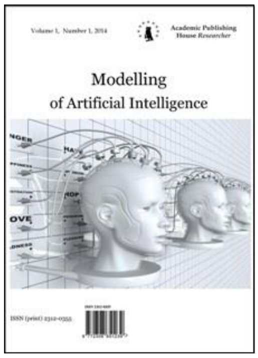
Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.
ISSN: 2312-0355
E-ISSN: 2413-7200
Vol. 12, Is. 4, pp. 180-186, 2016

DOI: 10.13187/mai.2016.12.180
www.ejournal11.com



Articles and statements

UDC 519.62

The Space of Finite Elements in the Weighted Spaces

Mariam H. Arabyan [a,*]

[a] Yerevan State University, Armenia

Abstract

In this paper we consider the space of finite elements in weighted functional spaces. These functional spaces were introduced when we were considering a differential system, some of the coefficients of which have nonsummable feature. These functional weighted spaces are complete, Hilbert and for them the embedding theorems are valid. Now it's time to build the spaces of finite elements in these weighted spaces for applying the method of the finite elements.

Keywords: weighted functional spaces, finite elements, nonsummable feature, hardy inequality.

1. Введение

Численная реализация многих методов решения задач описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений, невозможна без описания тех или иных методов приближенного решения возникающих краевых задач.

Для решения краевых задач и задач на собственные значения часто применяют такие методы, как разностный метод, метод конечных элементов, метод прямых, метод характеристик, методы Ритца и Галеркина (Михлин, 1970; Arakelyan , 2015; Khurshudyan , 2015; Bramble, 2010).

В этой работе для решения краевой задачи и задачи на собственные значения с использования метода конечных элементов строится пространство конечных элементов. Он получил широкое распространение в последние годы (Сьярле, 1980; Chen, 2006). Этот метод сводит исходные задачи к хорошо обусловленным системам линейно алгебраических уравнений и задачам на собственные значения для матрицы: коэффиценты матрицы вычисляются просто и среди них очень много нулей. Пространство конечных элементов строится в введенных весовых пространствах. Эти пространства были введены специально при рассмотрении дифференциальной системы, некоторые коэффициенты которых имеют несуммируемую особенность.

[*] Corresponding author
E-mail addresses: arabyan.mariam@ysu.am (M.H. Arabyan)

2. Обсуждение

1. Пространство конечных элементов в весовых пространствах. При рассмотрении задачи на собственные значения дифференциальной системы, некоторые коэффициенты которой имеют несуммируемую особенность ((Григолюк, 1955), (Багдасарян, 1960)), были введены ((Арабян, 2005), (Арабян, 2016)) весовые функциональные пространства $H_r^1[0,b]$, $H_r^2[0,b]$, $\widetilde{H}_r^2[0,b]$, $H_r^3[0,b]$ со скалярными произведениями соответственно:

$$\langle u,v\rangle_{H_r^1} = \int_0^b \left(ru'v' + \frac{uv}{r}\right) dr,$$

$$\langle u,v\rangle_{H_r^2} = \int_0^b \left(ru''v'' + \frac{u'v'}{r} + uv\right) dr,$$

$$\langle u,v\rangle_{\widetilde{H}_r^2} = \int_0^b \left(ru''v'' + u'v' + \frac{uv}{r^2}\right) dr,$$

$$\langle u,v\rangle_{H_r^3} = \int_0^b \left(ru'''v''' + u''v'' + \frac{u'v'}{r^2} + uv\right) dr.$$

и нормами:

$$\|v\|_{H_r^1} = \left(\langle v,v\rangle_{H_r^1}\right)^{1/2}, \qquad \|v\|_{H_r^2} = \left(\langle v,v\rangle_{H_r^2}\right)^{1/2},$$
$$\|v\|_{\widetilde{H}_r^2} = \left(\langle v,v\rangle_{\widetilde{H}_r^2}\right)^{1/2}, \qquad \|v\|_{H_r^3} = \left(\langle v,v\rangle_{H_r^3}\right)^{1/2},$$

