E-Jurnal Matematika Vol. 6 (2), Mei 2017, pp. 116-123 ISSN: 2303-1751

HUBUNGAN DERIVASI *PRIME NEAR-RING* DENGAN SIFAT KOMUTATIF RING

Pradita Z. Triwulandari[1§], Kartika Sari[2], Luh Putu Ida Harini[3]

[1]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: pradita.zuhriahida@gmail.com]
[2]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: sarikartika@unud.ac.id)
[3]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: ballidah@unud.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

ABSTRACT

Near-rings are generalize from rings. A research on near-ring is continous included a research on prime near-rings and one of this research is about derivation on prime near-rings. This article will reviewing about relation between derivation on prime near-rings and commutativity in rings with literature review method. The result is prime near-rings N are commutative rings if a nonzero derivation d on N hold one of this following conditions: (i) $d([x,y]) = [x,y]$, (ii) $d([x,y]) = [d(x),y]$, (iii) $d([x,y]) = [x,y]$, (iv) $d(x \diamond y) = (x \diamond y)$, (v) $d(x) \diamond y = (x \diamond y)$, (vi) $d(x \diamond y) = d(x) \diamond y$, for all $x,y \in I$, with I is non zero semigroup ideal from N.

Keywords: commutative ring, derivative, ideal semigroup, prime near-ring

1. PENDAHULUAN

Aljabar abstrak atau lebih sering dikenal dengan aljabar modern adalah salah satu cabang ilmu aljabar yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, semigrup, ring atau gelanggang, ideal semigrup, lapangan atau *field*, dan modul. Ilmu aljabar abstrak berkembang pesat karena penerapan dari bentuk-bentuk aljabar tersebut banyak bermanfaat dalam ilmu lain, seperti bidang fisika, kimia, biologi, dan ilmu komputer. Seperti halnya pada ring yang dapat diterapkan pada teori kriptografi, konsep *near-ring* dapat diterapkan pada beberapa bidang, antara lain dalam bidang komputasi, yaitu dalam teori kriptografi dan teori pengkodean serta pada bidang statistika, yaitu *balanced incomplete block design* atau yang lebih sering dikenal dengan rancangan acak kelompok tak lengkap seimbang.

Near-ring merupakan generalisasi dari ring. Perbedaannya adalah pada *near-ring* N, himpunan tak kosong N yang dilengkapi dengan operasi pertama yaitu $(N,*)$ haruslah berupa grup akan tetapi tidak harus grup abelian serta $(N,*,\#)$ memenuhi salah satu sifat distributif kanan atau kiri (Pilz, 1983). Pada artikel ini, yang dimaksud dengan *near-ring* adalah kedua jenis *near-ring*, baik *near-ring* kanan maupun *near-ring* kiri, kecuali disebutkan secara khusus. Selain itu, *near-ring* N juga mengacu pada *near-ring* yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa, kecuali disebutkan secara khusus.

Penelitian mengenai derivasi pada *near-ring* telah banyak dilakukan, antara lain Bell (1987) yang membahas tentang beberapa syarat cukup *near-ring* merupakan ring komutatif. Selanjutnya, pada penelitiannya yang lain, Bell (1992) meneliti tentang dua jenis derivasi, yaitu derivasi yang mengawetkan sifat komutatif pada ring maupun *near-ring* dan derivasi Daif. Lebih lanjut lagi, penelitian mengenai generalisasi pada salah satu jenis derivasi, yaitu n-derivasi pada *near-ring* yang melibatkan semigrup idealnya dilakukan oleh Ashraf (2015). Seiring dengan berkembangnya penelitian mengenai *near-ring*, penelitian mengenai *prime near-ring* yang merupakan salah satu jenis *near-ring* juga turut dikembangkan oleh sejumlah peneliti. Wang (1994) meneliti tentang dua jenis derivasi yang dioperasikan bersama-sama pada sebuah *prime near-ring*. Selanjutnya, Boua (2012) membahas mengenai syarat cukup yang mengakibatkan *prime near-ring* merupakan ring komutatif dengan melibatkan derivasi pada ideal semigrupnya.

Pada artikel Boua (2012), proses pembuktian teorema yang dihasilkan tidak dijelaskan secara detil. Selain itu, contoh yang disajikan hanya contoh penguat bahwa teorema tidak berlaku apabila *near-ring* bukanlah *prime near-ring*. Oleh sebab itu, artikel ini akan mengkaji secara lebih mendalam mengenai hubungan antara derivasi *prime near-ring* dengan sifat komutatif ring dengan melengkapi bukti-bukti yang telah disajikan Boua (2012) serta memberikan contoh-contoh.

