PROIECTAREA PRIN METODA LQR ŞI METODA DIRECTĂ LYAPUNOV A SISTEMULUI DE CONTROL AL PROCESULUI *"PENDUL INVERS ROTATIV"*

Marian Popescu, *University Constantin Brâncuşi, Tg-Jiu, ROMANIA*
Adrian Runceanu, *University Constantin Brâncuşi, Tg-Jiu, ROMANIA*
Constantin Cercel, *University Constantin Brâncuşi, Tg-Jiu, ROMANIA*

Rezumat: În cadrul acestei lucrări se va prezenta implementarea unui sistem de control a procesului real "pendul invers rotativ". Acest sistem prezintă restricţii puternice de timp real şi totodată precizia comenzii calculate trebuie să fie cât mai mare, datorită faptului că sistemul are în plan vertical_Up un singur punct de echilibru instabil. Algoritmii implementaţi sunt bazaţi pe o structură de reglare cu reacţie după variabilele de stare şi proiectarea s-a realizat prin metoda LQR(Linear Quadratic Regulator) şi prin metoda directă Lyapunov, realizându-se astfel şi o comparaţie între cele două metode.

Cuvinte cheie: Lyapunov, LQR, pendul invers rotativ

1. DESCRIEREA PROCESULUI PENDUL INVERS ROTATIV

Pendulul invers rotativ este utilizat foarte mult în domeniul sistemelor de control pentru a ilustra idea tehnologiei controlului automat. Fiind un sistem neliniar şi instabil, practic are 2 puncte de echilibru în plan vertical, unul stabil vertical-Down şi altul instabil vertical-Up, este foarte util în testarea noilor dezvoltări în domeniul sistemelor neliniare. Ca şi construcţie, este format dintr-un braţ acţionat de un motor de c.c. ce se roteşte în plan orizontal şi are ataşat la capăt

LQR DESIGN METHOD AND LYAPUNOV DIRECT METHOD PROCESS CONTROL SYSTEM *"ROTARY INVERTED PENDULUM"*

Marian Popescu, *University Constantin Brâncuşi, Tg-Jiu, ROMANIA*
Adrian Runceanu, *University Constantin Brâncuşi, Tg-Jiu, ROMANIA*
Constantin Cercel, *University Constantin Brâncuşi, Tg-Jiu, ROMANIA*

Abstract: This paper will present the implementation of a real process control system "inverted pendulum rotating". This system has powerful real-time restrictions and also calculated the accuracy of the order must be as large because the system is planning vertical_Up one unstable equilibrium point. Implemented algorithms are based on a reaction after adjusting structure state variables and design was done by the method LQR (Linear Quadratic Regulator) and Lyapunov direct method, thus achieving a comparison between the two methods.

Keywords: Lyapunov method, LQR method, rotational inverted pendulum

1. INVERTED PENDULUM ROTARY PROCESS DESCRIPTION

Rotary inverted pendulum is used very much in control systems to illustrate the idea of automatic control technology. Being an unstable nonlinear system and basically has two vertical equilibrium points, one stable and one unstable vertical-Down-Up-down, is very useful in testing new developments in nonlinear systems. As construction consists of an arm driven by a DC motor that rotates horizontally and is attached to the end of the pendulum itself that rotates in a vertical plane perpendicular to the actuator arm, as in Fig.1.

pendulul propriu-zis care se roteşte într-un plan vertical perpendicular pe braţul de acţionare, ca în *Fig.1*.