Построим пространство конечных элементов S_{1h}, S_{2h} в пространствах H_r^1, H_r^2. Для этого на числовой оси $-\infty < r < +\infty$ введем сетку, состоящую из точек

$$r_i = ih, \qquad h > 0, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Через S_{1h} обозначим линейное пространство функций:

$$u_{1h}(r) = \sum_{i=-1}^{N} u_{i+\frac{1}{2}} \ell_{1,i}(r), \tag{1)}$$

где $u_{i+\frac{1}{2}}$ – любые постоянные, такие, что $u_{-\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{2}}$, $u_{N+\frac{1}{2}} = u_{N-\frac{1}{2}}$, $\ell_{1,i}(r) = \tilde{\ell}_{1,i}(r) - \tilde{\ell}_{1,i}(b)$, а

$$\tilde{\ell}_{1,i}(r) = \begin{cases} \dfrac{(r-r_{i-1})^2}{2h^2}, & r_{i-1} \le r \le r_i \\ 1 - \dfrac{(r_{i+1}-r)^2 + (r-r_i)^2}{2h^2}, & r_i \le r \le r_{i+1} \\ \dfrac{(r_{i+2}-r)^2}{2h^2}, & r_{i+1} \le r \le r_{i+2} \\ & i = \overline{-1,N} \end{cases} \tag{2)}$$

Через S_{2h} обозначим линейное пространство функций

$$u_{2h}(r) = \sum_{i=0}^{N} u_i \ell_{2,i}(r),$$

где u_i – любые постоянные, такие, что $u_0 = 0$, а

$$\ell_{2,i}(r) = \begin{cases} \dfrac{r-r_{i-1}}{h}, & r_{i-1} \le r \le r_i \\ \dfrac{r_{i+1}-r}{h}, & r_i \le r \le r_{i+1} \\ & i = \overline{0,N}\,. \end{cases} \tag{3)}$$

Пространство пар $u_h = (u_{1h}, u_{2h})$ обозначим через

$$V_h = S_{1h} \times S_{2h} \subset H_r^2 \times H_r^1\,.$$

Справедлива

Теорема. *Пусть* $u = (u_1, u_2) \in H_r^3 \times \widetilde{H}_r^2$, $u_1(b) = u_1'(b) = 0$. *Пусть функции* $u_{1h} = u_{1h}(r)$, $0 \le r \le b$, *получена из (2) при* $u_{i+\frac{1}{2}} = u_1\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right)$, *а* $u_1(r) = u_1(2b - r)$, *при* $b \le r \le b + h/2$. *Пусть* $u_{2h} = u_{2h}(r)$ *получена из (3) при* $u_i = u_2(r_i)$. *Тогда* $u_h = (u_{1h}, u_{2h}) \in V_h \in H_r^1 \times \widetilde{H}_r^2$, $u_{1h}(b) = u_{1h}'(b) = 0$ *и справедлива оценка*

$$\|u - u_h\|_{H_r^2 \times H_r^1} \le C_1 \|u\|_{H_r^3 \times \widetilde{H}_r^2 182} \cdot h \,, \tag{4}$$

где $c_1 = const > 0$ *и не зависит от* h.

Доказательство. В дальнейшем неоднократно будем пользоваться неравенством Харди (Никольский, 1977):

$$\left(\int_0^a \left|\frac{1}{x^\mu}\int_x^a \varphi(t)dt\right|^p dx\right)^{1/p} \le c(a)\left(\int_0^a \left|\frac{\varphi(t)}{t^\beta}\right|^p dt\right)^{1/p} \tag{5}$$

при условии, что

$$\mu < \frac{1}{p}, \qquad \mu \le \beta + 1, \qquad p > 1.$$

В (5) $c(a) = \frac{1}{\frac{1}{p} + \mu} a^{\beta - \mu + 1}$. В первую очередь нужно показать, что $u_h = (u_{1h}, u_{2h}) \in H_r^2 \times H_r^1$. Для этого докажем, что $u_{2h}(r) \in H_r^1[0, b]$. Из (3) имеем

$$u_{2h}(r) = u_i \frac{r - r_{i-1}}{h} + u_{i-1}\frac{r_i - r}{h}\,, \qquad r_{i-1} \le r \le r_i, \qquad i = \overline{1, N}\ . \tag{6}$$