Berikut diberikan teori-teori yang berkaitan dengan artikel tujuan pada artikel

Definisi 1.1 (Howie, 1976) *Himpunan tak kosong A dari semigrup S dinamakan ideal semigrup kiri apabila $SA \subseteq A$ dan apabila berlaku sebaliknya maka dinamakan ideal semigrup kanan. Suatu ideal dinamakan ideal semigrup 2-sisi, yang selanjutnya disebut ideal semigrup saja, apabila ideal semigrup tersebut merupakan ideal semigrup kanan sekaligus ideal semigrup kiri*.

Definisi 1.2 (Pilz, 1983) *Diberikan himpunan tak kosong N. Himpunan N yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ dan $\#$ dinamakan near-ring kanan apabila memenuhi aksioma-aksioma:*

1. *$(N,*)$ adalah grup (tidak perlu abelian)*
2. *$(N,\cdot)$ adalah semigrup*
3. *Untuk setiap $a,b,c \in N$ berlaku $(a*b)\#c = (a\#c)*(b\#c)$ (hukum distributif kanan).*
   Near-ring kiri didefinisikan dengan cara yang sama.

Seperti halnya pada ring, pada *near-ring* juga terdapat istilah *multiplicative center* yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.3 (Boua, 2012) *Diberikan near-ring N. Himpunan Z(N) dikatakan multiplicative center dari near-ring N apabila*
$$Z(N) = \{x \in N \mid xy = yx \text{ } untuk \text{ } setiap \text{ } y \in N\}$$

Selanjutnya, pada *near-ring* N juga dapat berlaku *Lie product*, yang dilambangkan dengan $[x,y]$ yang berarti $xy - yx$ dan *Jordan product*, yaitu $x \circ y = xy + yx$ dengan $x,y \in N$ (Boua, 2012). Selain itu, juga dikenal istilah derivasi d dari *near-ring* N ke N seperti halnya pada lapangan atau *field* bilangan real, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.4 (Ashraf, 2015) *Derivasi pada near-ring N adalah pemetaan $d: N \to N$ yang memenuhi untuk setiap $x,y \in N$ berlaku*
$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$
atau ekuivalen dengan
$$d(xy) = xd(y) + d(x)y$$

Definisi 1.5 (Boua, 2012) *Suatu near-ring N dikatakan prime near-ring apabila pada N berlaku untuk setiap $x,y \in N$, $xNy = \{0_N\}$ mengimplikasikan $x = 0_N$ atau $y = 0_N$*

Dalam teori mengenai *near-ring*, terdapat beberapa lemma yang berkaitan dengan topik pada penelitian ini, yaitu.

Lemma 1.6 (Boua, 2012) *Diberikan prime near-ring N dan ideal semigrup tak nol I dari N. Jika pada N berlaku derivasi tak nol d sedemikian sehingga $d(I) \subseteq Z(N)$ maka N adalah ring komutatif.*

Lemma 1.7 (Boua, 2012) *Diberikan prime near-ring N dan ideal semigrup tak nol I dari N. Jika $x,y \in N$ dan $xIy = \{0\}$, maka $x = 0$ atau $y =$* 0.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji beberapa literatur berupa buku, jurnal, maupun laporan penelitian yang relevan dengan topik yang dibahas. Langkah awal dalam penelitian ini adalah mempelajari konsep dasar dari aljabar abstrak yang digunakan dalam penelitian, meliputi teori grup dan ring beserta beberapa teori terkait, yaitu semigrup, ideal semigrup beserta contohnya. Mengingat yang dikaji dalam penelitian ini adalah *near-ring* khususnya pada *prime near-ring* dan derivasinya, maka langkah selanjutnya yang dilakukan adalah mempelajari definisi *near-ring*, *prime near-ring*, *Jordan product*, *Lie product*, dan derivasi pada *near-ring*. Selanjutnya juga dipelajari sifat-sifat beserta contoh yang terdapat di dalam teori terkait.

Setelah mempelajari semua konsep yang berkaitan, langkah selanjutnya adalah melengkapi bukti setiap teorema dari penelitian Boua (2012). Langkah terakhir adalah memberikan contoh yang terkait dengan teorema tersebut.

3. PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas hubungan antara derivasi *prime near-ring* dengan sifat komutatif ring seperti yang dipaparkan pada beberapa teorema berikut.

Teorema 3.1 (Boua, 2012) Diberikan *prime near-ring* N dan ideal semigrup tak nol I dari N. Jika d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d([x,y]) = [x,y]$, untuk setiap $x, y \in I$, maka N adalah ring komutatif.