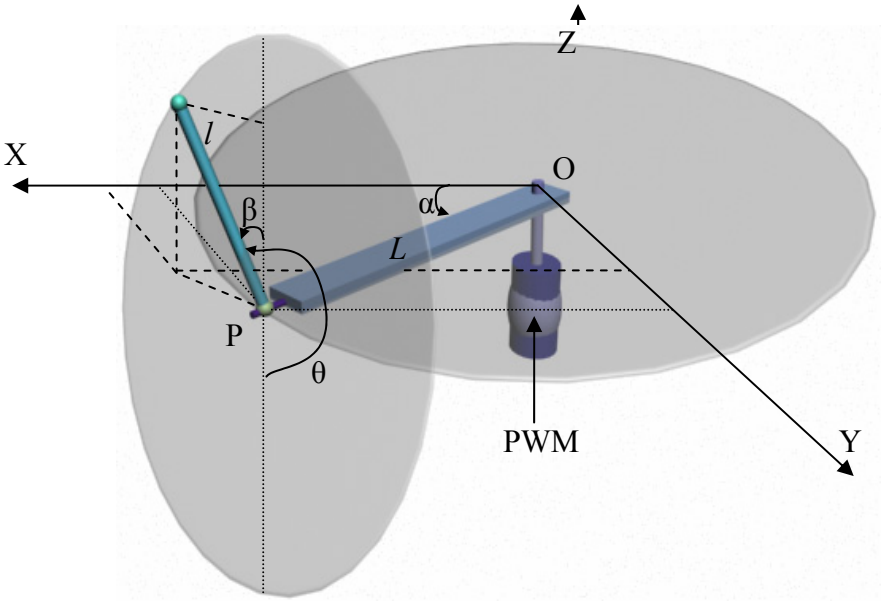

Fig.1. Vertical_Up pendulum.

Datorită faptului că pendulul invers rotativ are 2 grade de libertate rotaţionale şi numai un element de execuţie, acest sistem intră în categoria sistemelor subacţionate. Ideea menţinerii pendulului în pozitia vertical-Up constă în proiectarea unui sistem de control care să balanseze, printr-o corecţie continuă a comenzii la motorul de acţionare, pendulul în jurul punctului de echilibru instabil din planul vertical. Motorul care realizează acţionarea este conectat mecanic la braţul pendulului printr-un mecanism de roţi dinţate care realizează o multiplicare a turaţiei şi totodată conectează şi potenţiometrul de măsură a poziţiei braţului.

2.MODELAREA PENDULULUI ÎN POZIŢIE VERTICAL-UP

Pornind de la *Fig.1.* a pendulului poziţionat în plan vertical-Up, vom avea proiecţia mişcării pendulului în planul XOY ca în *Fig.2.* Modelarea mişcării pendulului se va realiza folosind ecuaţiile Euler-Lagrange şi vom considera pentru simplificare ca având centrul de greutate chiar în vârful pendulului.

Because the rotary inverted pendulum has two rotational degrees of freedom and only one element of performance, this system falls into the category of under operated systems. The idea of maintaining the pendulum in vertical-up position is to design a control system to balance, through a continuous adjustment to the engine control actuators, the pendulum around the equilibrium unstable plane. Performing drive motor is connected mechanically to the arm by a gear mechanism that achieves a multiplication of speed and also connect and position measuring potentiometer arm.

2.MATHEMATICAL MODELING FOR VERTICAL_UP PENDULUM

Based on *Fig.1.* the pendulum positioned vertically-Up, we have movement in the plane projection xOy as *Fig.2.* Modeling of pendulum motion will be made using the Euler-Lagrange equations and we consider for simplicity as being the center of gravity even at the top of the pendulum.

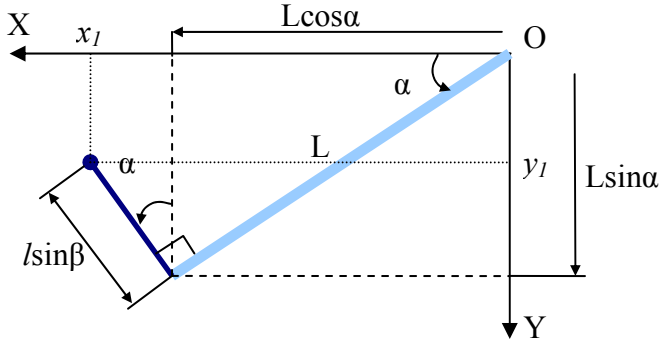

Fig.2. Projection in xOy plan Pendulum motion in the horizontal plane

Lagrangeanul sistemului este:

Lagrangean system is:

$$L=\frac{1}{2}J_b\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}m_pL^2\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}(J_p+m_pl^2)\dot{\beta}^2+\frac{1}{2}m_pl^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta-m_pLl\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta-m_pgl\cos\beta=$$
$$=\frac{1}{2}(J_b+m_pL^2)\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}(J_p+m_pl^2)\dot{\beta}^2+\frac{1}{2}m_pl^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta-m_pLl\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta-m_pgl\cos\beta \quad (1)$$

Pentru coordonata generalizată α avem ecuaţia Lagrange:

For generalized coordinates α we have Lagrange equation:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\tau_\alpha \quad (2)$$

unde τ_α-este cuplul total care acţionează asupra axei de rotaţie în direcţia creşterii lui α. Acesta reprezintă cuplul exercitat de motor-τ_m care trebuie să învingă cuplul de frecare.

where τ_α- is the total torque acting on the axis of rotation towards higher α. This engine is the torque τ_m- the torque required to overcome friction.

$$\tau_\alpha=\tau_m-C_b\dot{\alpha} \quad (3)$$

unde C_b-este coeficientul de frecare vâscoasă în jurul axei de rotaţie pentru unghiul α.

where C_b- is the viscous friction coefficient around of rotation axis for α angle.

Folosind relaţiile (1),(2), (3) prima ecuaţie de mişcare a braţului pendulului devine:

Using (1),(2), (3) first motion equation of pendulum arm is:

$$(J_b+m_pL^2)\ddot{\alpha}+m_pl^2\ddot{\alpha}\sin^2\beta-m_pLl\ddot{\beta}\cos\beta+2m_pl^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta+m_pLl\dot{\beta}^2\sin\beta=\tau_m-C_b\dot{\alpha} \quad (4)$$

Similar, pentru a 2-a coordonată generalizată β-unghiul braţului avem ecuaţia Lagrange:

Idem, for second generalized coordinate β-angle of arm has Lagrange equation:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\beta}=\tau_\beta \quad (5)$$

unde τ_β-este cuplul total care acţionează în jurul axei de rotaţie a braţului în direcţia creşterii unghiului β. Considerăm

Where, τ_β- is the total torque for acting around of rotation axis of arm in direction of rising the angle β. Consider $\tau_\beta=-C_p\dot{\beta}$,

$\tau_\beta = -C_p\dot{\beta}$, unde C_p este coeficientul de frecare vâscoasă a pendulului în jurul axei de rotaţie cu unghiul β.

Astfel, folosind relaţiile (1),(5), obţinem a 2-a ecuaţie de mişcare:

where C_p is the viscous friction coefficient around of rotation axis for β angle.

So, using (1), (5) we obtain the second motion equation:

$$(J_p + m_p l^2)\ddot{\beta} - m_p Ll\ddot{\alpha}\cos\beta + m_p Ll\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta - m_p l^2\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - m_p Ll\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta - m_p gl\sin\beta = \tau_\beta$$

$$\Rightarrow -m_p Ll\ddot{\alpha}\cos\beta + (J_p + m_p l^2)\ddot{\beta} - m_p l^2\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - m_p gl\sin\beta = -C_p\dot{\beta} \qquad (6)$$

Astfel, din relaţiile (4) şi (6) se obţin ecuaţiile de mişcare pentru sistemul "pendul invers rotativ" în poziţia vertical-Up:

So, from (4) and (6) we obtain the motion equation for "rotation invers pendulum" in up-vertical position

$$\begin{cases} (J_b + m_p L^2)\ddot{\alpha} + m_p l^2\ddot{\alpha}\sin^2\beta - m_p Ll\ddot{\beta}\cos\beta + 2m_p l^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta + m_p Ll\dot{\beta}^2\sin\beta = \tau_m - C_b\dot{\alpha} \\ -m_p Ll\ddot{\alpha}\cos\beta + (J_p + m_p l^2)\ddot{\beta} - m_p l^2\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - m_p gl\sin\beta = -C_p\dot{\beta} \end{cases} \qquad (7)$$

3. LINIARIZAREA SISTEMULUI ÎN JURUL UNUI PUNCT STAŢIONAR DE FUNCŢIONARE,CAZUL PENDUL-UP

3. SYSTEM LINEARIZATION AROUND A STATIONARY POINT OPERATION, THE CASE PENDUL_UP

Pornind de la relaţiile (7) ce reprezintă ecuaţiile pentru braţ şi pentru pendul în poziţia vertical-Up, vom liniariza aceste ecuaţii în jurul unui punct staţionar de funcţionare α_0, β_0, caracterizat de următoarele relaţii:

Starting from the relations(7) what are the equations for the pendulum arm and the vertical_Up position, these equations will be linearized around a steady operating point α_0, β_0 ,characterized by the following relations:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha(t);\ \beta(t) = \beta_0 + \Delta\beta(t) \qquad (8)$$

Poziţia α_0-este unghiul unde trebuie ţinut braţul în plan orizontal şi implicit pendulul să fie în echilibru vertical_Up. Astfel $\alpha_0 = \alpha_{ref}$ este chiar mărimea de referinţă pentru sistem.