где $u_i = u_2(r_i)$. Но тогда получим $u_{2h}(r_i + 0) = u_{2h}(r_i - 0) = u_2(r_i)$, т.е. $u_{2h}(r) \in C[0, b] \subset L_2[0, b]$. Далее, $u_{2h}'(r) = \frac{u_i - u_{i-1}}{r}$, при $r_{i-1} \le r \le r_i$. Отсюда $u_{2h}'(r) \in L_1[0, b]$.

Теперь покажем, что

$$\|u_{2h}\|_{H_r^1} < +\infty\,.$$

Действительно,

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} r(u_{2h}')^2\, dr = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r_i \frac{\left(u_2(r_i) - u_2(r_{i-1})\right)^2}{h}\, dr = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r\left(\frac{\int_{r_{i-1}}^{r_i} u_2'(\xi)\, d\xi}{h}\right)^2 dr \le$$

$$\le \int_{r_{i-1}}^{r_i} r\frac{\int_{r_{i-1}}^{r_i} u_2'^2\, d\xi}{h}\, dr \le b\int_{r_{i-1}}^{r_i} (u_2')^2\, dr\,, \qquad i = \overline{1, N}\ .$$

Но тогда

$$\int_0^b r(u_{2h}')^2\, dr \le b\int_0^b (u_2')^2 dr \le b\|u_2\|_{H_r^1[0,b]}^2\,. \tag{7}$$

Поскольку

$$\|u_2\|_{H_r^1[0,b]}^2 = \int_0^b \left(r(u_2')^2 + \frac{u_2^2}{r}\right) dr\,,$$

то нам остается оценить вторую слагаемую правой части последнего равенства.
Из (6) получим

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\left(u_{2h}(r)\right)^2}{r}\, dr \le \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{2}{r}\left[\left(u_2(r_i)\right)^2 \frac{(r - r_{i-1})^2}{h^2} + \left(u_2(r_{i-1})\right)^2 \frac{(r_i - r)^2}{h^2}\right] dr \le$$

$$\le 2\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\left(u_2(r_i)\right)^2 + \left(u_2(r_{i-1})\right)^2}{r}\, dr\,, \qquad i = \overline{2, N} \tag{8}$$

Далее,

$$u_2(r_i) = \int_r^{r_i} u_2'(\xi)d\xi - u_2(r), \qquad r_{i-1} \le r \le r_i$$

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\left(u_2(r_i)\right)^2}{r}\,dr \le 2 \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{h\int_{r_{i-1}}^{r_i}\left(u_2'(\xi)\right)^2 d\xi}{r}\,dr + 2\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\left(u_2(r)\right)^2}{r}\,dr \le$$
$$\le 4\|u_2\|_{\widetilde{H}_r^2[r_{i-1},r_i]}, \quad i=\overline{2,N} \tag{9}$$

Отсюда и из (8) при $i=\overline{2,N}$ имеем

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\left(u_{2h}(r)\right)^2}{r}\,dr \le 8\|u_2\|_{\widetilde{H}_r^2[r_{i-1},r_i]}, \quad i=\overline{2,N} \tag{10}$$

В силу (6) с учетом $u_2(0)=0$ при $0\le r\le h$ получим $u_{2h}(r)=u_2(h)\frac{r}{h}$. Отсюда имеем

$$\int_0^h \frac{\left(u_{2h}(r)\right)^2}{r}\,dr \le \frac{1}{h^2}\int_0^h \left(u_2(h)\right)^2 r\,dr \le \frac{1}{2}\left(u_2(h)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(u_2(h)-u_2(0)\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^h u_2'(\xi)\,d\xi\right)^2 \le \frac{1}{2}h\int_0^h \left(u_2'(\xi)\right)^2 d\xi \le \|u_2\|^2_{\widetilde{H}_r^2[0,h]}\,. \tag{11}$$

