6. **Копченов, В.И.** К использованию существенно неравномерных сеток при численном решении уравнений [Текст]/В.И. Копченов, А.Н. Крайко, М.П. Левин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1982. – Т. 22. – № 6. – С. 1457–1467.

7. **Копченов, В.И.** Неявная итерационная схема для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости [Текст]/В.И. Копченов, Д.А. Никифоров // Там же. – 1994. – Т. 34. – № 8–9. – С. 1335–1343.

8. **Кравец, Е.В.** Анализ экспериментальных и численных исследований вихревых течений в трехмерных кавернах [Текст]/Е.В. Кравец, А.А. Кочубей //Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Серія Механіка. – 2013. – Т. 21. – № 5. – Вып. 17. – С. 51–63.

9. **Кравец, Е.В.** Сравнительный анализ численных и аналитических исследований циркуляционных двумерных течений в кавернах [Текст]/Е.В. Кравец, А.А. Кочубей //Техн. механика. – 2012. – № 1. – С. 38–55.

10. **Кочубей, А.А.** Численное моделирование процессов конвективного переноса на основе метода конечных элементов [Текст] /А.А. Кочубей, А.А. Рядно. – Д.: Изд-во ДГУ, 1991. – 228 с.

11. **Курант, Г.** Сверхзвуковое течение и ударные волны [Текст] /Г. Курант, К. Фридрихс; перевод с англ. А.С. Компанейца. – М.: Изд-во иностр. лит., 1950. – 426 с.

12. **Пасконов, В.М.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена /В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

13. **Полежаев, В.И.** Метод конечных элементов в задачах гидромеханики, тепло- и массообмена [Текст] /В.И. Полежаев, А.И. Федосеев. – М., 1980. – Препринт/ АН СССР. Ин-т проблем механики; № 160. – 72 с.

14. **Симуни, Л.М.** Численное решение задачи движения жидкости в прямоугольной яме [Текст] / Л.М. Симуни // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1965. – № 6. – С. 106–108.

Надійшла до редколегії 15.12.2015

УДК 532.59

О.Г. Гоман, В.А. Катан

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖИДКОСТИ И НАКЛОННОЙ ПЛАСТИНКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА ЕЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЗОНЫ ОТРЫВА

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии жидкости и наклонной пластинки, находящейся на ее свободной поверхности, сведенная к краевой смешанной задаче для некоторой функции комплексной переменной, связанной с комплексным потенциалом течения, которое возникает в результате ударного взаимодействия. Продемонстрировано, что в такой постановке задача допускает аналитическое решение в виде квадратур. Показано, что полученные при этом интегралы в случае предельных переходов в окрестности особых точек – точках стыка граничных условий различного типа – являются расходящимися и должны трактоваться в смысле конечной части по Адамару. В статье задача об определении положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии наклонной пластинки и жидкости сведена к решению трансцендентного уравнения относительно координаты начальной точки отрыва с применением формул Адамара – Манглера для полученных расходящихся интегралов. Определены положения зон инерционного отрыва течения для широкого диапазона углов наклона пластинки к свободной поверхности жидкости, а также гидродинамические распределенные и суммарные характеристики пластинки. Авторами детально рассмотрены вопросы, связанные с определением положения зоны отрыва жидкости от наклонной пластинки.

Ключевые слова: отрыв течения, удар, трансцендентное уравнение, формулы Адамара – Манглера, наклонная пластинка

