end{pmatrix},$$
$$N_{KГ_2}(x,y)=\frac{9}{9856}(1-x^2)(1-y)(119-33x-90y+198xy+99y^2-693xy^2). \quad (3)$$

Отметим, что базис (3) не является частным случаем семейства (2).

К числу обязательно выполняемых требований при построении базисных функций относятся

$$N_k(x_i,y_i)=\delta_{ik}=\begin{cases}1, i=k,\\0, i\neq k,\end{cases} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n}N_k(x,y)=1, \quad (5)$$

где (x_i, y_i) – координаты узлов элемента; δ_{ik} – символ Кронекера; n – количество узлов элемента.

Иногда к этим условиям добавляют условие полноты, которое обеспечивает точную аппроксимацию линейных функций [7]:

$$x=\sum_{k=1}^{n}x_kN_k(x,y), \qquad y=\sum_{k=1}^{n}y_kN_k(x,y). \quad (6)$$

Приближенное решение задачи на каждом КЭ строится в виде линейной комбинации БФ:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{n}u_kN_k(x,y), \quad (7)$$

где n – количество узлов элемента; u_k – значение искомой функции в k-м узле элемента; $N_k(x,y)$ – БФ, соответствующая k-му узлу элемента.

В данной статье особое внимание уделено аппроксимации гармонических функций, которые удовлетворяют одному из основных уравнений математической физики – уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0. \quad (8)$$

Цель написания работы. Построить наиболее широкое семейство полных базисов бикубического КЭ и из этого семейства выделить те базисы, которые позволяют аппроксимировать гармонические функции с высокой точностью.

Основная часть. Рассмотрим бикубический КЭ размером 2×2, симметрично расположенный относительно начала декартовой системы координат (рис. 1).

Построим БФ $N_1(x,y)$ и $N_2(x,y)$ конечного элемента, которые соответствуют узлам K_1 и K_2. Все остальные БФ можно получить из $N_1(x,y)$ и $N_2(x,y)$ с помощью отражения относительно осей симметрии КЭ. БФ $N_1(x,y)$ и $N_2(x,y)$ строим в виде бикубических полиномов, то есть таких, которые на каждой стороне квадрата являются полиномами третьей степени от незафиксированной переменной. Естественно требовать, чтобы БФ $N_1(x,y)$ была симметричной относительно диагонали квадрата K_1K_7, поэтому функция должна содержать только симметричные комбинации переменных x и y.

В общем случае БФ бикубического КЭ имеют вид

$$N_1(x,y)=(1-x)(1-y)\begin{pmatrix} a_1+a_2(x+y)+a_3(x^2+y^2)+a_4xy+ \\ +a_5(x^2y+xy^2)+a_6x^2y^2 \end{pmatrix},$$
$$N_2(x,y)=(1-x^2)(1-y)(b_1+b_2x+b_3y+b_4xy+b_5y^2+b_6xy^2), \tag{9}$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – вещественные числовые параметры.

Применив условия (4) – (6) для БФ, получим систему линейных уравнений, решив которую получим следующие соотношения между параметрами:

$$\begin{cases} a_1=a_4-2a_5-\dfrac{5}{16}+a_6, \quad a_4=-a_6+2a_5+2b_5-2b_3, \\ a_3=a_5+\dfrac{9}{32}-a_6, \quad a_2=a_4-a_5, \quad b_1=\dfrac{9}{32}+b_3-b_5, \\ b_4=-3a_5+3a_6+b_6-3b_5, \qquad b_2=-\dfrac{27}{32}+b_4-b_6. \end{cases} \tag{10}$$

БФ приобретают вид

$$N_1(x,y)=\frac{1}{32}(1-x)(1-y)\begin{pmatrix} 64(b_5-b_3)-10+32(a_5-a_6+2(b_5-b_3))(x+y)+ \\ +32(2a_5-a_6-2b_3+2b_5))xy+(9-32a_6)(x^2+y^2)+ \\ +32a_5(xy^2+x^2y)+32a_6x^2y^2 \end{pmatrix},$$
$$N_2(x,y)=-\frac{1}{32}(1-x^2)(1-y)\begin{pmatrix} 32(b_5-b_3)-9+(27+96(a_5-a_6+b_5))x-32b_3y+ \\ +32(3a_5-3a_6+3b_5-b_6))xy-32b_5y^2-32b_6xy^2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где a_5, a_6, b_3, b_5, b_6 – действительные числовые параметры.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Существует пятипараметрическое семейство полных базисов бикубического КЭ, БФ которых задаются выражениями (11).