Bukti

Diketahui N *prime near-ring*, I ideal semigrup tak nol dari N dan d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d([x,y]) = [x,y]$, untuk setiap $x, y \in I$. Diambil sebarang $x, y \in I$. Berdasarkan asumsi, berlaku $d([x,y]) = [x,y]$. Kemudian dibentuk xy lalu xy disubstitusikan pada y dan menghasilkan

$$d([x,xy]) = [x,xy] \quad (1)$$

Diperhatikan bahwa berdasarkan definisi *Lie product* diperoleh $[x,xy] = x[x,y]$. Dengan demikian persamaan (1) menjadi

$$d(x[x,y]) = x[x,y] \quad (2)$$

Berdasarkan definisi derivasi

$$d(x[x,y]) = xd([x,y]) + d(x)[x,y] \quad (3)$$

Dari persamaan (3) dan asumsi, persamaan (2) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} & x[x,y] = x[x,y] + d(x)[x,y] \\ \Leftrightarrow\ & x[x,y] - x[x,y] = d(x)[x,y] \\ \Leftrightarrow\ & 0 = d(x)[x,y] \\ \Leftrightarrow\ & 0 = d(x)(xy - yx) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = d(x)xy - d(x)yx \\ \Leftrightarrow\ & d(x)yx = d(x)xy \end{aligned} \quad (4)$$

Selanjutnya, ambil sebarang $z \in N$. Dibentuk yz dan yz disubstitusikan pada y di persamaan (4), sehingga diperoleh $d(x)yzx = d(x)xyz$ yang dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} & d(x)yzx = d(x)yxz \\ \Leftrightarrow\ & 0 = d(x)yxz - d(x)yzx \\ \Leftrightarrow\ & 0 = d(x)y(xz - zx) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = d(x)y[x,z] \end{aligned} \quad (5)$$

Karena y adalah sebarang elemen pada I, maka persamaan (4.5) dapat ditulis menjadi $d(x)I[x,z] = 0$. Dari hasil ini dan dengan menggunakan Lemma 1.7, hal ini mengimplikasikan bahwa $d(x) = 0$ atau $[x,z] = 0$. Karena d adalah derivasi tak nol pada N maka $d(x) = 0$ tidak memenuhi. Oleh karena itu berlaku $[x,z] = 0$. Hal ini berarti $xz - zx = 0 \Leftrightarrow xz = zx$.

Karena $x \in I$ dan $z \in N$, maka berdasarkan definisi $Z(N)$, $x \in Z(N)$. Karena $x \in Z(N)$, maka $d(x) \in Z(N)$ untuk setiap $x \in I$. Hal ini berarti $d(I) \subset Z(N)$. Dari Lemma 1.6, sehingga didapatkan bahwa N merupakan ring komutatif. ■

Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan contoh penerapan dari Teorema 4.1

Contoh 3.2 Diberikan suatu ring komutatif R yang tidak memuat pembagi nol. Himpunan $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in R, a + a = a \right\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks biasa adalah *pime near-ring* dengan $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in R, a + a = a \right\}$ adalah ideal semigrup dari N. Apabila pada N didefinisikan derivasi $d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk setiap $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$ maka derivasi ini memenuhi $d([A,B]) = [A,B]$ untuk setiap $A, B \in I$. *Prime near-ring* ini merupakan ring komutatif.

Berikut disertakan pula contoh dari *near-ring* yang merupakan ring komutatif namun memenuhi syarat cukup pada Teorema 4.1, yaitu $d([x,y]) = [x,y]$ untuk setiap

$x, y \in I$ meskipun *near-ring* tersebut bukan *prime near-ring*.

Contoh 4.3 Diberikan suatu ring komutatif R yang tidak memuat pembagi nol. Himpunan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R, a + a = a\right\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks biasa **bukan** *prime near-ring* dengan $I = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in R\right\}$ adalah ideal semigrup dari M. Pada M didefinisikan derivasi $d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yang memenuhi $d([A, B]) = [A, B]$ untuk setiap $A, B \in I$. Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa M merupakan ring komutatif.

Selain kedua contoh tersebut, berikut juga diberikan contoh dari *near-ring* yang **bukan** ring komutatif dan **bukan** *prime near-ring* namun memenuhi aksioma pada Teorema 4.1

Contoh 3.4 Diberikan ring R yang tidak memuat pembagi nol. Himpunan $P = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R, a + a = a\right\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks biasa **bukan** *prime near-ring* dengan $I = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R\right\}$ adalah ideal semigrup dari P. Pada P didefinisikan derivasi $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yang memenuhi $d([A, B]) = [A, B]$ untuk setiap $A, B \in I$. Dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa P bukan ring komutatif.

Syarat cukup bagi *prime near-ring* merupakan ring komutatif yang selanjutnya disajikan pada Teorema 3.5.

