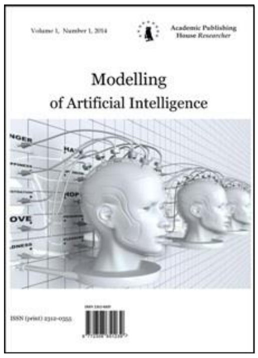
Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.
ISSN: 2312-0355
E-ISSN: 2413-7200
Vol. 8, Is. 4, pp. 229-237, 2015

DOI: 10.13187/mai.2015.8.229
www.ejournal11.com



UDC 519.21

The Increased Haars Property of Uniqueness in Interpolation of the Financial Markets

[1] Elina A. Pilosyan
[2] Anna V. Ignatenko

[1-2] Sochi State University, Russian Federation
Sovetskaya Str., 26 a, Sochi, Krasnodar region 354000
PhD(technical), Associate Professor
E-mail: azalto@mail.ru
[2] Senior Lecturer
E-mail: allrededor@mail.ru

Abstract

The article contains the definition of a special Khaar's filtering and amplification properties of Haar uniqueness (USKHE) for the one-step model of the financial market on a countable probability space (these definitions are suitable for end probability space). A criterion that the martingale measure of the market satisfies USKHE, formulas are derived perfect hedge on two possible types interpolation markets received Haar one-step interpolation market

Keywords: (B, S)-market, uniqueness, interpolation, martingale ratio, probability space, filtration.

Введение

Рассмотрим одношаговую модель (B, S)-рынка, где торгуются акции одного типа, а одношаговая фильтрация порождается деревом, представленном на рисунке 1. Таким образом, $\Im_0 = \{\Omega, \theta\}$, $\Im = \Im_1 = \varphi\{B_1, B_2, ...B_n, ...\}$. Обозначим $F = (\Im_0; \Im_1)$.

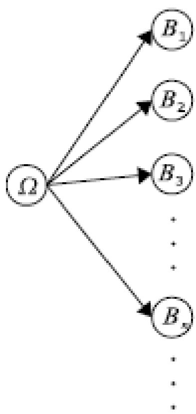


Рис. 1.

Результаты

Рассмотрим адаптированный процесс $Z = (Z_k, \Im_k)_{k=0}^{1}$, который можно интерпретировать как дисконтированную стоимость торгуемой акции. Обозначим:

$$Z_0 = a, Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k I_{B_k} .$$

Снабдим этот рынок множеством вероятностных мер *P*, нагружающих все атомы $B_1, B_2, ...B_n, ...$

Таким образом, включение $P \in P$ означает, что

$$p_k := P(B_k) > 0, (k = 1,2,...), \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 .$$

Предположим, что данный рынок безарбитражен, то есть

$\inf\limits_{1 \le i < \infty} b_i < a < \sup\limits_{1 \le i < \infty} b_i$ или $\inf\limits_{1 \le i < m} b_i < a < \sup\limits_{1 \le i < m} b_i$

Обозначим через $P(Z, F)$ множество всех мартингальных мер процесса $Z = (Z_k, \Im_k)_{k=0}^{1}$, то есть таких мер $P \in P$, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k| p_k < \infty$ (условие интегрируемости Z₁) и $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k p_k < \infty$ (мартингальное соотношение). Ясно, что $|P(Z, F)| = \infty$ (через |M| обозначается число элементов множества M).

Под хааровской фильтрацией, интерполирующей фильтрацию F, будем понимать возрастающее семейство φ-алгебр H=$(\text{Ћ}_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющее условиям:

- $\text{Ћ} = \{\Omega, \emptyset\}$;
- Ћ_n порождается разбиением Ω ровно на n + 1 атом $H_0^n, H_1^n, H_2^n, ..., H_n^n$,
- $\text{Ћ}_\infty = Y_{n=0}^{\infty} \text{Ћ}_n = \Im$.

Для хааровской фильтрации однозначно определена последовательность натуральных чисел $\left(m^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$, $\left(m^{(n)}\right) \in \{0,1,2,...,n\}$ такая, что при переходе от момента n к моменту n + 1 атом $H_{m(n)}^n$ разбивается на два атома, а остальные атомы φ-алгебры Ћn остаются неизменными.