Отметим, что x и y являются основными однородными гармоническими полиномами первой степени [8], $2xy$ и x^2-y^2 – основными однородными гармоническими полиномами второй степени, а x^3-3xy^2 и y^3-3x^2y – третьей степени.

Условия полноты по отношению к однородным гармоническим полиномам второй и третьей степени имеют вид (12) и (13) соответственно:

$$\sum_{k=1}^{12} 2x_k N_k(x,y) = 2xy, \qquad \sum_{k=1}^{12} (x_k^2 - y_k^2) N_k(x,y) = x^2 - y^2, \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{12} (x_k^3 - 3x_k y_k^2) N_k(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad \sum_{k=1}^{12} (y_k^3 - 3y_k x_k^2) N_k(x,y) = y^3 - 3yx^2. \tag{13}$$

Данные условия для БФ (11) выполняются при $b_6 = -3a_6/2$ и $a_5 = a_6 - 4b_5$. Окончательно БФ приобретают вид

$$N_1(x,y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)\begin{pmatrix} 64(b_5 - b_3) - 10 - 64(b_5 + b_3)(x+y) + (9 - 128b_5)(x^2+y^2) + \\ +32(a_6 - 2b_3 - 6b_5)xy + 32(a_6 - 4b_5)(xy^2 + x^2y) + 32a_6x^2y^2 \end{pmatrix},$$
$$N_2(x,y) = -\frac{1}{32}(1-x^2)(1-y)\begin{pmatrix} 32(b_5 - b_3) - 9 + (27 - 288b_5)x - 32b_3y + \\ +48(a_6 - 6b_5)xy - 32b_5y^2 + 48a_6xy^2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где a_6, b_3, b_5 – действительные числовые параметры.

В результате получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. Существует трехпараметрическое семейство базисов бикубического КЭ, БФ которых задаются выражениями (14), являющимися полными по отношению ко всем гармоническим полиномам до третьей степени включительно.

Для гармонической функции $U(x,y)$ имеет место известная формула усреднения (15) на 8-узловом квадратном элементе (рис. 2) [9]:

$$U(R_0) = \frac{1}{5}\sum_{i=2,4,6,8} U(R_i) + \frac{1}{20}\sum_{i=1,3,5,7} U(R_i) + O(h^6), \tag{15}$$

где h – расстояние между соседними узлами квадрата.

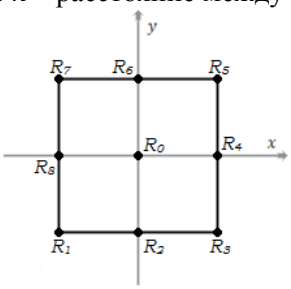

Рис. 2 Схема КЭ для усреднения по формуле (15) на 8-узловом КЭ

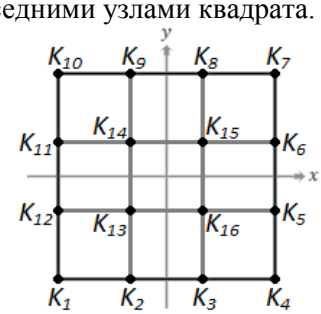

Рис. 3 Схема КЭ для усреднения по формуле (15) на 12-узловом КЭ

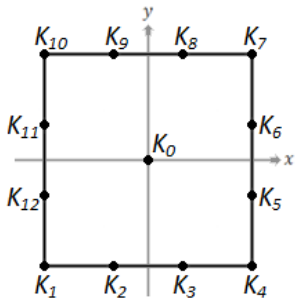

Рис. 4 Схема КЭ для усреднения по формуле (16) на 12-узловом КЭ

Для БФ $N_1(x, y)$ применим формулу (15), в которой пренебрежем слагаемым $O(h^6)$, для четырех внутренних точек квадрата (рис. 3). Получим систему линейных уравнений, решив которую получим следующие значения параметров: $a_6 = 27/64$, $b_3 = -405/4928$, $b_5 = 81/896$.