Teorema 3.5 (Boua, 2012) Diberikan *prime near-ring* N dan ideal semigrup tak nol I dari N. Jika d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d([x, y]) = [d(x), y]$ atau $[x, y] = [d(x), y]$ untuk setiap $x, y \in I$, maka N adalah ring komutatif.

Bukti

Diketahui N *prime near-ring*, I ideal semigrup tak nol dari N dan d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d([x, y]) = [d(x), y]$ atau $[x, y] = [d(x), y]$ untuk setiap $x, y \in I$. Diambil sebarang $x, y \in I$.

a) Berdasarkan asumsi pertama, berlaku $d([x, y]) = [d(x), y]$. Dibentuk xy lalu xy disubstitusikan pada y, didapatkan

$$d([x, xy]) = [d(x), xy] \tag{6}$$

Karena $[x, xy] = x[x, y]$, maka

$$d(x[x, y]) = [d(x), xy] \tag{7}$$

Berdasarkan definisi derivasi, $d(x[x, y])$ dapat diuraikan menjadi $d(x[x, y]) = xd([x, y]) + d(x)[x, y]$. Di lain pihak, dari definisi *Lie Product* diperoleh $[d(x), xy] = d(x)xy - xyd(x)$. Oleh karena itu, berdasarkan hal tersebut dan dari asumsi, persamaan (7) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}
& xd([x, y]) + d(x)[x, y] \\
& \qquad = d(x)xy - xyd(x) \\
\Leftrightarrow\ & x[d(x), y] + d(x)[x, y] = d(x)xy - \\
& xyd(x) \\
\Leftrightarrow\ & xd(x)y - xyd(x) + d(x)(xy - yx) \\
& \qquad = d(x)xy - xyd(x) \\
\Leftrightarrow\ & xd(x)y - xyd(x) + d(x)xy - d(x)yx \\
& \qquad = d(x)xy - xyd(x) \\
\Leftrightarrow\ & xd(x)y - d(x)yx = 0 \\
\Leftrightarrow\ & xd(x)y = d(x)yx
\end{aligned} \tag{8}$$

Selanjutnya, diambil sebarang $z \in N$. Dibentuk yz lalu yz disubstitusikan pada y di persamaan (8), diperoleh

$$\begin{aligned}
& xd(x)yz = d(x)yzx \\
\Leftrightarrow\ & d(x)yxz = d(x)yzx \\
\Leftrightarrow\ & d(x)yzx - d(x)yxz = 0 \\
\Leftrightarrow\ & d(x)y(xz - zx) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & d(x)y[x, z] = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Karena y adalah sebarang elemen pada I, maka persamaan (9) dapat ditulis menjadi $d(x)I[x, z] = 0$. Dari hasil ini dan dengan menggunakan Lemma 1.7, persamaan tersebut mengimplikasikan bahwa $d(x) = 0$ atau $[x, z] = 0$. Karena d adalah derivasi tak nol pada N maka $d(x) = 0$ tidak memenuhi. Oleh karena itu berlaku $[x, z] = 0$. Hal ini berarti $xz = zx$

Karena $x \in I$ dan $z \in N$, maka berdasarkan definisi $Z(N)$, $x \in Z(N)$. Karena $x \in Z(N)$, maka $d(x) \in Z(N)$ untuk setiap $x \in I$. Hal ini berarti $d(I) \subset Z(N)$. Berdasarkan Lemma 1.6, sehingga didapatkan bahwa N merupakan ring komutatif.

b) Berdasarkan asumsi kedua, berlaku $[d(x), y] = [x, y]$. Dibentuk yx dan substitusikan yx pada x, didapatkan

$$[d(yx), y] = [yx, y] \quad (10)$$

Diperhatikan bahwa dari definisi *Lie product*, $[yx, y] = yxy - yyx = y(xy - yx) \; = y[x, y]$. Berdasarkan hal tersebut dan asumsi kedua, persamaan (10) menjadi

$$\begin{aligned}
& [d(yx), y] = y[x, y] \\
\Leftrightarrow\ & [d(yx), y] = y[d(x), y] \\
\Leftrightarrow\ & d(yx)y - yd(yx) = y(d(x)y - yd(x)) \\
\Leftrightarrow\ & (yd(x) + d(y)x)y - y(yd(x) + \\
& d(y)x) = y(d(x)y - yd(x)) \\
\Leftrightarrow\ & yd(x)y + d(y)xy - yyd(x) - yd(y)x = \\
& yd(x)y - yyd(x) \\
\Leftrightarrow\ & d(y)xy - yd(y)x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & d(y)xy = yd(y)x \quad (11)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, diambil sebarang $z \in N$. Dibentuk xz dan substitusi xz pada x di persamaan (11), diperoleh

$$\begin{aligned}
& d(y)xzy = yd(y)xz \\
\Leftrightarrow\ & d(y)xzy = d(y)xyz \\
\Leftrightarrow\ & d(y)xyz - d(y)xzy = 0 \\
\Leftrightarrow\ & d(y)x(yz - zy) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & d(y)x[y, z] = 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