Зафиксируем $P \in P(Z, F)$. По мартингалу $Z = (Z_k, \Im_k, P)_{k0}^{1}$ построим мартингальную хааровскую интерполяцию

$$Y = (Y_n, \text{H}_n, P)_{n=0}^{\infty} .$$

Где:

$Y_n = E^P[Y_1 | H_n]$— вероятностное решение задачи Дирихле.

Ясно, что $Y_0 = Z_0 = a$ и $Y_\infty := \lim\limits_{n \to \infty} Y_n = Z_1$. Для рассматриваемой одношаговой модели тот факт, что мера $P \in P(Z, F)$удовлетворяет свойству хааровской единственности (СХЕ), означает, что по φ-алгебре $\Im$ можно построить такую хааровскую интерполяцию H, что для соответствующей мартингальной хааровской интерполяции $Y = (\text{Y}_\text{n}, \text{Ћ}_n)_{n=1}^{\infty}$выполняется равенство $|P(Y, H)| = 1$ (то есть только относительно исходной меры *P* процесс Y является мартингалом).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Рассмотрим описанную выше одношаговую модель.

1) Если какая-нибудь мартингальная мера $P \in P(Z, F)$ удовлетворяет СХЕ, то выполняется неравенство:

$\inf\limits_{1 \le i < \infty} b_i < a < \sup\limits_{1 \le i < \infty} b_i$

(то есть отметается второе возможное условие, которое называется условием тривиализации рынка):

$\inf_{1 \le i < m} b_i < a < \sup_{1 \le i < m} b_i$

2) Если выполняется это неравенство, то любая мера $P \in P(Z, F)$удовлетворяет СХЕ.

Нашей целью является усиление второй части этой теоремы. Для этого введем следующие новые определения.

Определение 1. Пусть H=$(Ꞝ_n)_{n=1}^{\infty}$— хааровская интерполяция фильтрации F. Она называется специальной хааровской интерполяцией фильтрации F; если для $n \ge 0$ при переходе от момента n к моменту n+1 событие $H^n_{m(n)}$разбивается на два события, одно из которых будет атомом из множества $\{B_1, B_2, \dots B_n, \dots\}$.

Определение 2. Будем говорить, что мера $P \in P(Z, F)$ удовлетворяет усиленному свойству хааровской единственности (УСХЕ), если по φ - алгебре $\Im$ можно построить такую специальную хааровскую интерполяцию H фильтрации F, что для соответствующей мартингальной хааровской интерполяции $Y = (Y_n, Ꞝ_n)_{n=0}^{\infty}$ выполняется равенство $|P(Y, H)| = 1$.

Ясно, что если мера $P \in P(Z, F)$удовлетворяет УСХЕ, то она удовлетворяет и СХЕ, поэтому неравенство выполняется.

Продемонстрируем различие между х.и.ф. и с.х.и.ф. на одношаговой модели с пространством элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, где $\Im_0 = \{\Omega, \theta\}$, а $\Im = \Im_1 = \varphi\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Рассмотрим хааровскую интерполяцию, представленную схемой на рисунке 2.

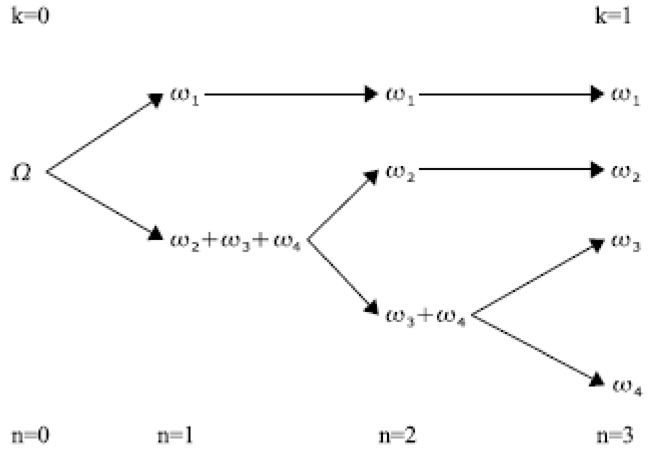


Рис. 2.