The position α_0-is the angle where the arm should be held horizontally and thus be in balance pendulum vertical_Up. Thus $\alpha_0 = \alpha_{ref}$ is the reference for the system.

$$\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha(t) \\ \beta(t) = \beta_0 + \Delta\beta(t) = \Delta\beta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \Delta\dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) = \Delta\dot{\beta}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\alpha}(t) = \Delta\ddot{\alpha}(t) \\ \ddot{\beta}(t) = \Delta\ddot{\beta}(t) \end{cases} \qquad (9)$$

Ecuaţiile de stare(7), liniarizate în jurul punctului staţionar devin:

The state equation(7), linearized around the stationary point is:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fa}{b^2 - ea} & \frac{ha}{b^2 - ea} & -\frac{cb}{b^2 - ea} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{fb}{b^2 - ea} & -\frac{hb}{b^2 - ea} & \frac{ce}{b^2 - ea} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{db}{b^2 - ea} \\ 0 \\ -\frac{de}{b^2 - ea} \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (10)$$

unde:

where:

$$a = (J_b + m_p L^2); b = -m_p Ll; c = C_b + \frac{K_t K_b}{R_a}; d = \frac{K_t}{R_a}; e = J_p + m_p l^2; f = C_p; h = -m_p gl$$

4. PROIECTAREA STRUCTURII SISTEMULUI DE CONTROL PRIN METODA LQR

Implementarea structurii de reglare cu reacţie după variabilele de stare este prezentată în *Fig.3.* cu răspunsurile în timp real prezentate în *Fig.4.*

4. STRUCTURE OF CONTROL SYSTEM DESIGN WITH METHOD LQR

Implementation of the control structure with state feedback is presented in *Fig.3.* with real-time responses shown in *Fig.4.*