© Гоман О.Г., Катан В.А., 2016

Розглянуто задачу про ударну взаємодію рідини та похилої пластинки, розташованої на її вільній поверхні, зведену до крайової змішаної задачі для деякої функції комплексної змінної, пов'язаної з комплексним потенціалом течії, яка виникає в результаті ударної взаємодії. Продемонстровано, що в такій постановці задача має аналітичний розв'язок у вигляді квадратур. Доведено, що одержані при цьому інтеграли у випадку граничних переходів в околі особливих точок – точок стику граничних умов різного типу – є розбіжні і їх слід трактувати в сенсі кінцевої частини за Адамаром. Задачу про визначення положення зони відриву течії у випадку ударної взаємодії похилої пластинки та рідини зведено до розв'язання трансцендентного рівняння відносно координати початкової точки відриву із застосуванням формул Адамара–Манглера для одержаних розбіжних інтегралів. У широкому діапазоні кутів нахилу пластинки до вільної поверхні рідини знайдено положення зон інерційного відриву течії, а також гідродинамічні розподілені та сумарні характеристики пластинки. Автори детально розглянули питання, пов'язані з визначенням положення зони відриву рідини від похилої пластинки.

Ключові слова: відрив течії, удар, трансцендентне рівняння, формули Адамара – Манглера, похила пластинка.

A problem of impact interaction of fluid and an inclined plate which located on its free surface is reduced to a boundary value problem for a some-function of complex variable associated with a complex potential of the flow due to impact interaction. In this formulation, the problem admits an analytical solution in the form of quadrature. In this case, the integrals obtained in the boundary transitions near singular points – junction points of the boundary conditions of various types – are divergent and must be interpreted in the sense of Hadamard finite part. The problem of determining the position of the separation zone at a flow impact interaction of inclined plate and liquid is reduced to the solution of the transcendental equation with respect to the coordinates of the initial point of separation using formulas Hadamard - Manglera received for divergent integrals. The position of the inertial flow separation zones in the wide range of the angles for an inclined plate, distributed and total hydrodynamic characteristics of the plate are found. The question deals with determining the position of the inertial flow separation zones for inclined plate is considered by the authors in the first part.

Key words: separation of flow, impact, transcendental equation, Hadamard–Manglera formulas, inclined plate.

Введение. Исследование гидродинамического ударного взаимодействия твердых тел со свободной поверхностью жидкости остается актуальным в связи с широким применением его результатов в современной инженерной гидромеханике для улучшения эксплуатационных характеристик высокоскоростных гидродинамических аппаратов и их рулевых устройств. В работе [1] получено аналитическое решение задачи об ударном взаимодействии жидкости и наклонной пластинки, находящейся на ее свободной поверхности, в виде квадратур, а публикация [2] содержит частный случай данной задачи для угла наклона пластинки в 45^0 к свободной поверхности, в котором аналитическое решение может быть представлено через элементарные функции.

Постановка математической задачи. Пусть наклонная пластинка шириной b плавает под углом $\alpha\pi$ на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся в покое и занимающей полупространство. Ось Oy декартовой системы координат направим по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней, а ось Ox – вдоль свободной поверхности. Предположим, что ударные импульсы подействовали так, что в результате удара элементы пластинки приобрели скорость

$$\overline{V} = (U_0 - \omega_z y)\vec{i} + (V_0 + \omega_z x)\vec{j} ,$$

где U_0 – поступательная скорость вдоль оси Ox; V_0 – поступательная скорость

вдоль оси Oy; ω_z – угловая скорость. Схема к рассматриваемой задаче приведена на рис. 1, на котором жидкость занимает верхнюю полуплоскость $y \geq 0$.

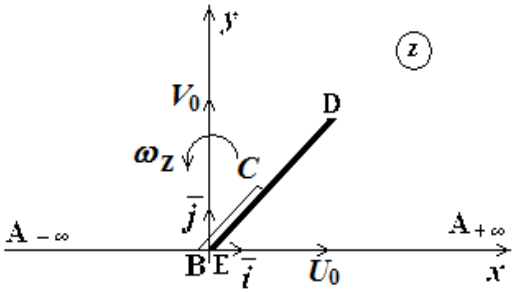

Рис. 1. Область решения задачи с учетом зоны отрыва течения

В предположении о наличии отрыва условие безотрывности обтекания распространяется только на участке контура *CDE*, причем положение точки *C* заранее неизвестно и имеет вид

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{CDE} = \overline{V}\cdot\overline{n}\,.$$