Karena x adalah sebarang elemen pada I, maka persamaan (12) dapat ditulis menjadi $d(y)I[y, z] = 0$. Dari hasil tersebut dan dengan menggunakan Lemma 1.7, persamaan tersebut mengimplikasikan bahwa $d(y) = 0$ atau $[y, z] = 0$. Karena d adalah derivasi tak nol pada N maka $d(y) = 0$ tidak memenuhi. Oleh karena itu berlaku $[y, z] = 0$. Hal ini berarti $yz = zy$.

Karena $y \in I$ dan $z \in N$, maka berdasarkan definisi $Z(N)$, $y \in Z(N)$. Karena $y \in Z(N)$, maka $d(y) \in Z(N)$ untuk setiap $y \in I$. Hal ini berarti $d(I) \subset Z(N)$. Berdasarkan Lemma 1.6, sehingga didapatkan bahwa N merupakan ring komutatif.■

Berikut diberikan contoh penerapan dari Teorema 3.5

Contoh 3.6 Diperhatikan *prime near-ring* N, ideal semigrup tak nol I dari N, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.2. Derivasi d memenuhi (a) $d([A, B]) = [d(A), B]$ atau (b) $[A, B] = [d(A), B]$ untuk setiap $A, B \in I$ dan telah ditunjukkan bahwa N adalah ring komutatif.

Berikut juga diberikan contoh dari *near-ring* yang merupakan ring komutatif namun **bukan** *prime near-ring* dan memenuhi syarat cukup pada Teorema 3.5.

Contoh 3.7 Mengacu pada *near-ring* M, ideal semigrup tak nol I dari M, dan derivasi tak nol d pada Contoh 4.3. Derivasi d pada M memenuhi (a) $d([A, B]) = [d(A), B]$ atau (b) $[A, B] = [d(A), B]$ untuk setiap $A, B \in I$. Telah ditunjukkan pula bahwa M adalah ring komutatif.

Contoh dari *near-ring* yang **bukan** *prime near-ring* serta **bukan** ring komutatif namun memenuhi aksioma pada Teorema 3.5 diberikan pada Contoh 3.8 sebagai berikut

Contoh 3.8 Diperhatikan kembali *near-ring* P, ideal semigrup tak nol I dari P, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.4. Derivasi d pada P memenuhi (a) $d([A, B]) = [d(A), B]$ atau (b) $[A, B] = [d(A), B]$ untuk setiap $A, B \in I$. Telah ditunjukkan bahwa P bukan ring komutatif.

Pada Teorema 3.1 dan 3.5, syarat cukup *prime near-ring* merupaka ring komutatif melibatkan derivasi dan *Lie product* pada ideal semigrupnya. Berikut diberikan pula syarat cukup *prime near-ring* merupakan ring komutatif yang melibatkan derivasi dan *Jordan product* pada ideal semigrupnya seperti pada Teorema 3.9, Teorema 3.13 dan Teorema 3.17.

Teorema 3.9 (Boua, 2012) Diberikan *prime near-ring N* dan ideal semigrup tak nol I dari N. Jika d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d(x \diamond y) = x \diamond y$ untuk setiap $x, y \in I$, maka N

adalah ring komutatif.

Bukti

Diketahui N *prime near-ring*, I ideal semigrup tak nol dari N dan d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d(x \diamond y) = x \diamond y$ untuk setiap $x, y \in I$. Diambil sebarang $x, y \in I$. Berdasarkan asumsi, berlaku $d(x \diamond y) = x \diamond y$. Dibentuk yx dan substitusikan yx pada x, didapatkan

$$d(yx \diamond y) = yx \diamond y \tag{13}$$

Diperhatikan bahwa berdasarkan definisi *Jordan product* diperoleh $yx \diamond y = y(x \diamond y)$. Dengan demikian persamaan (4.13) dapat ditulis menjadi

$$d(y(x \diamond y)) = y(x \diamond y) \tag{14}$$

Berdasarkan definisi derivasi dan asumsi, $d(y(x \diamond y))$ dapat diuraikan menjadi

$$d(y(x \diamond y)) = y(x \diamond y) + d(y)(x \diamond y)$$

Sehingga persamaan (14) dapat ditulis kembali menjadi

$$y(x \diamond y) + d(y)(x \diamond y) = y(x \diamond y)$$
$$\Leftrightarrow d(y)(x \diamond y) = 0$$
$$\Leftrightarrow d(y)(xy + yx) = 0$$
$$\Leftrightarrow d(y)xy + d(y)yx = 0$$
$$\Leftrightarrow d(y)xy = -d(y)yx \tag{15}$$