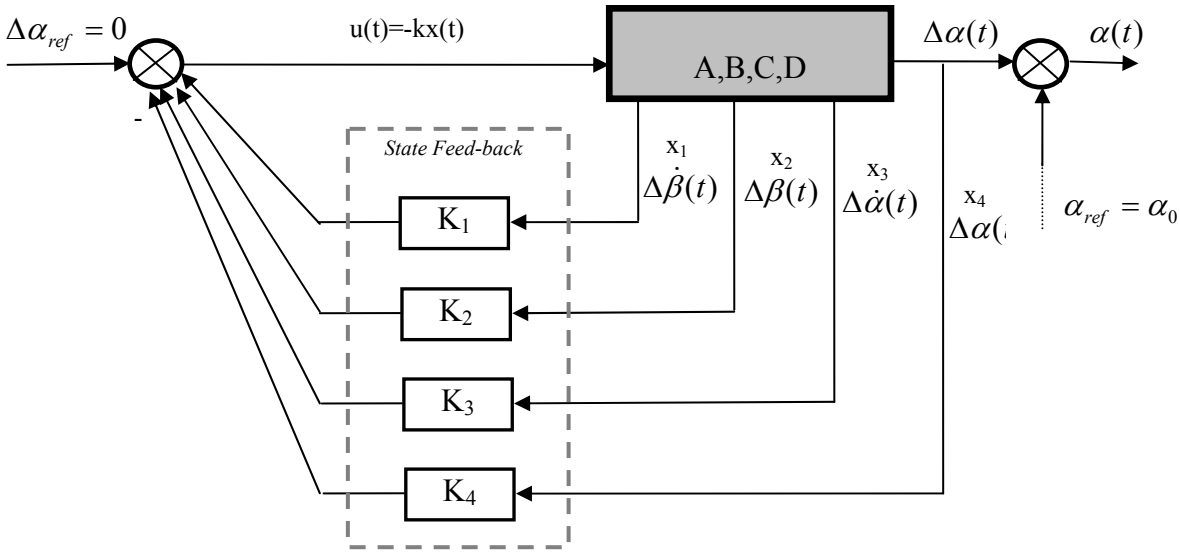

Fig.3.Structura sistemului de reglare cu reacţie după variabilele de stare

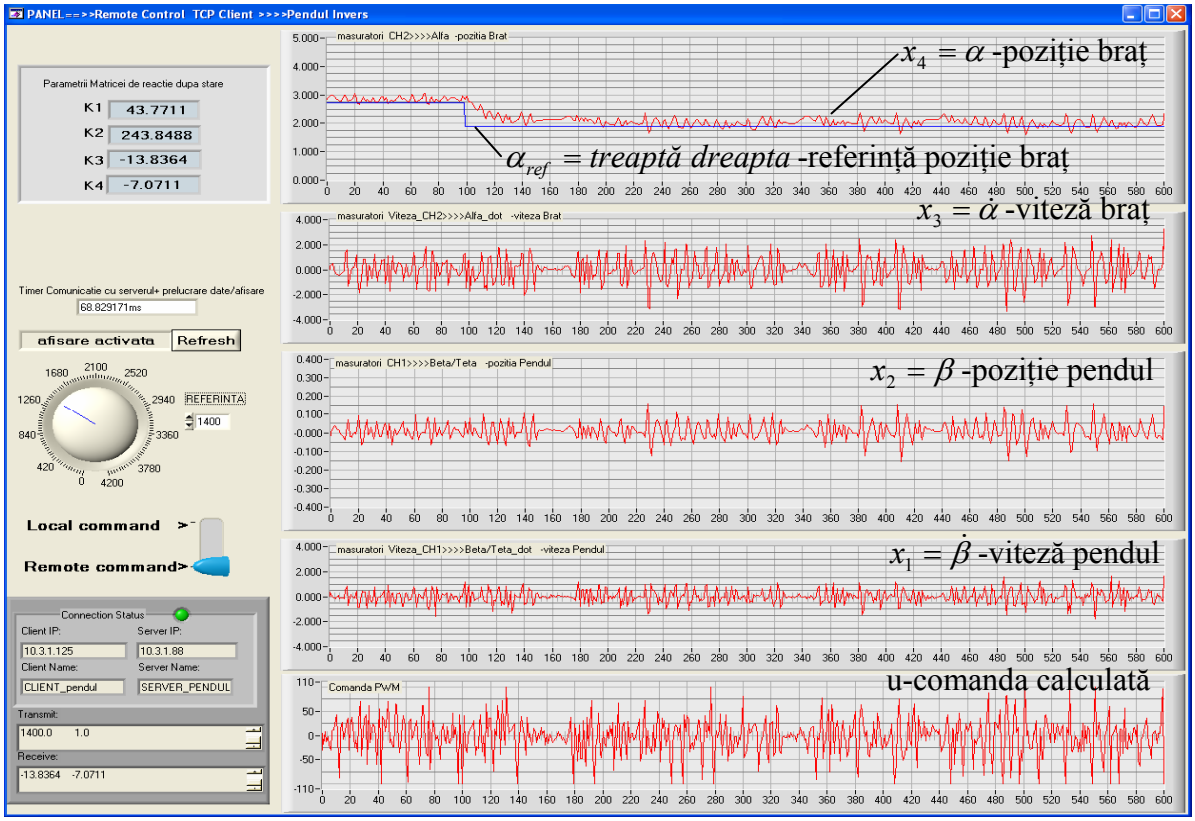

Fig.4. Răspunsul sistemului real obţinut pentru variaţia treaptă a referinţei α_{ref}

5. PROIECTAREA STRUCTURII SISTEMULUI DE REGLARE PRIN METODA DIRECTĂ LYAPUNOV

Ideea de bază în liniarizarea Intrare-Ieşire este găsirea unei relaţii directe între mărimea de comandă şi ieşirea sistemului. O metodă de a găsi această relaţie este să derivăm succesiv mărimea de ieşire până apare mărimea de comandă direct în ecuaţie. Procedând în această manieră vom avea:

5. STRUCTURE OF CONTROL SYSTEM DESIGN WITH DIRECT LYAPUNOV METHOD

The basic ideea in state feedback linearization is finding a direct relationship between control signal and output signal of the system. One way to find this relatioship is successively derive the output signal until control signal appear direct in the equation. Thus we have:

$$\dot{y} = \dot{\beta} \;;\quad \ddot{y} = \ddot{\beta} = \frac{1}{\det(M)}(b + \mathrm{m_p L l}\cos\beta\frac{\mathrm{K_t}}{\mathrm{R_a}}u)$$