На участке *CD* имеем

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{CD} = \overline{V}\cdot\overline{n}_r = V_{n_r} = -U_0\sin\alpha\pi + V_0\cos\alpha\pi + \omega_z\left(x\cos\alpha\pi + y\sin\alpha\pi\right),$$

а на участке *DE* –

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{DE} = \overline{V}\cdot\overline{n}_f = V_{n_f} = U_0\sin\alpha\pi - V_0\cos\alpha\pi - \omega_z\left(x\cos\alpha\pi + y\sin\alpha\pi\right).$$

На свободной границе – оси *Ox* и участке отрыва *BC* – имеем в качестве условия равенство нулю импульсивного давления, то есть

$$\varphi = 0\,.$$

Следовательно, мы получили смешанную задачу для гармонической функции – потенциала скоростей φ.

На участке безотрывного обтекания *EDC* для функции тока ψ с точностью до несущественной константы запишем выражение

$$\psi = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Таким образом, в комплексной области $z = x + iy$ для функции

$$\chi = -iw = \psi - i\varphi$$

получаем задачу Келдыша – Седова [3]: на границе CDE задана ее действительная часть

$$\operatorname{Re}\chi\big|_{CDE} = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2}\left(x^2 + y^2\right),$$

а на границах $A_{-\infty}B$, BC, $EA_{+\infty}$ известна ее мнимая часть, а именно

$$\operatorname{Im}\chi\big|_{A_{-\infty}B} = 0\,,\ \operatorname{Im}\chi\big|_{BC} = 0\,,\ \operatorname{Im}\chi\big|_{EA_{+\infty}} = 0\,.$$

Аналитическое исследование. Для произвольного угла наклона пластинки решение поставленной задачи $\chi(t)$ определяется формулой [1]

$$\chi(t)=\psi(t)-i\varphi(t)=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\sqrt{(t+q)(t-1)}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left[b(U_0\sin\alpha\pi-V_0\cos\alpha\pi)J_1(t)-\frac{\omega_z b^2}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}J_2(t)\right], \quad (1)$$

причем это решение содержит неизвестный параметр q.

В предположении о наличии только одной зоны отрыва найдем ее положение по принципу Огазо [4;5] с применением сингулярных интегралов в смысле Адамара [6;7]. Для выяснения положения отрыва – координаты q – согласно принципу Огазо необходимо определить потенциал течения $\varphi(t)$ на участке безотрывного обтекания $t=\xi+i0, \xi\in(-q,1)$. Интегралы $J_1(t)$ и $J_2(t)$ являются интегралами типа Коши по отрезку действительной оси $\xi\in(-q,1)$. По формулам Племеля–Сохоцкого при переходе из верхней полуплоскости в точку ξ_0 на отрезке $(-q,1)$ получим

$$J_1^+(\xi_0)=\pi i\frac{\left(\xi_0+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}(1-\xi_0)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(\xi_0+q)^{\frac{1}{2}}}+J_1(\xi_0), \quad (2)$$

$$J_2^+(\xi_0)=\pi i\frac{\left(\xi_0+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{2(1-\alpha)}(1-\xi_0)^{2\alpha-\frac{1}{2}}}{(\xi_0+q)^{\frac{1}{2}}}+J_2(\xi_0), \quad (3)$$

где $J_1(\xi_0)$ и $J_2(\xi_0)$ – особые интегралы в смысле главного значения Коши. Выделяя действительные и мнимые части в решении (1), приходим к следующим выражениям для функции тока и потенциала течения на смоченной части пластинки:

$$\psi(\xi_0)=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\xi_0+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}(1-\xi_0)^{\alpha}\left[bU_n-\frac{\omega_z b^2}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\xi_0+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}(1-\xi_0)^{\alpha}\right], \quad (4)$$

$$\varphi(\xi_0)=\frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left[bU_nJ_1(\xi_0)-\frac{\omega_z b^2}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}J_2(\xi_0)\right], \quad (5)$$

где $U_n=U_0\sin\alpha\pi-V_0\cos\alpha\pi$ – проекция поступательной скорости на нормаль к передней стороне пластинки. Формула (4), как и следовало ожидать, представляет граничное условие на участке $(-q<\xi_0<1)$.