Эта интерполяция является специальной хааровской интерполяцией, т.к. при каждом дроблении выделяется атом, содержащийся в $\Im_1$ (при первом дроблении — это ω_1, при втором ω_2, при третьем — ω_3).

Теперь рассмотрим следующую интерполяцию (рис. 3).

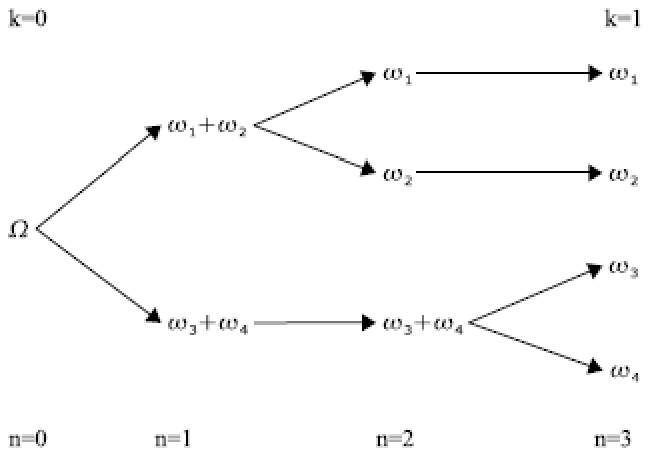


Рис. 3.

Это хааровская интерполяция, не являющаяся специальной хааровской интерполяцией, т.к. при первом дроблении появляются события $\omega_1+\omega_2$ и $\omega_3+\omega_4$, не являющиеся атомами в $\Im_1$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся усилением второй части теоремы 1.

Теорема 2. Если выполняется

$$\inf_{1\le i<\infty} b_i < a < \sup_{1\le i<\infty} b_i$$

то любая мера $P \in P(Z,F)$ удовлетворяет УСХЕ.

Доказательство. 1) Предположим сначала, что совокупность $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$ содержит конечное число различных значений, но только одно из них повторяется бесконечное число раз. Здесь возможны несколько ситуаций.

а) Пусть значение $\max\{b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots\}$присутствует в данной последовательности бесконечное число раз. Не нарушая общности, можно считать, что

$$b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_k < b_{k+1} = b_{k+2} = b_{k+3} = \ldots$$

Построим $(\mathfrak{H}_n)_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$H_0 = \{\Omega, \theta\},\ H_1 = \sigma\{B_1\},\ H_2 = \sigma\{B_1, B_2\},\ \ldots,$$

$$H_{k-1} = \sigma\{B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}\},\ H_k = \sigma\{B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_{k+1}\},$$

$$H_{k+1} = \sigma\{B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_{k+1}, B_{k+2}\}, \ldots$$

Ясно, что $Y_{n=0}^{\infty}\mathfrak{H}_n = \Im$. Рассмотрим соответствующую мартингальную интерполяцию $(Y_{n=0}^{\infty}\mathfrak{H}_n)$ при $0 \le n \le k-1$. Так как $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$являются атомами φ-алгебры $\Im$, то из мартингального свойства вытекает:

$$Y_1(B_1) = b_1,\ Y_2(B_2) = b_2, \ldots, Y_{k-1}(B_{k-1}) = b_{k-1}$$

Для $i \le k-1$ введем обозначения:

$$\overline{b}_i = Y_i(B_{i+1} + B_{i+2} + \ldots).$$

Так как $b_1 < a$, то $\overline{b_1} > a$, так как $b_2 < \overline{b_1}$, то$\overline{b}_2 > \overline{b_1}$;...; так как $b_{k-1} < \overline{b_{k-2}}$, то$b_{k-1} > \overline{b_{k-2}}$. Таким образом, справедлива схема эволюции значений процесса Y_n, $0 \le n \le k-1$, показанная на рисунке 4.