Se poate observa că intrarea "*u*" apare direct în ieşire la a 2-a derivare a ieşirii şi astfel vom liniariza sistemul (7) Intrare-Ieşire prin reacţie, impunând o comandă virtuală *v* de forma:

It may be noted that the input signal "*u*" appers directly in the output signal for second derivative of otput signal and we achieved fedback input-output liniarization of the system (7) and impose a form of virtual command:

$$v = \ddot{y} = \ddot{\beta} = \frac{1}{\det(M)}(b + \mathrm{m_p L l}\cos\beta\frac{\mathrm{K_t}}{\mathrm{R_a}}u) \qquad (11)$$

Comanda reală aplicată la motorul de acționare va fi de forma:

The real command applied to the motor drive will be as:

$$u = \frac{\det(M)v - b}{\frac{K_t}{R_a} m_p L l \cos\beta} \qquad (12)$$

Structura sistemului este prezentată în *Fig.5.*

The system structure is presented in *Fig.5.*

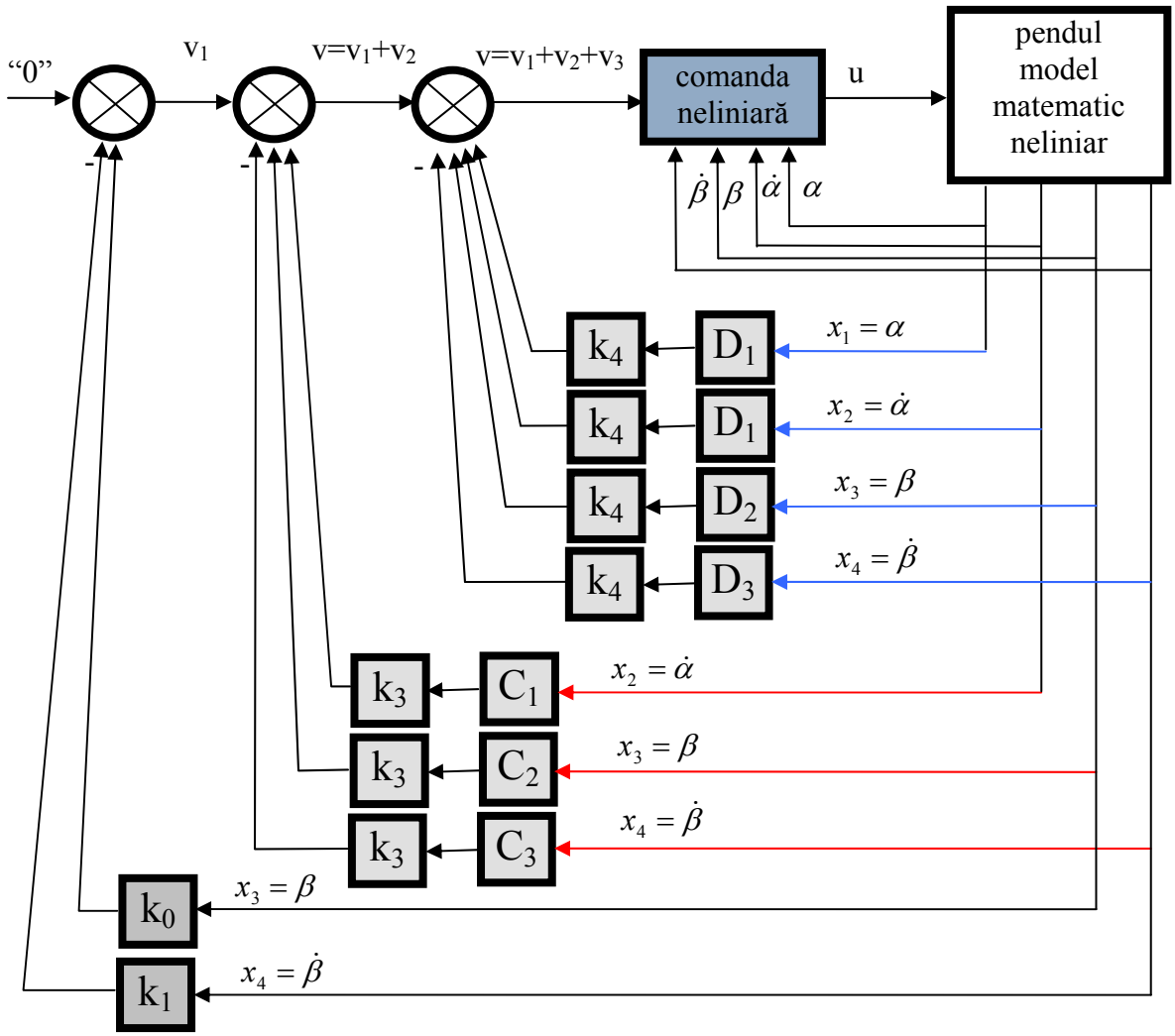

Fig.5.Structura sistemului proiectat prin metoda a doua Lyapunov

Comanda obținută pentru sistemul "pendul invers rotativ" prin proiectare cu metoda a doua Lyapunov este:

The command obtained for the system "rotary inversed pendulum" is:

$$v = -k_0 x_3 - k_1 x_4 - k_3 C_1 x_2 - k_3 C_2 x_3 - k_3 C_3 x_4 - k_4 D_1 x_1 - k_4 D_2 x_2 - k_4 D_3 x_3 - k_4 D_4 x_4$$