Согласно принципу Огазо положение точки отрыва q находим из условия

$$\lim_{\xi_0\to -q+0}\frac{\partial\varphi(\xi_0)}{\partial q}=0.$$

Из (5) имеем

$$\frac{\partial\varphi(\xi_0)}{\partial q}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1-\xi_0}{\xi_0+q}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left[bU_nJ_1(\xi_0)-\frac{\omega_z b^2}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}J_2(\xi_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left[bU_n\frac{\partial J_1(\xi_0)}{\partial q}-\frac{\omega_z b^2}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\frac{\partial J_2(\xi_0)}{\partial q}\right].$$

Переходя к пределу $\xi_0\to -q+0$, получаем следующее уравнение для определения параметра q:

$$bU_nJ_1(-q)-\frac{\omega_z b^2}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}J_2(-q)=0\,, \tag{6}$$

исходя из предположения, что интегралы $\frac{\partial J_k}{\partial q}(\xi_0),\quad k=1,2$, при $\xi_0\to -q+0$ ограничены или возрастают не быстрее чем $\frac{1}{(\xi_0+q)^{\frac{1}{2}}}$, что будет показано в дальнейшем.

При этом при непосредственной подстановке $\xi_0=-q$ в выражения для интегралов $J_k(\xi_0),\quad k=1,2$ они превращаются в сингулярные интегралы вида

$$J_1(-q)=\int_{-q}^{1}\frac{\left(\xi+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}(1-\xi)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(\xi+q)^{\frac{3}{2}}}d\xi\,,$$

$$J_2(-q)=\int_{-q}^{1}\frac{\left(\xi+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{2(1-\alpha)}(1-\xi)^{2\alpha-\frac{1}{2}}}{(\xi+q)^{\frac{3}{2}}}d\xi\,, \tag{7}$$

которые являются расходящимися, и их будем понимать в смысле конечной части по Адамару.

Уравнение для определения q (6) может быть записано в виде зависимости кинематического параметра Λ_n от неизвестного q

$$\Lambda_n=\frac{\omega_z b}{U_n}=\frac{2J_1(-q)}{J_2(-q)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{8}$$

При помощи замены переменной

$$\xi=-y\Rightarrow d\xi=-dy;\quad \xi=1\Rightarrow y=-1;\quad \xi=-q\Rightarrow y=q$$

приведем интегралы (7) к стандартной форме

$$J_1(-q)=\int_{-1}^{q}\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-y\right)^{1-\alpha}(1+y)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(q-y)^{\frac{3}{2}}}dy,$$

$$J_2(-q)=\int_{-1}^{q}\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-y\right)^{2(1-\alpha)}(1+y)^{2\alpha-\frac{1}{2}}}{(q-y)^{\frac{3}{2}}}dy,$$

удобной для применения формул Адамара–Манглера [6]. Эти интегралы вычислим по следующему алгоритму:

$$J_1(-q)=\tilde{J}_1(-q)-2\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-\alpha}}{(1+q)^{1-\alpha}},$$

$$J_2(-q)=\tilde{J}_2(-q)-2\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{2(1-\alpha)}}{(1+q)^{1-2\alpha}}, \qquad (9)$$

где

$$\tilde{J}_1(-q)=\int_{-1}^{q}\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-y\right)^{1-\alpha}(1+y)^{\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-\alpha}(1+q)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(q-y)^{\frac{3}{2}}}dy,$$

$$\tilde{J}_2(-q)=\int_{-1}^{q}\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-y\right)^{2(1-\alpha)}(1+y)^{2\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{2(1-\alpha)}(1+q)^{2\alpha-\frac{1}{2}}}{(q-y)^{\frac{3}{2}}}dy. \qquad (10)$$

С помощью замен переменной (сначала $y=-\cos^2\varphi+q\sin^2\varphi$, а затем $t=\cos\varphi$) преобразуем интегралы (10) в интегралы с постоянными пределами интегрирования, убрав тем самым неизвестный параметр q из пределов интегрирования.