В результате получим квазигармонический базис (3), построенный в работе [6] другим путем.

Построим альтернативный квазигармонический базис.

Аналогично формуле (15) можно получить формулу усреднения (16) для гармонической функции $U(x,y)$ на 12-узловом КЭ (рис. 4):

$$U(K_0)=\frac{14}{704}\sum_{i=1,4,7,10}U(K_i)+\frac{81}{704}\sum_{\substack{i=2,3,5,6,\\8,9,11,12}}U(K_i)+O(h^6). \tag{16}$$

Применив формулу (16) для БФ $N_1(x,y)$ и $N_2(x,y)$, пренебрегая слагаемым $O(h^6)$, получим систему линейных уравнений, решением которой будет следующая зависимость между параметрами: $b_3 = -117/704+b_5$.

В качестве дополнительной меры гармоничности БФ возьмем сумму квадратов отклонений значений лапласианов БФ от нуля:

$$\begin{aligned} z(a_6,b_5)&=\sum_{i=1}^{12}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\Delta(N_i(x,y))\right)^2 dx\,dy=\\ &=\frac{42432}{175}a_6^2+\frac{846336}{35}b_5^2-\frac{1404}{5}a_6-\frac{24624}{5}b_5+\frac{68877}{176}. \end{aligned} \tag{17}$$

Для гармонического базиса $z(a_6,b_5) = 0$, поэтому потребуем, чтобы выражение (17) было минимальным. Функция (17) имеет единственный минимум при следующих значениях параметров: $a_6 = 315/544$, $b_5 = 189/1856$. Таким образом, БФ квазигармонического альтернативного (КГА) базиса примут вид

$$\begin{aligned} N_{КГА_1}(x,y)&=\frac{1}{173536}(1-x)(1-y)\begin{pmatrix}3451-13005(x+y)+16794xy-21879(x^2+y^2)+\\+29799(x^2y+xy^2)+100485x^2y^2\end{pmatrix},\\ N_{КГА_2}(x,y)&=-\frac{9}{347072}(1-x^2)(1-y)\begin{pmatrix}-4437-2805x+2482y-1448xy-\\-3927y^2+33495xy^2\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

Графики БФ квазигармонического альтернативного базиса (18) представлены ниже (рис. 5 – 6).

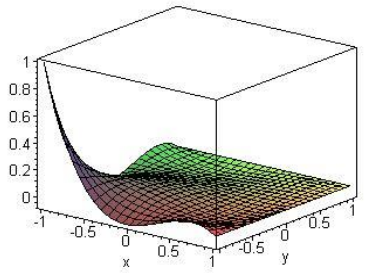

Рис. 5. График БФ $N_{КГА1}(x,y)$

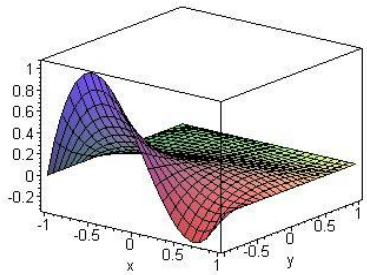

Рис. 6. График БФ $N_{КГА2}(x,y)$

Тестирование построенных базисов будем проводить в пяти точках (рис. 7) внутри элемента.

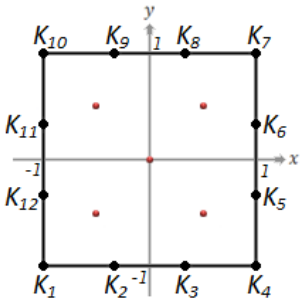

Рис. 7. Расчетные точки

С помощью известной гармонической функции $u(x,y)=ln((x-3)^2+(y+1)^2)$ в узлах K_1-K_{12} на границе элемента рассчитаем значение функции $u(x,y)$ и применим их для расчета приближенных значений функции по формуле (7) в пяти внутренних точках (рис.7), воспользовавшись классическим (1), оптимальным (2) (базис считается оптимальным при $p=1/32$) [11], квазигармоническим (3) и альтернативным (17) базисами.