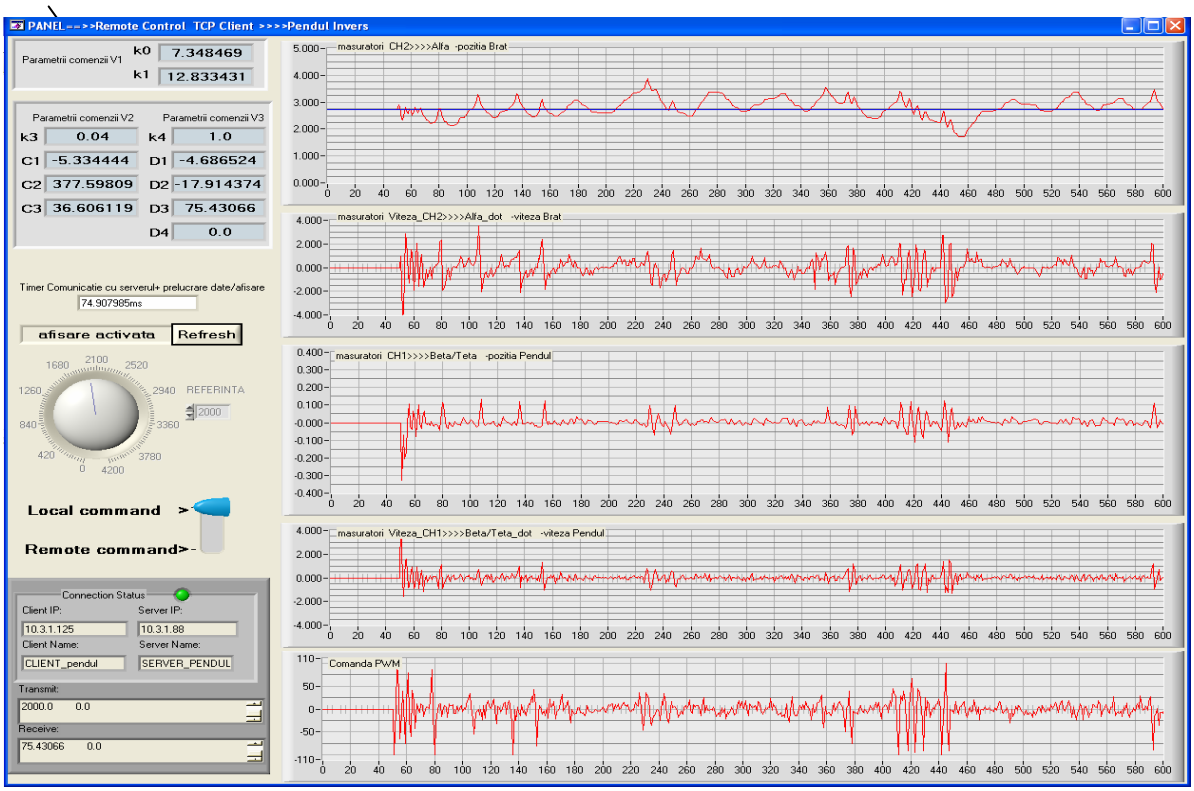

Fig.6.Răspunsul sistemului real pendul-invers

CONCLUZII

Cerinţele de timp real ale acestui proces sunt foarte puternice şi acest lucru a necesitat realizarea unei distribuţii mai mari a prelucrării. Implementarea a fost realizată ca o structură de reglare cu reacţie după variabilele de stare, iar proiectarea algoritmului de reglare a fost realizat prin metoda LQR şi metoda a doua Lyapunov. Prin realizarea unei comparaţii ale celor 2 răspunsuri, metoda directă Lyapunov, fiind o metodă bazată pe o funcţie energetică, realizează stabilizarea pendulului în poziţie vertical-Up cu o robustete mai mare în jurul poziţiei de echilibru, pe când metoda LQR, deşi stabilizează mai bine pendulul, are un domeniul mic de stabilitate în jurul punct staţionar de funcţionare.

CONCLUSIONS

Real-time requirements of this process are very strong and this has necessitated the achievement of a greater distribution of processing. The implementation was done as feedback input-output linearization and control algorithm designed was done by LQR method and the second Lyapunov method. By a comparison of the two responses, Lyapunov direct method, is a method besed on an energy basis, the stabilization pendulum vertical_Up with a more robust around the equilibrium position, while the LQR method, although better stabilizes pendulum has a small field of stability around the stationary point of operation

BIBLIOGRAFIE

[1] Aström K.A., Murray R.M., ***"FEEDBACK SYSTEMS-AN***

REFERENCES

[1] Aström K.A., Murray R.M., ***"FEEDBACK SYSTEMS-AN INTRODUCTION FOR SCIENTISTS***

INTRODUCTION FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS", 2008, Princeton University Press, ISBN-13: 978-0-691-13576-2, ISBN-10: 0-691-13576-2