Соответственно получим

$$\tilde{J}_1(-q)=\frac{2}{(1+q)^{1-\alpha}}\int_0^1\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+t^2-q\left(1-t^2\right)\right)^{1-\alpha}\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-\alpha}}{t^2}dt\equiv\frac{2}{(1+q)^{1-\alpha}}\tilde{\tilde{J}}_1(-q),$$

$$\tilde{J}_2(-q)=\frac{2}{(1+q)^{1-2\alpha}}\int_0^1\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+t^2-q\left(1-t^2\right)\right)^{2(1-\alpha)}\left(1-t^2\right)^{2\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{2(1-\alpha)}}{t^2}dt\equiv$$

$$\equiv\frac{2}{(1+q)^{1-2\alpha}}\tilde{\tilde{J}}_2(-q).$$

Подынтегральные функции последних интегралов $\tilde{\tilde{J}}_k(-q),\quad k=1,2$ имеют устранимую особенность в точке $t=0$. Отделив эту точку окрестностью размером ε, получим

$$\tilde{\tilde{J}}_1(-q)=\int_0^\varepsilon\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+t^2-q\left(1-t^2\right)\right)^{1-\alpha}\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-\alpha}}{t^2}dt+$$

$$+\int_\varepsilon^1\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+t^2-q\left(1-t^2\right)\right)^{1-\alpha}\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-\alpha}}{t^2}dt=\tilde{\tilde{J}}_{11}(-q)+\tilde{\tilde{J}}_{12}(-q),$$

$$\tilde{\tilde{J}}_2(-q)=\int_0^\varepsilon\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+t^2-q\left(1-t^2\right)\right)^{2(1-\alpha)}\left(1-t^2\right)^{2\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{2(1-\alpha)}}{t^2}dt+$$

$$+\int_0^1\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+t^2-q\left(1-t^2\right)\right)^{2(1-\alpha)}\left(1-t^2\right)^{2\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{2(1-\alpha)}}{t^2}dt=\tilde{\tilde{J}}_{21}(-q)+\tilde{\tilde{J}}_{22}(-q),$$

где ε – малая величина.

В этих формулах первые интегралы $\tilde{\tilde{J}}_{11}(-q)$ и $\tilde{\tilde{J}}_{21}(-q)$ вычисляются непосредственно при помощи разложения подынтегральных функций в окрестности особой точки $t=0$; вторые интегралы вычисляются численно по квадратурным формулам. Произведя указанные разложения подынтегральных функций в степенные ряды по переменной *t*, для интегралов $\tilde{\tilde{J}}_{11}(-q)$ и $\tilde{\tilde{J}}_{21}(-q)$ получим следующие выражения:

$$\tilde{\tilde{J}}_{11}(-q)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{-\alpha}\int_0^\varepsilon\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+q\right)+O\left(t^2\right)\right]dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+q\right)\varepsilon+O\left(\varepsilon^3\right),$$

а далее аналогично

$$\tilde{\tilde{J}}_{21}=\int_0^{\varepsilon}\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-2\alpha}\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+3q\right)+O\left(t^2\right)\right]dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-2\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+3q\right)\varepsilon+O\left(\varepsilon^3\right).$$

Собрав полученные формулы для интегралов $J_k(-q),\quad k=1,2$, будем иметь

$$J_k(-q)=\frac{2}{(1+q)^{1-k\alpha}}JJ_k(-q),\quad k=1,2, \tag{11}$$

где

$$JJ_1(-q)=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+t^2-q\left(1-t^2\right)\right)^{1-\alpha}\left(1-t^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-\alpha}}{t^2}dt+$$
$$+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{-\alpha}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+q\right)\varepsilon-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)\right],$$

$$JJ_2(-q)=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+t^2-q\left(1-t^2\right)\right)^{2(1-\alpha)}\left(1-t^2\right)^{2\alpha-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{2(1-\alpha)}}{t^2}dt+$$
$$+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)^{1-2\alpha}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}+3q\right)\varepsilon-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}-q\right)\right].$$