Относительную погрешность рассчитаем по формуле $\varepsilon = \left|\frac{u-\bar{u}}{u}\right|$, где u – точное значение гармонической функции; $\bar{u}$ – приближенное значение интерполяционной функции.

Среднеквадратическое отклонение σ интерполяционной функции от гармонической рассчитаем по формуле

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(u-\bar{u})^2\,dxdy}\,. \qquad (19)$$

Результаты расчётов представим ниже (табл. 1).

Таблица 1

Точные и приближенные значения функции *u*(*x*,*y*)

(*x*,*y*)	*u*	$\bar{u}$			
		Базис (1)	Базис (2) p=1/32	Базис (3)	Базис (18)
$\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	2,674149	2,672294	2,676388	2,674172	2,673808
		ε=0,069%	ε=0,12%	ε=0,00086%	ε=0,013%
$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	2,140066	2,139872	2,144967	2,140292	2,139311
		ε=0,0091%	ε=0,23%	ε=0,011%	ε=0,035%
$(0;0)$	2,302585	2,294023	2,303080	2,302916	2,302586
		ε=0,37%	ε=0,022%	ε=0,014%	ε=0,000047%
$\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$	2,525729	2,517293	2,522388	2,525121	2,525076
		ε=0,33%	ε=0,13%	ε=0,024%	ε=0,026%
$\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$	1,871802	1,861125	2,677388	1,871008	1,871656
		ε=0,57%	ε=0,3%	ε=0,042%	ε=0,0078%
σ		0,0056	0,003	0,00058	0,00064

Для сравнения свойств рассмотренных базисов вычислены матрицы Грама этих базисов

$$M_{ik} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_i(x,y)N_k(x,y)dxdy \qquad (20)$$

и числа обусловленности *v(M)* этих матриц в евклидовой норме (табл. 2). Число обусловленности матрицы играет важную роль при численном решении различных прикладных задач, являясь показателем устойчивости их решения [10]. Напомним, что лучшим считается базис, число обусловленности матрицы Грама которого меньше.

Таблица 2

Число обусловленности матрицы Грама

Базис	Базис (1)	Базис (2) *p=1/32*	Базис (3)	Базис (18)
v(*M*)	83,98	53,76	41,25	43,84

Из результатов (табл. 1) видно, что погрешности аппроксимации, полученные при применении квазигармонических базисов (3) и (18), на порядок меньше, чем при применении традиционного базиса (1) и базиса (2). Кроме того, следует отметить, что и числа обусловленности матриц Грама для квазигармонических базисов заметно меньше, чем для базисов (1) и (2).

Выводы. В работе построено пятипараметрическое семейство полных базисов бикубического КЭ и трехпараметрическое семейство базисов бикубического КЭ, полных по отношению ко всем гармоническим полиномам до третьей степени включительно. Из трехпараметрического семейства выделено два квазигармонических базиса, которые с высокой точностью аппроксимируют гармонические функции.

Библиографические ссылки

1. **Стренг, Г.** Теория метода конечных элементов [Текст] / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

2. **Ergatoudis, I.** Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis [Text] / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // International J. of Solids and Structures. – 1968. January. – Vol. 4, is. 1. – P. 31 – 42.

3. **Хомченко, А.Н.** Некоторые вероятностные аспекты МКЭ [Текст] / А.Н. Хомченко ; Ив.-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 9 с. Деп. в ВИНИТИ 18.03.82, № 1213.

4. **Литвиненко, Е.И.** Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей [Текст]: дис. … канд. техн. наук: 15.13.06 / Литвиненко Елена Ивановна. – Херсон, 1999. – 172 с.