Selanjutnya, ambil sebarang $z \in N$. Dibentuk xz dan substitusi xz pada x di persamaan (15) sehingga diperoleh

$$d(y)xzy = -d(y)yxz$$
$$\Leftrightarrow d(y)xzy = d(y)xyz$$
$$\Leftrightarrow d(y)xzy - d(y)xyz = 0$$
$$\Leftrightarrow d(y)x(zy - yz) = 0$$
$$\Leftrightarrow d(y)x[z, y] = 0 \tag{16}$$

Karena x adalah sebarang elemen pada I, maka persamaan (16) dapat ditulis menjadi $d(y)I[z, y] = 0$. Dari hasil tersebut dan dengan menggunakan Lemma 1.7, persamaan tersebut berarti $d(y) = 0$ atau $[z, y] = 0$. Karena berdasarkan asumsi d adalah derivasi tak nol pada N maka $d(y) = 0$ tidak memenuhi. Oleh karena itu berlaku $[z, y] = 0$. Hal ini berarti $zy = yz$.

Karena $y \in I$ dan $z \in N$, sehingga berdasarkan Definisi 1.3, $y \in Z(N)$. Karena $y \in Z(N)$, maka $d(y) \in Z(N)$ untuk setiap $y \in I$. Hal ini berarti $d(I) \subset Z(N)$. Berdasarkan Lemma 1.6, maka sehingga didapatkan bahwa N merupakan ring komutatif.■

Contoh penerapan Teorema 3.9 disajikan seperti pada Contoh 3.10 berikut.

Contoh 3.10 Diperhatikan *prime near-ring* N, ideal semigrup tak nol I dari N, dan derivasi tak nol d pada Contoh 4.2. Derivasi d pada N memenuhi $d(A \diamond B) = (A \diamond B)$ untuk setiap $A, B \in I$.

Berikut merupakan contoh dari *near-ring* yang **bukan** *prime near-ring* tetapi memenuhi syarat cukup pada Teorema 3.9.

Contoh 3.11 Mengacu pada *near-ring* M, ideal semigrup tak nol I dari M, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.3. Derivasi d memenuhi $d(A \diamond B) = (A \diamond B)$ untuk setiap $A, B \in I$.

Contoh dari *near-ring* yang **bukan** *prime near-ring* serta **bukan** ring komutatif namun memenuhi aksioma pada Teorema 3.9 diberikan pada Contoh 3.12 sebagai berikut

Contoh 3.12 Diperhatikan kembali pada *near-ring* P, ideal semigrup tak nol I dari P, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.4. Derivasi d memenuhi $d(A \diamond B) = (A \diamond B)$ untuk setiap $A, B \in I$.

Syarat cukup *prime near-ring* merupakan ring komutatif yang melibatkan derivasi dan *Jordan product* pada ideal semigrupnya yang selanjutnya disajikan dalam Teorema 3.13

Teorema 3.13 (Boua, 2012) Diberikan *prime near-ring* N dan ideal semigrup tak nol I dari N. Jika d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d(x) \diamond y = x \diamond y$ untuk setiap $x, y \in I$, maka N adalah ring komutatif.

Bukti

Diketahui N *prime near-ring*, I ideal semigrup tak nol dari N dan d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d(x) \diamond y = x \diamond y$ untuk setiap $, y \in I$. Diambil sebarang $x, y \in I$. Berdasarkan asumsi, berlaku $d(x) \diamond y = x \diamond y$. Dibentuk yx dan yx disubstitusikan pada x, didapatkan

$d(yx) \diamond y = (yx \diamond y)$ (17)

Diperhatikan bahwa berdasarkan definisi *Jordan product*, $yx \diamond y = y(x \diamond y)$. Dengan demikian persamaan (17) dapat ditulis kembali dan diuraikan menjadi

$$d(yx) \diamond y = y(x \diamond y)$$
$$\Leftrightarrow d(yx)y + yd(yx) = y(x \diamond y)$$
$$\Leftrightarrow d(yx)y + yd(yx) = y(d(x) \diamond y)$$
$$\Leftrightarrow (yd(x) + d(y)x)y + y(yd(x) + d(y)x) = y(d(x) \diamond y)$$
$$\Leftrightarrow yd(x)y + d(y)xy + yyd(x) + yd(y)x = yd(x)y + yyd(x)$$
$$\Leftrightarrow d(y)xy + +yd(y)x = 0$$
$$\Leftrightarrow -yd(y)x = d(y)xy \quad (18)$$