Следовательно, зависимость кинематического параметра от неизвестного параметра q имеет вид

$$\mathrm{K}=\frac{U_n}{\omega_z b}=\frac{(1+q)^{\alpha}}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\frac{JJ_2(-q)}{JJ_1(-q)}. \tag{12}$$

По приведенным формулам для фиксированных значений угла наклона пластинки $\alpha\pi$ были построены зависимости кинематического параметра $\mathrm{K}=\frac{U_n}{\omega_z b}$ от положения начальной точки отрыва q. Прежде всего было проведено сравнение для тех значений угла наклона пластинки, для которых можно получить точное аналитическое решение задачи, то есть для случая горизонтального удара с вращением вертикальной пластинки $(\alpha=0{,}5)$ и для случая чисто вращательного удара пластинки, наклоненной под углом $\pi/4$. Аналитические решения и решения, полученные через интегралы в смысле Адамара, сравнивались по зависимости кинематического параметра $\mathrm{K}=\frac{U_0}{\omega_z b}$ от положения начальной точки отрыва q/b. Результаты расчетов для вертикальной пластинки представлены в виде графика зависимости кинематического параметра $\Lambda=\frac{\omega_z b}{U_0}=\frac{1}{\mathrm{K}}$ (который применялся ранее для непосредственного исследования случая удара вертикальной пластинки) от безразмерного геометрического параметра q (рис. 2).

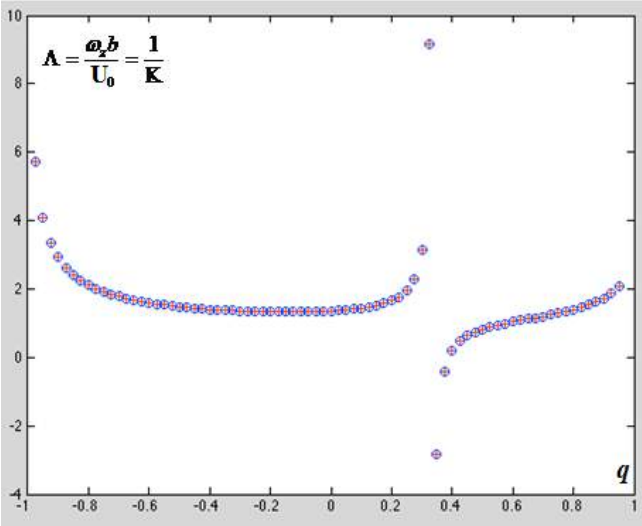

Рис. 2. Зависимость кинематического параметра от положения точки отрыва для горизонтального удара с вращением вертикальной пластинки:
«+» – расчет по формулам Адамара–Манглера (ε=0,001);
«o» – аналитическое решение

Ниже приведена зависимость кинематического параметра K от положения точки отрыва для произвольного удара с вращением пластинки, наклоненной под углом $\pi/4$ (рис. 3). Аналитическое решение здесь возможно только для случая чисто вращательного удара $(U_0 = V_0 = 0 \Rightarrow \mathrm{K} = 0)$, что позволяет определить точку пересечения построенной кривой с осью $\mathrm{K} = 0$ при $q = 0{,}5533$, тогда как по расчету с применением формул Адамара–Манглера это значение равно $q = 0{,}5524$ (точка «o» на рис. 3).