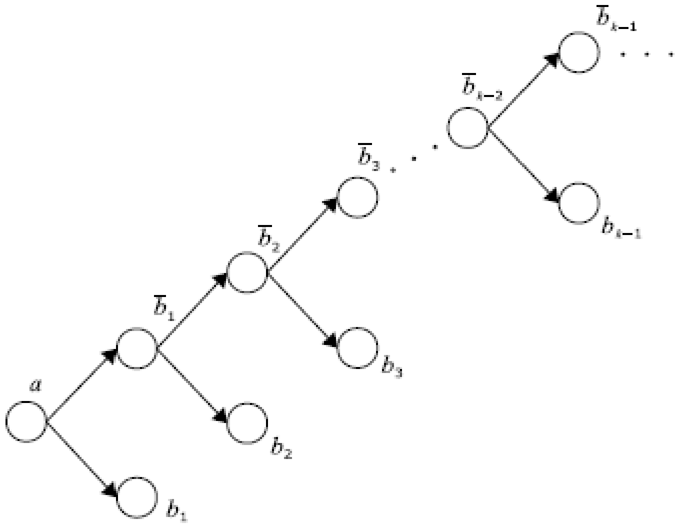


Рис. 4.

Рассмотрим теперь мартингальную интерполяцию $(\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}, \text{Ƕ}_{\mathrm{n}})$ при $\mathrm{n} > \mathrm{k}$. Опять из мартингального свойства вытекает, что

$$Y_k\left(B_{k+1}\right)=b_{k+1}\,,\ Y_{k+1}\left(B_{k+2}\right)=b_{k+2,\ldots}.$$

Введем обозначения:

$$\bar{b}_{k+1}=Y_k\left(B_k+B_{k+2}+B_{k+3}+\ldots\right),\ \bar{b}_{k+2}=Y_{k+1}\left(B_k+B_{k+3}+B_{k+4}+\ldots\right)$$

$$\bar{b}_{k+i}=Y_{k+i-1}\left(B_k+B_{k+i+1}+B_{k+i+2}+\ldots\right),\ldots$$

Легко видеть, что верна схема эволюции значений процесса $Y_n, n \geq k$, представленная на рисунке 5. Таким образом, условия единственности мар- тингальной меры P для процесса $Y = (\mathrm{Y}_{\mathrm{n}}, \text{Ƕ}_n)_{n=0}^{\infty}$ выполнены.

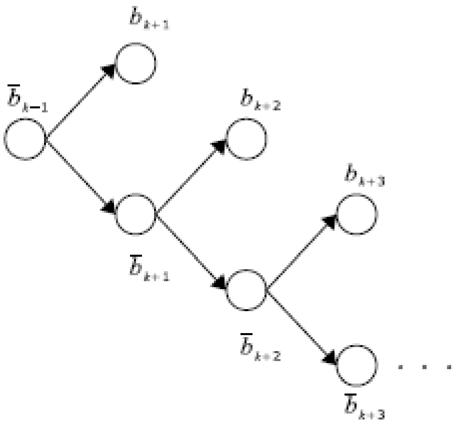


Рис. 5.

б) Пусть значение $\min\{b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots\}$ присутствует в последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$ бесконечное число раз. Этот случай сводится к предыдущему переходом к процессу – $Z = \left(-Z_k, \Im_k\right)_{k=0}^{1}$.

в) Пусть значение b, где $\min\{b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots\} < b < \max\{b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots\}$, присутствует в последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$ бесконечное число раз.

Не нарушая общности, можно считать, что

$b_1 \le b_2 \le ... \le b_k < b$, $b_{k+1} \ge b_{k+2} \ge ... \ge b_{m-1} \ge b_m > b$,

$b = b_{m+1} = b_{m+2} = b_{m+3} = ...$

Построим $(Ƕ_n)_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$H_0 = \{\Omega, \theta\}$, $H_n = \sigma\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ при $n \le m-1$,

$H_m = \sigma\{B_1, B_2, ..., B_k, B_{k+1}, ..., B_{m-1}, B_{m+1}\}$,

$H_{m+1} = \sigma\{B_1, B_2, ..., B_k, B_{k+1}, ..., B_{m-1}, B_{m+1}, B_{m+2}\}, ...,$