Из (7), (10) и (11) следует, что

$$\|u_{2h}\|_{H_r^1[0,b]} \le 8\|u_2\|_{\widetilde{H}_r^2[0,b]} < +\infty\,. \tag{12}$$

Таким образом, $u_{2h}(r)\in H_r^1[0,b]$. Аналогично доказывается, что $u_{1h}(r)\in H_r^2[0,b]$, а значит $u_h=(u_{1h},u_{2h})\in H_r^2\times H_r^1$.

Теперь докажем следующую оценку

$$\|u_2-u_{2h}\|_{H_2^1} \le 4\|u_2\|_{\widetilde{H}_r^2} h\,. \tag{13}$$

Из (6) с учетом $u_i=u_2(r_i)$ имеем

$$(u_2'-u_{2h}')(r) = u_2'(r) - \frac{u_2(r_i)-u_2(r_{i-1})}{h} = \frac{1}{h}\int_{r_{i-1}}^{r_i}\int_{\xi}^{r} u_2''(z)\,dz\,d\xi\,,$$

для всех $r: r_{i-1}\le r\le r_i$, $i=\overline{1,N}$. Тогда при $i=\overline{2,N}$

$$(u_2'-u_{2h}')^2 \le \frac{1}{h^2}\left(\int_{r_{i-1}}^{r_i}\int_{\xi}^{r} u_2''(z)\,dz\,d\xi\right)^2 \le \frac{h}{r_{i-1}}\int_{r_{i-1}}^{r_i} r(u_2'')^2\,dr\,, \tag{14}$$

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} r(u_2'-u_{2h}')^2\,dr \le 2h^2\int_{r_{i-1}}^{r_i} r(u_2'')^2\,dr\,. \tag{15}$$

Далее, при $0\le r\le h$

$$(u_2'-u_{2h}')(r) = u_2'(r) - \frac{u_2(h)-u_2(0)}{h}\,.$$

Тогда

$$\int_0^h r(u_2'-u_{2h}')^2\,dr \le 2\int_0^h r\left(u_2'(r)-u_2'(h)\right)^2 dr +$$
$$+2\int_0^h r\left(u_2'(h)-\frac{u_2(h)-u_2(0)}{h}\right)^2 dr = 2\int_0^h r\left(\int_r^h u_2''(z)dz\right)^2 dr +$$
$$+\frac{2}{h^2}\int_0^h r\left(\int_0^h\int_{\xi}^h u_2''(z)\,dz\,d\xi\right)^2 dr \le 4h\int_0^h\left(\int_r^h u_2''(z)dz\right)^2 dr. \tag{16}$$

Отсюда при помощи неравенства Харди (5) при $\varphi(t)=u_2''(z)$, $a=h$, $x=r$, $p=2$, $\mu=0$, $\beta=-\frac{1}{2}$ получим

$$\int_0^h r(u_2' - u_{2h}')^2 dr \le 16h^2 \int_0^h r(u_2'')^2 dr\,.$$

Но тогда в силу (15) имеем

$$\int_0^b r(u_2' - u_{2h}')^2 dr \le 16h^2 \int_0^b r(u_2'')^2 dr\,. \qquad 17)$$

Легко заметить, что

$$(u_2 - u_{2h})(r) = \int_{r_{i-1}}^{r_i} (u_2' - u_{2h}')(\xi) d\xi\,,$$

для всех $r: r_{i-1} \le r \le r_i$, $i = \overline{1, N}$. Отсюда при $i \ne 1$ с учетом (14) имеем

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{(u_2 - u_{2h})^2}{r}\, dr \le \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{h \int_{r_{i-1}}^{r_i} (u_2' - u_{2h}')^2(\xi) d\xi}{r}\, dr \le$$
$$\le \frac{h^4}{r_{i-1}^2} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r(u_2'')^2\, dr \le h^2 \int_{r_{i-1}}^{r_i} r(u_2'')^2\, dr\,. \qquad 18)$$