5. **Астионенко, И.А.** Обратные задачи серендиповых аппроксимаций [Текст]/ И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та, Херсон, 2009. – Вып. 2(35). – С. 36 – 40.

6. **Шумеев, М. А.** Квазигармонический базис 12-узлового квадратичного элемента [Текст] / М.А. Шумеев, Ю.И. Николаенко // Пошук молодих. Зб. мат. Всеукр. студ. науково-практ. конф. «Актуальні питання методики навчання природничо-мат. дисциплін»; укл. В.Д. Шарко. – Херсон, 2011. – Вип. 8. – С. 267 – 270.

7. **Маслов, Л.Б.** Курс лекций. Численные методы механики [Текст] / Л.Б. Маслов; Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново: ИГЭУ, 1999. – 106 с.

8. **Математическая энциклопедия** [Текст]. Т.1 : А - Г / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1977. – 1152 с.

9. **Люстерник, Л.А.** О разностных аппроксимациях оператора Лапласа [Текст] / Л.А. Люстерник // Успехи мат. наук. – 1954. – Т.9, вып. 2(60). – С. 3– 51.

10. **Форсайт, Дж.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений [Текст] / Дж. Форсайт, К. Молер. – М.: Мир, 1969. – 168 с.

11. **Астіоненко, І. О.** Моделі наближення функцій багатопараметричними поліномами серендипової сім'ї [Текст]: дис.... канд. фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Астіоненко І. О.; ДВНЗ «Запоріз. нац. ун-т». – Запоріжжя, 2012. – 250 с. – укр.

Надійшла до редколегії 29.07.2016

УДК 539.3

Р. Р. Лабибов, Ю. А. Черняков

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НА ПЛОЩАДКЕ ТЕКУЧЕСТИ

Предложен обобщенный вариант теории течения с комбинированным упрочнением для описания пластического деформирования малоуглеродистой стали, на диаграмме одноосного растяжения которой наблюдается площадка текучести в условиях мягкого нагружения и пик-зуб при жестком нагружении. Теория построена на предположении, что резкое падение напряжения на пик-зубе вызывается разупрочнением, связанным с освобождением дислокаций. Продемонстрировано, что такое представление механического поведения приводит к неустойчивому поведению материала и, как следствие, – локализации пластической деформации в форме полос сдвига Людерса–Чернова. Рассмотрен случай одноосного мягкого растяжения с акцентом на том, что пластическое деформирование на площадке текучести связано с продвижением фронта распространения полос Людерса–Чернова. Данный процесс представлен в виде медленной пластической волны, которая разделяет образец на область пластического деформирования, где достигнута деформация Людерса, и область упругого деформирования. Доказано, что этот подход в сочетании с предложенной теорией поведения материала в точке позволяет описать пластическое деформирование на площадке текучести и последующее упрочнение, а также эффект Баушингера на площадке текучести и на участке упрочнения при циклическом нагружении.

Ключевые слова: предел текучести, площадка текучести, полосы Людерса–Чернова, потеря устойчивости, эффект Баушингера.

Запропоновано узагальнений варіант теорії плинності з комбінованим зміцненням для опису пластичного деформування маловуглецевої сталі, на діаграмі одноосьового розтягнення якої виявлено поличку плинності в умовах м'якого навантаження та пік-зуб в умовах жорсткого навантаження. Теорію побудовано на припущенні, що різке зменшення напружень на пік-зубі обумовлене знеміцненням, пов'язаним із вивільненням дислокацій. Продемонстровано, що такий опис механічної поведінки призводить до нестійкого матеріалу і, як наслідок, – локалізації пластичної деформації у формі смуг Людерса–Чернова. Розглянуто випадок одноосьового м'якого розтягнення з акцентом на тому, що процес пластичного деформування на поличці плинності пов'язаний із просуванням по зразку фронту смуг Людерса–Чернова. Цей процес описано у формі повільної хвилі пластичності, що ділить зразок на область пластичного деформування, де досягнуто деформацію Людерса, та область пружного деформування. Доведено,

© Лабибов Р. Р., Черняков Ю. А., 2016