$H_{m+i} = \sigma\{B_1, B_2, ..., B_k, B_{k+1}, ..., B_{m-1}, B_{m+1}, B_{m+2}, ..., B_{m+i+1}\}, ...$

Ясно, что $Y_{n=0}^{\infty} Ƕ_n = \Im$. Рассмотрим соответствующую мартингальную интерполяцию $(Y_{n=0}^{\infty}, Ƕ_n)_{n=0}^{\infty}$. Как и в пункте а), получаем, что при n ≤ k справедлива схема эволюции значений процесса Y_n, аналогичная приведенной на рис. 4. Рисунок 6 иллюстрирует схему, при $k \le n \le m-1$. Наконец, применяя обозначения с заменой k на m, при $n \ge m-1$ получаем схему, показанную на рисунке 7.

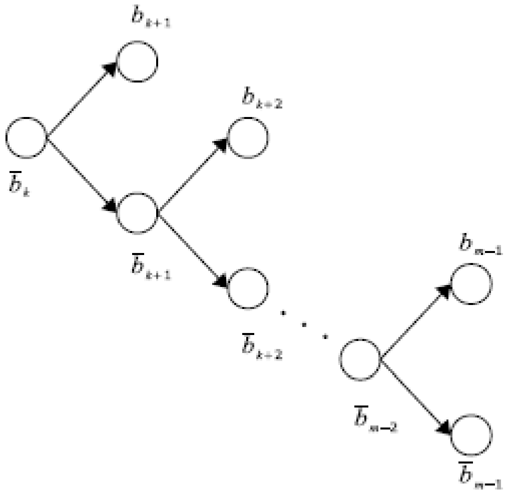


Рис. 6.

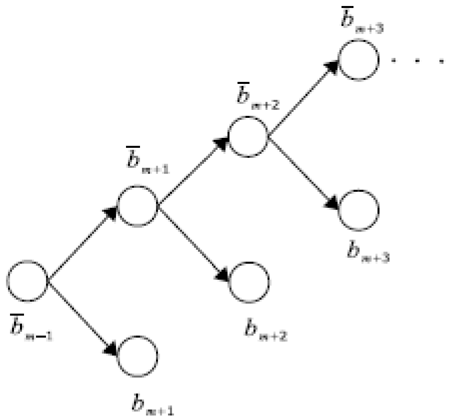


Рис. 7.

Условия единственности мартингальной P для процесса $Y = (Y_n, Ƕ_n)_{n=0}^{\infty}$ выполнены.

2) Пусть теперь либо среди чисел $b_1, b_2, ..., b_n ...$ содержится бесконечное число различных, либо совокупность $b_1, b_2, ..., b_n ...$ содержит конечное число различных значений, но по крайней мере два из этих различных значений повторяются бесконечное число раз.

Построим $(\mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$ следующим образом. Пусть n_1 — натуральное число, для которого выполняются условия: $a = b_1 = b_2 = \ldots = b_{n_1 - 1}$, $a \neq b_{n_1}$. Рассмотрим сначала случай $a > b_{n_1}$. Определим:

$$H_0 = \{\Omega, \theta\},\ H_1 = \sigma\{B_m\},\ H_2 = \sigma\{B_m, B_{m-1}\},$$

$$H_3 = \sigma\{B_m, B_{m-1}, B_{m-2}\}, \ldots,\ H_{m-1} = \sigma\{B_m, B_{m-1}, \ldots, B_2\},$$

$$H_{n_1} = \sigma\{B_{n_1}, B_{n_1 - 1}, \ldots, B_2, B_1\}$$

Соответствующая схема дробления атомов изображена на рисунке 8.