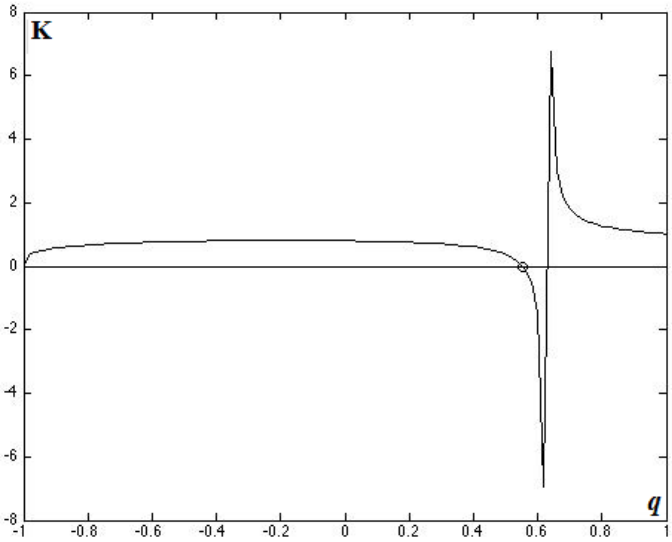

Рис. 3. Зависимость кинематического параметра от положения точки отрыва для произвольного удара с вращением пластинки, наклоненной под углом 45^0

Форма кривой зависимости кинематического параметра Λ от положения точки отрыва при изменении угла наклона пластинки качественно не изменяется и остается такой же, как и для удара с вращением вертикальной пластинки. Одна из этих кривых зависимости для угла $\alpha = 1/6$ приведена ниже (рис. 4).

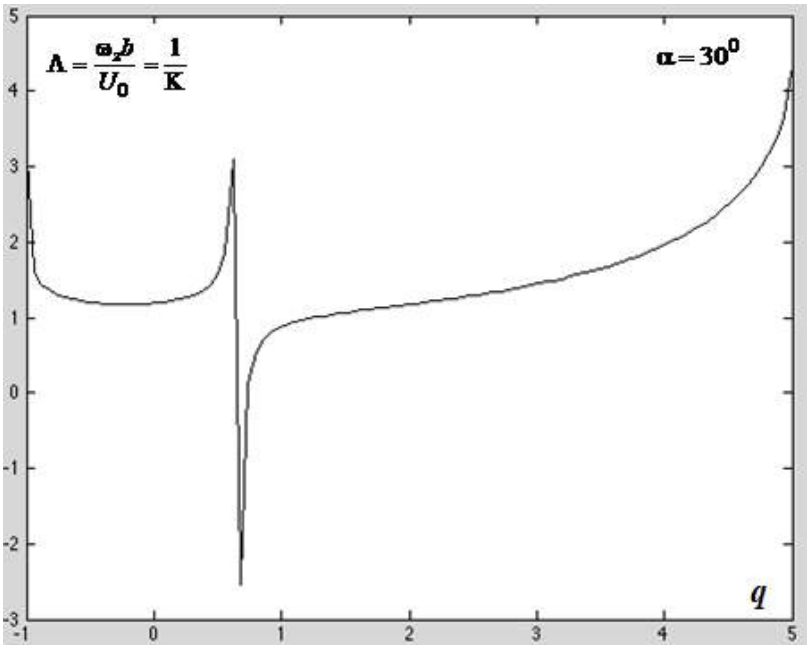

Рис. 4. Зависимость кинематического параметра от положения точки отрыва для произвольного удара с вращением пластинки, наклоненной под углом 30^0

Как отмечалось ранее, при значениях кинематического параметра, меньших минимума функции, реализуется режим с одной зоной отрыва. Значение минимума функции с уменьшением угла наклона пластинки незначительно уменьшается, что указывает на сужение множества значений кинематического параметра Λ отрыва, при которых реализуется течение с одной зоной отрыва.

Особая точка зависимости кинематического параметра $\Lambda = \Lambda(q)$, в которой параметр $K = 0$, с уменьшением параметра α увеличивается со значения $q = 0{,}3334$ при $\alpha = 90^0$ до $q = 0{,}9836$ при $\alpha = 1^0$.