При $i = 1$ из (6) получим

$$(u_2 - u_{2h})(r) = \int_0^r (u_2' - u_{2h}')(\xi) d\xi\,.$$

Тогда аналогично (16) имеем

$$\int_0^h \frac{(u_2 - u_{2h})^2}{r}\, dr \le \int_0^h \int_0^r (u_2' - u_{2h}')^2\, d\xi\, dr \le 16h^2 \int_0^h r(u_2'')^2 dr\,. \qquad 19)$$

Отсюда и из (18) следует

$$\int_0^b \frac{(u_2 - u_{2h})^2}{r}\, dr \le 16h^2 \int_0^b r(u_2'')^2 dr\,. \qquad 20)$$

А из этого и из оценок (17) и (20) следует оценка (13).

Аналогично из оценки (13) доказывается следующая оценка:

$$\|u_1 - \tilde{u}_{1h}\|_{H_r^2} \le M_1 \|u_1\|_{H_r^3} h\,. \qquad 21)$$

Отсюда и в силу того, что $u_1(b) = 0$,

$$(u_1 - u_{1h})(r) = (u_1 - \tilde{u}_{1h})(r) - (u_1 - \tilde{u}_{1h})(b)$$

и оценки из теоремы вложения 4 (см. [9]) получим

$$\|u_1 - u_{1h}\|_{H_r^2} \le \|u_1 - \tilde{u}_{1h}\|_{H_r^2} + b^{\frac{1}{2}} |u_1 - \tilde{u}_{1h}(b)| \le$$
$$\le \left(1 + b^{\frac{1}{2}} C_3\right) \|u_1 - \tilde{u}_{1h}\|_{H_r^2} \le M_1 M_2 \left(1 + b^{\frac{1}{2}} C_3\right) \|u_1\|_{H_r^3} h\,.$$

Отсюда и из (13) следует оценка (4). Теорема доказана.

3. Заключение

Метод конечных элементов сводит исходные задачи к хорошо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений и задачам на собственные значения для матрицы. Коэффициенты матрицы вычисляются просто и среди них очень много нулей.

В работе построенное пространство конечных элементов дает возможность применять метод конечных элементов при решении краевой задачи и задачи на собственные значения для дифференциальной системы, некоторые коэффициенты которых имеют несуммируемую особенность.

Литература

Арабян, 2005 – *Арабян М.О.* (2005). Исследование спектра одного вырождающегося оператора. *Ученые записки. ЕГУ.* № 3. с. 31-39.

Арабян, 2016 – *Арабян М.О.* (2016). Гладкость обобщенных форм колебаний в задаче колебаний оболочки вращения в зависимости от некоторых несуммируемых коэффициентов // Изв. НАН Армении. Механика. т. 69. № 3. с. 28-40.

Багдасарян, 1960 – *Багдасарян Ж.Е., Гнуни В.Ц.* (1960). К теории динамической устойчивости слоистых анизатропных оболочек вращения // *Изв. АН Арм. ССР*, Физ.-мат. н., т. 13. № 5. с. 27-36.

Григолюк, 1955 – *Григолюк Э.И.* (1955). Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек // *Изв. АН СССР, Отдел тех. наук.* № 3. с. 33-68.

Михлин, 1970 – *Михлин С.Г.* (1970). Вариационные методы в математической физике. Москва: Наука, 512 с.

Никольский, 1977 – *Никольский С.М.* (1977). Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва: Наука, 456 с.

Сьярле, 1980 – *Сьярле Ф.* (1980). Метод конечных элементов для элиптических задач. Москва: Мир, 512 с.

Arakelyan, 2015 – *Arakelyan Sh.Kh., Khurshudyan As.Zh.* (2015). The Bubnov-Galerkin procedure in problems of mobile (scanning) control for systems with distributed parameters // *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics*. Vol. 68, № 3. pp. 54-75.