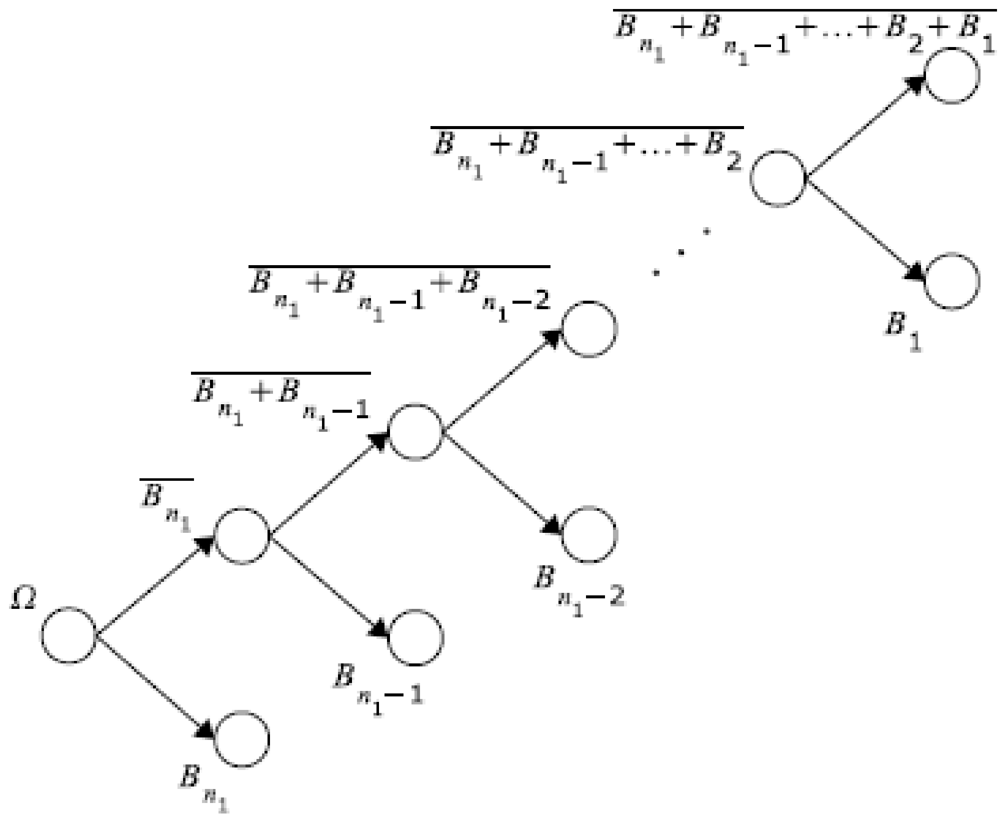


Рис. 8.

Рассмотрим соответствующую мартингальную интерполяцию $(Y_n, \mathcal{H}_n)$, при $0 \le n \le n_1$. Так как $B_{n_1}, B_{n_1-1}, \ldots, B_2, B_1$ являются атомами φ-алгебры $\Im$, то из мартингального свойства вытекает: $Y_1(B_{n_1}) = b_{n_1}, Y_2(B_{n_1-1}) = b_{n_1-1}, \ldots, Y_{n_1-1}(B_2) = b_2$, $Y_n(B_1) = b_1$.

Введем обозначения:

$$\bar{b}_{n_1} = Y_1\left(B_{n_1}\right),\ \bar{b}_{n_1-1} = Y_2\left(\overline{B_{n_1} + B_{n_1-1}}\right), \ldots,$$

$$\bar{b}_2 = Y_{n_1-1}\left(\overline{B_{n_1} + B_{n_1-1} + \ldots + B_2}\right),\ \bar{b}_1 = Y_{n_1}\left(\overline{B_{n_1} + B_{n_1-1} + \ldots + B_2 + B_1}\right).$$

Из предположения $b_{n_1} < a$ вытекает неравенство $\bar{b}_{n_1} > a$. Тогда $b_{n_1-1} = a < \overline{b_{n_1}}$ и по той же лемме $\bar{b}_{n_1-1} > \overline{b_{n_1}}$.

Таким же образом получаем:

$$b_{n_1-2} < \bar{b}_{n_1-1} < \bar{b}_{n_1-2}, \ldots, b_2 < \bar{b}_3 < \bar{b}_2,\ b_1 < \bar{b}_2 < \bar{b}_1.$$

Заметим, что если предположить, что $a < b_{n_1}$, то получим аналогичную картину с точностью до наоборот.