Selanjutnya, ambil sebarang $z \in N$. Dibentuk xz dan substitusi xz pada x di persamaan (18) sehingga diperoleh

$$d(y)xzy = -yd(y)xz$$
$$\Leftrightarrow d(y)xzy = d(y)xyz$$
$$\Leftrightarrow d(y)xzy - d(y)xyz = 0$$
$$\Leftrightarrow d(y)x(zy - yz) = 0$$
$$\Leftrightarrow d(y)x[z, y] = 0 \quad (19)$$

Karena x adalah sebarang elemen pada I, maka persamaan (19) dapat ditulis menjadi $d(y)I[z, y] = 0$. Dengan menggunakan Lemma 1.7, persamaan tersebut berarti $d(y) = 0$ atau $[z, y] = 0$. Karena berdasarkan asumsi d adalah derivasi tak nol pada N maka $d(y) = 0$ tidak memenuhi. Oleh karena itu berlaku $[z, y] = 0$. Hal ini berarti $zy = yz$.

Karena $y \in I$ dan $z \in N$, sehingga berdasarkan Definisi 1.3, $y \in Z(N)$. Karena $y \in Z(N)$, maka $d(y) \in Z(N)$ untuk setiap $y \in I$. Hal ini berarti $d(I) \subset Z(N)$. Berdasarkan Lemma 1.6, maka sehingga didapatkan bahwa N merupakan ring komutatif.■

Berikut merupakan contoh penerapan dari Teorema 3.13

Contoh 3.14 Mengacu pada *prime near-ring* N, ideal semigrup tak nol I dari N, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.2. Derivasi d memenuhi $d(A) \diamond B = (A \diamond B)$ untuk setiap $A, B \in I$.

Berikut merupakan contoh dari *near-ring* yang **bukan** *prime near-ring* tetapi memenuhi syarat cukup pada Teorema 3.13.

Contoh 3.15 Diperhatikan pada *near-ring* M, ideal semigrup tak nol I dari M, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.3. Derivasi d memenuhi $d(A) \diamond B = (A \diamond B)$ untuk setiap $A, B \in I$.

Contoh dari *near-ring* yang **bukan** *prime near-ring* dan **bukan** ring komutatif tetapi memenuhi aksioma seperti pada Teorema 3.13 diberikan pada Contoh 3.16 berikut.

Contoh 4.16 Diperhatikan kembali *near-ring* P, ideal semigrup tak nol I dari P, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.4. Derivasi d memenuhi $d(A) \diamond B = (A \diamond B)$ untuk setiap $A, B \in I$.

Pada Teorema 3.17 berikut juga dibahas syarat cukup *prime near-ring* merupakan ring komutatif yang melibatkan derivasi dan *Jordan product* pada ideal semigrupnya.

Teorema 3.17 (Boua, 2012) Diberikan *prime near-ring* N dan ideal semigrup tak nol I dari N. Jika d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d(x \diamond y) = d(x) \diamond y$ untuk setiap $x, y \in I$, maka N adalah ring komutatif.

Bukti

Diketahui N *prime near-ring*, I ideal semigrup tak nol dari N dan d derivasi tak nol pada N yang memenuhi $d(x \diamond y) = d(x) \diamond y$ untuk setiap $x, y \in I$. Diambil sebarang $x, y \in I$. Berdasarkan asumsi, berlaku $d(x \diamond y) = d(x) \diamond y$. Dibentuk xy dan substitusikan xy pada y, didapatkan

$$d(x \diamond xy) = d(x) \diamond xy \quad (20)$$

Diperhatikan bahwa $x \diamond xy = x(x \diamond y)$. Dengan demikian persamaan (20) dapat ditulis kembali dan diuraikan menjadi

$$d(x(x \diamond y)\,) = d(x) \diamond xy$$
$$\Leftrightarrow d\big(x(x \diamond y)\big) = d(x)xy + xyd(x)$$
$$\Leftrightarrow xd(x \diamond y) + d(x)(x \diamond y) = d(x)xy + xyd(x)$$
$$\Leftrightarrow x(d(x) \diamond y) + d(x)(x \diamond y) = d(x)xy + xyd(x)$$
$$\Leftrightarrow xd(x)y + xyd(x) + d(x)xy + d(x)yx = d(x)xy + xyd(x)$$
$$\Leftrightarrow xd(x)y + d(x)yx = 0$$
$$\Leftrightarrow -xd(x)y = d(x)yx \quad (21)$$