Bramble, 2010 – *Bramble J. H., Pasciak J. E., Trenev D.* (2010). Analysis of a finite pml approximation to three dimensional elastic wave scattering // *Math. Comput.* Vol. 79. № 272. pp. 2079-2101.

Chen, 2006 – *Chen Y., Liu W.B.* (2006). Error estimates and superconvergence of mixed finite element for quadratic optimal control // I*nternational J. Numerical Analysis and Modeling*. № 3. pp. 311-321.

Khurshudyan, 2015 – *Khurshudyan As.Zh.* (2015). The Bubnov-Galerkin method in control problems of bilinear systems. *Automation and Remote Control.* Vol. 76, Is. 8. pp. 1361-1368.

References

Khurshudyan, 2015 – *Khurshudyan As.Zh.* (2015). The Bubnov-Galerkin method in control problems of bilinear systems. *Automation and Remote Control.* Vol. 76, Is. 8. pp. 1361-1368.

Arabyan, 2005 – *Arabyan M.O.* (2005). Issledovanie spektra odnogo vyrozhdayushchegosya operatora. *Uchenye zapiski. EGU.* № 3. s. 31-39.

Arabyan, 2016 – *Arabyan M.O.* (2016). Gladkost' obobshchennykh form kolebanii v zadache kolebanii obolochki vrashcheniya v zavisimosti ot nekotorykh nesummiruemykh koeffitsientov. I*zv. NAN Armenii. Mekhanika.* t. 69. № 3. s. 28-40.

Bagdasaryan, 1960 – *Bagdasaryan Zh.E., Gnuni V.Ts.* (1960). K teorii dinamicheskoi ustoichivosti sloistykh anizatropnykh obolochek vrashcheniya. *Izv. AN Arm. SSR, Fiz.-mat. n.*, t. 13. № 5. s. 27-36.

Grigolyuk, 1955 – *Grigolyuk E.I.* (1955). Nelineinye kolebaniya i ustoichivost' pologikh sterzhnei i obolochek. *Izv. AN SSSR, Otdel tekh. nauk.* № 3. s. 33-68.

Mikhlin, 1970 – *Mikhlin S.G.* (1970). Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike. Moskva: Nauka, 512 s.

Nikol'skii, 1977 – *Nikol'skii S.M.* (1977). Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya. Moskva: Nauka, 456 s.

S'yarle, 1980 – *S'yarle F.* (1980). Metod konechnykh elementov dlya elipticheskikh zadach. Moskva: Mir, 512 s.

Arakelyan, 2015 – *Arakelyan Sh.Kh., Khurshudyan As.Zh.* (2015). The Bubnov-Galerkin procedure in problems of mobile (scanning) control for systems with distributed parameters. *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics*. Vol. 68, № 3. pp. 54-75.

Bramble, 2010 – *Bramble J. H., Pasciak J. E., Trenev D.* (2010). Analysis of a finite pml approximation to three dimensional elastic wave scattering. *Math. Comput.* Vol. 79. № 272. pp. 2079-2101.

Chen, 2006 – *Chen Y., Liu W.B.* (2006). Error estimates and superconvergence of mixed finite element for quadratic optimal control. *International J. Numerical Analysis and Modeling*. № 3. pp. 311-321.

УДК 519.62

Пространство конечных элементов в весовых пространствах

Мариам Овсеповна Арабян [a, *]

[a] Ереванский государственный университет, Армения

Аннотация. В работе рассматривается пространство конечных элементов в весовых функциональных пространствах. Мы ввели эти функциональные пространства при рассмотрении дифференциальной системы, некоторые коэффициенты которой имеют несуммируемую особенность. Эти функциональные весовые пространства полные, гильбертовые и для них справедливы теоремы вложения. Теперь для пременения метода конечных элементов настала время построить пространства конечных элементов в этих весовых пространствах.

Ключевые слова: весовые функциональные пространства, конечные элементы, несуммируемая особенность, неравенство Харди.

[*] Корреспондирующий автор
Адреса электронной почты: arabyan.mariam@ysu.am (М.О. Арабян)