[2] C.J.A. van Kats, ***"NONLINEAR CONTROL OF A FURUTA ROTARY INVERTED PENDULUM"***, DCT report nr.2004.69, 2004, TU/e Bachelor Final Project Report

[3] Ionete C., Manole E., Surlea D., ***"xPC MULTITASKING CONTROL FOR TWO QUANSER EXPERIMENTS",*** 9th International Carpathian Control Conference-ICCC'2008, Sinaia, România, 25-28 Mai 2008, pag.263-266, ISBN 978-973-746-897-0

[4] Popescu D., Răsvan V., Danciu D., ***"SOME ASPECTS RGARDING THE PIO THEORY",*** 9th International Carpathian Control Conference-ICCC'2008, Sinaia, România, 25-28 Mai 2008, pag.525-530, ISBN 978-973-746-897-0

[5] Răsvan V., Popescu D., Danciu D., ***"NETWORKS AND SYNCHRONIZATION",*** A XIII-a ediție International symposium on systems theory SINTES 13, 18-20 octombrie 2007, Craiova, pag.164-168, ISBN:978-973-742-839-4

AND ENGINEERS", 2008, Princeton University Press, ISBN-13: 978-0-691-13576-2, ISBN-10: 0-691-13576-2

[2] C.J.A. van Kats, ***"NONLINEAR CONTROL OF A FURUTA ROTARY INVERTED PENDULUM"***, DCT report nr.2004.69, 2004, TU/e Bachelor Final Project Report

[3] Ionete C., Manole E., Surlea D., ***"xPC MULTITASKING CONTROL FOR TWO QUANSER EXPERIMENTS",*** 9th International Carpathian Control Conference- ICCC'2008, Sinaia, România, 25-28 Mai 2008, pag.263-266, ISBN 978-973-746-897-0

[4] Popescu D., Răsvan V., Danciu D., ***"SOME ASPECTS RGARDING THE PIO THEORY",*** 9th International Carpathian Control Conference-ICCC'2008, Sinaia, România, 25-28 Mai 2008, pag.525-530, ISBN 978-973-746-897-0

[5] Răsvan V., Popescu D., Danciu D., ***"NETWORKS AND SYNCHRONIZATION",*** A XIII-a ediție International symposium on systems theory SINTES 13, 18-20 octombrie 2007, Craiova, pag.164-168, ISBN:978-973-742-839-4