Selanjutnya ambil sebarang $z \in N$. Dibentuk yz

dan substitusi yz pada y di persamaan (21), diperoleh

$$-xd(x)yz = d(x)yzx$$
$$\Leftrightarrow d(x)yxz = d(x)yzx$$
$$\Leftrightarrow d(x)yxz - d(x)yzx = 0$$
$$\Leftrightarrow d(x)y(xz - zx) = 0$$
$$\Leftrightarrow d(x)y[x,z] = 0 \quad (22)$$

Karena y adalah sebarang elemen pada I, maka persamaan (22) dapat ditulis menjadi $d(x)I[x,z] = 0$. Dengan hasil tersebut dan menggunakan Lemma 1.7, persamaan tersebut berarti $d(x) = 0$ atau $[x,z] = 0$. Karena berdasarkan asumsi d adalah derivasi tak nol pada N maka $d(x) = 0$ tidak memenuhi. Oleh karena itu berlaku $[x,z] = 0$. Hal ini berarti $xz = zx$.

Karena $x \in I$ dan $z \in N$, sehingga berdasarkan Definisi 2.34, $x \in Z(N)$. Karena $x \in Z(N)$, maka $d(x) \in Z(N)$ untuk setiap $x \in I$. Hal ini berarti $d(I) \subset Z(N)$. Berdasarkan Lemma 1.6, maka sehingga didapatkan bahwa N merupakan ring komutatif.■

Contoh penerapan dari Teorema 3.17 diberikan pada Contoh 3.18 berikut.

Contoh 3.18 Dengan mengacu pada *near-ring* N, ideal semigrup tak nol I dari N, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.2 memenuhi $d(A \diamond B) = d(A) \diamond B$ untuk setiap $A, B \in I$.

Berikut merupakan contoh dari *near-ring* yang **bukan** *prime near-ring* tetapi memenuhi syarat cukup pada Teorema 3.17.

Contoh 3.19 Diperhatikan kembali *near-ring* M, ideal semigrup tak nol I dari M, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.3 memenuhi $d(A \diamond B) = d(A) \diamond B$ untuk setiap $A, B \in I$.

Contoh dari *near-ring* yang **bukan** *prime near-ring* dan **bukan** ring komutatif tetapi memenuhi aksioma seperti pada Teorema 3.17 diberikan pada Contoh 3.20 berikut.

Contoh 3.20 Diperhatikan *near-ring* P, ideal semigrup tak nol I dari P, dan derivasi tak nol d pada Contoh 3.4 memenuhi $d(A \diamond B) = d(A) \diamond B$ untuk setiap $A, B \in I$.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bagian sebelumnya, maka sehingga didapatkan bahwa hubungan antara derivasi *prime near-ring* dengan sifat komutatif ring adalah *prime near-ring* merupakan ring komutatif adalah derivasi tak nol d pada ideal semigrupnya memenuhi:(i) $d([x,y]) = [x,y]$, (ii) $d([x,y]) = [d(x),y]$, (iii) $d([x,y]) = [x,y]$, (iv) $d(x \diamond y) = (x \diamond y)$, (v) $d(x) \diamond y = (x \diamond y)$, (vi) $d(x \diamond y) = d(x) \diamond y$, untuk setiap $x, y \in I$, dengan I adalah ideal semigrup tak nol dari *prime near-ring* N.

Pada penelitian selanjutnya, disarankan untuk mencari hubungan antara derivasi *prime near-ring* dengan sifat komutatif ring yang melibatkan ideal semigrupnya satu sisi. Selain itu, disarankan juga untuk mengganti derivasi yang digunakan dengan jenis derivasi lain, seperti Jordan derivasi, derivasi-(θ, ϕ), dan derivasi yang telah diperumum.

DAFTAR PUSTAKA

Ashraf, M., & Siddeeque, A. (2015). On Semigroup Ideals and Generalized n-Derivation in Near-Rings. *Sarajevo Journal Of Mathematics* , 155-164.

Bell, H. E., & Mason, G. (1987). On Derivation in Near-Rings. *Elsevier Science Publisher B. V. (North-Holland)* , 31-35.

Bell, H. E., & Mason, G. (1992). On Derivations in Near-Rings and Rings. *Math. J. Okayama Univ* , 135-144.

Boua, A. (2012). Some Conditions under which Prime Near-Rings are Commutative Rings. *Int. J. Open Problems Compt. Math* , 7-15.

Howie, J. M. (1976). *An Introduction To Semigroup Theory*. New York: Academic Press Inc. (London) Ltd.

Pilz, G. (1983). *Near-Rings The Theory and its Applications*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Wang, X.-K. (1994). Derivation in Prime Near-Rings. *Proceedings of The American Mathematical Society* , 361-366.