Следует отметить, что в пределе при $\alpha \to 0$ мы не получаем случай удара горизонтальной пластинки из-за образующейся жидкой складки между пластинкой и свободной поверхностью.

Выводы. В работе проведены расчеты для широкого диапазона углов наклона пластинки, для которых можно было получить точное аналитическое решение задачи. При сравнении данных аналитического решения и решения, полученного через интегралы в смысле Адамара, отчетливо показано хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о применимости такого подхода к определению характеристик отрывных зон при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости.

Библиографические ссылки

1. **Катан, В.А.** Ударное взаимодействие с несжимаемой жидкостью наклонной пластины, плавающей на ее поверхности, при ударе с вращением в условиях отрыва [Текст] / В. А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2013. – № 5 (21). – Вип. 17, т.1. – С. 134 – 146.

2. **Катан, В.А.** Моделирование ударного взаимодействия тела и жидкости со свободной поверхностью [Текст] / В.А. Катан // Восточно-европ. журн. передовых технологий. Прикл. механика. – 2014. – №2/7(68). – С. 32 – 36.

3. **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука,1966. – 707с.

4. **Норкин, М.В.** Смешанные задачи гидродинамического удара [Текст] / М.В. Норкин. – Ростов н/Д: Изд-во ЦВВР, 2007. – 136 с.

5. **Гловински, Р.** Численное исследование вариационных неравенств [Текст] / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 576 с.

6. Общая теория аэродинамики больших скоростей [Текст] / под ред. У.Р. Сирса. – М.: Воениздат, 1962. – 300 с.

7. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа [Текст] / Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

Надійшла до редколегії 29.09.2016

УДК 532.516

С.В. Тарасов[1], Д. А. Редчиц[1], О. Б. Полевой[1], И. Б. Чашина[1], С. В. Моисеенко[2]

[1]Институт транспортных систем и технологий НАН Украины (г. Днепропетровск)
[2]Херсонский национальный технический университет

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА НА СЛУЖБЕ ВЕТРОЭНЕРГЕТИКИ

Проведен обзор современного состояния и тенденций развития ветроэнергетики в мире и в Украине. Рассмотрены модели и методы расчета аэродинамических характеристик вертикально-осевых ветроэнергетических установок. Описана роль вычислительной гидродинамики в аэродинамическом проектировании сложных систем. Рассмотрены проблемы решения уравнений Навье–Стокса и моделирования турбулентности. Приведен обзор и классификация пакетов прикладных программ вычислительной гидродинамики. Обсуждены результаты численного моделирования аэродинамики роторов Дарье и Савониуса с двумя и тремя лопастями. Для численного моделирования аэродинамики роторов Дарье и Савониуса с двумя и тремя лопастями применяются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса. При моделировании турбулентности используются однопараметрические дифференциальные модели турбулентности. Решение системы исходных уравнений получено с помощью неявного конечно-объемного численного алгоритма, базирующегося на методе искусственной сжимаемости и многоблочных вычислительных технологиях. Представлены результаты расчета роторов Дарье и Савониуса с различным количеством и геометрическими характеристиками лопастей. Выполнен анализ поля течения вокруг роторов. Выделены основные стадии формирования вихревой структуры. Установлено влияние числа Рейнольдса, коэффициентов быстроходности и заполнения на энергетические характеристики роторов Дарье и Савониуса.

Ключевые слова: численные методы, ветроагрегат, ротор Дарье, ротор Савониуса, уравнения Навье–Стокса, модель турбулентности.

Проведено огляд сучасного стану та тенденцій розвитку вітроенергетики у світі і в Україні. Розглянуто моделі та методи розрахунку аеродинамічних характеристик вертикально-осьових вітроенергетичних установок. Описано роль обчислювальної гідродинаміки в аеродинамічному проектуванні складних систем. Розглянуто проблеми розв'язання рівнянь

© Тарасов С.В., Редчиц Д. А., Полевой О. Б., Чашина И. Б., Моисеенко С. В., 2016