Обозначим через n_2 наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию:

$b = b_{m+1} = b_{m+2} = b_{m+3} = \ldots,\ \overline{b_1} \neq b_{n_2}$

(в силу предположения данного пункта такое число n_2 существует). Действуя аналогично предыдущему, определим:

$$H_{n_1+1} = \sigma\{H_{n_1}, B_{n_2}\},$$
$$H_{n_1+2} = \sigma\{H_{n_1}, B_{n_2}, B_{n_2-1}\},$$
$$\ldots,$$
$$H_{n_1-1} = \sigma\{H_{n_1}, B_{n_2}, B_{n_2-1}, \ldots, B_{n_1+2}\},$$
$$H_{n_2} = \sigma\{H_{n_1}, B_{n_2}, B_{n_2-1}, \ldots, B_{n_1+2}, B_{n_1+1}\}.$$

Одновременно получаем интерполирующий процесс $Y_n = E^P[Z_1|\text{Ҥ}_n]$. Из построения ясно, что $|P(\mathrm{Y},\mathrm{H})|=1$.

Теорема 2 доказана.

Займемся теперь достаточным условием выполнения УСХЕ.

Теорема 3. Если фильтрация F естественная, то любая мера $P \in P(Z, F)$удовлетворяет УСХЕ.

Доказательство. Итак, по условию теоремы $\Im_0 = \{\Omega, \theta\}$, а φ-алгебра $\Im_1$ порождена разбиением пространства Ω на не более чем счетное число атомов. Если все b_i совпадают, то это означает, что φ-алгебра $\Im_1$ тривиальна и УСХЕ выполняется автоматически. Если среди чисел есть различные, то выполняется условие и из теоремы 2 получаем, что все меры из $P(Z, F)$ удовлетворяют УСХЕ.

Следующий пример показывает, что условие данной теоремы не является необходимым.

Пример. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\Im = \Im_1$ совокупность всех подмножеств Ω, $Z_0=2$, $Z_1(\omega_1) = 1$, $Z_1(\omega_2) = Z_1(\omega_3)=3$. Ясно, что $P(Z, F) \neq 0$, а $\varphi(Z_0, Z_1) \neq \Im$ порождаются атомами ω_1 и $\omega_2 + \omega_3$, то есть $\varphi(Z_0, Z_1) \neq \Im$. Однако по теореме 2 любая мера $P \in P(Z, F)$ удовлетворяет УСХЕ.

Отметим, что теоремы 2 и 3 остаются верными и для многошаговых моделей с конечным горизонтом.

Заключение

Таким образом, приводятся определения специальной хааровской фильтрации и усиленного свойства хааровской единственности (УСХЕ) для одношаговой модели финансового рынка на счетном вероятностном пространстве (эти определения пригодны и для конечного вероятностного пространства). Доказывается критерий того, что мартингальная мера данного рынка удовлетворяет УСХЕ, выводятся формулы совершенного хеджирования на двух возможных типах интерполирующих рынков, получаемых хааровской интерполяцией одношагового рынка.

УДК 519.21

Усиленное свойство хааровской единственности в интерполяции финансовых рынков

[1] Элина Анатольевна Пилосян
[2] Анна Михайловна Игнатенко

[1-2] Сочинский государственный университет, Российская Федерация
354000, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а

[1] Кандидат технических наук, доцент
E-mail.: azalto@mail.ru
[2] Старший преподаватель
E-mail: allrededor@mail.ru

Аннотация. В статье приводятся определения специальной хааровской фильтрации и усиленного свойства хааровской единственности (УСХЕ) для одношаговой модели финансового рынка на счетном вероятностном пространстве (эти определения пригодны и для конечного вероятностного пространства). Доказывается критерий того, что мартингальная мера данного рынка удовлетворяет УСХЕ, выводятся формулы совершенного хеджирования на двух возможных типах интерполирующих рынков, получаемых хааровской интерполяцией одношагового рынка.

Ключевые слова: (B, S)-рынок, единственность, интерполяция, мартингальное соотношение, вероятностное пространство, фильтрация.