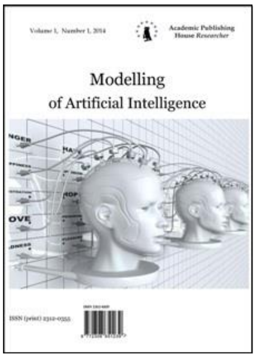
Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.
ISSN: 2312-0355
E-ISSN: 2413-7200
Vol. 8, Is. 4, pp. 224-228, 2015

DOI: 10.13187/mai.2015.8.224
www.ejournal11.com



Articles and statements

UDC 519.2

Optimization of the Measurement of the Correlation Function of a Stationary Ergodic Stochastic Process

A.A. Matskaniuk

Sochi State University, Russian Federation
Sovetskaya Str., 26 a, Sochi, Krasnodar region 354000
PhD (technical), Associate professor
E-mail: alexmatsk@gmail.com

Abstract

The work is aimed at finding the weights to ensure an optimum in the sense of minimum variance of measurement error estimate of the autocorrelation function of an ergodic stochastic process observed for a limited time when you use a given form calculation formula.

Achieved at the present time the level of technology made possible the development and wide application of specialized signal processors, used in particular in radar and hydroacoustics to detect air and underwater objects in conditions of strong variability of the environment and object locations. One of the tasks of the new location is the identification of complex and changeable object in terms of interference. There are various methods of identification. In the case of complex statistical object proposed approaches based on the measurement of moments of the distribution of input and output processes of the identifiable object. Thus, the problem arises of measuring points. The result of the measurement is to estimate – an approximate torque value that differs from the true by the amount of the error. The error is a random variable, usually characterized by its expectation and variance. Proposed many methods for the assessment of points, different levels of errors, the complexity of the hardware and/or software implementation, application. Development of new methods is essentially heuristic in nature, is characterized by a diversity of approaches, resulting in difficulties when comparing and choosing the best meets the specified requirements. The following summarises the approach with some common positions to describe a wide class of methods of estimation of the moment of the second order autocorrelation function, find the optimal in sense of minimum of variance of estimation method of its calculation within the restricted class.

Keywords: the autocorrelation function, the optimal weights, the minimum error variance, the moment of the second order stationary ergodic random process.

Введение

Достигнутый в настоящее время уровень технологии сделал возможным разработку и широкое применение специализированных сигнальных процессоров, применяемых, в частности в радиолокации и гидроакустике для обнаружения воздушных и подводных объектов в условиях сильной изменчивости среды и объектов локации. Одной из задач локации является идентификация сложного и изменчивого объекта в условиях помех. Известны различные методы идентификации [1]. В случае сложного статистического объекта предложены подходы основанные на измерении моментов распределения входных и выходных процессов идентифицируемого объекта (см., например, [2]).

Таким образом, возникает задача измерения моментов. Результатом измерения, как известно [3], является оценка – приближенное значение момента, отличающаяся от истинного на величину ошибки. Ошибка – случайная величина, характеризуемая обычно своим математическим ожиданием и дисперсией.

Результаты

Предложено много методов получения оценок моментов [4, 5], отличающихся уровнем погрешностей, сложностью аппаратной и/или программной реализации, областью применения. Разработка новых методов носит в основном эвристический характер, отличается разнообразием подходов, в результате чего возникают трудности при их сравнении и выборе в наилучшей степени отвечающей заданным требованиям.

Ниже излагается подход, позволяющий с некоторых общих позиций описать широкий класс методов оценки момента второго порядка – автокорреляционной функции, найти оптимальный в смысле минимума дисперсии оценки метод ее вычисления в рамках ограниченного класса.

Рассмотрим случай измерения момента второго порядка — автокорреляционной функции $R_{xx}(\tau)$ — стационарного эргодического случайного процесса $x(t)$.

Свойство эргодичности процесса $x(t)$ позволяет заменить операцию усреднения по множеству операцией усреднения по времени. Реальные процессы ограничены по времени. Пусть $0 \le t < T$, где T длительность времени наблюдения процесса $x(t)$. Вследствие этого при вычислении корреляционной функции получается не истинное её значение, а приближенное, называемое оценкой. Обозначим эту оценку $\bar{R}_{xx}(t,\tau)$.

Ошибка измерения ε определяется как разность истинного значения измеряемой величины и ее оценки:

$$\varepsilon(t,\tau) = R_{xx}(\tau) - \bar{R}_{xx}(t,\tau) \tag{1}$$

Погрешность в виде функции неудобна. Поэтому при сравнении различных методов измерения используют функционалы, в частности среднеквадратическое отклонение (СКО):

$$\text{СКО}=\text{M}\{\varepsilon^2\}= \text{M}\{[R_{xx}(\tau) - \bar{R}_{xx}(t,\tau)]^2\} = R^2_{xx}(\tau) - 2R_{xx}(\tau)M\{\bar{R}_{xx}(t,\tau)\} + M\{\bar{R}^2_{xx}(t,\tau)\}, \tag{2}$$

где M{...} — оператор математического ожидания;

$R_{xx}(\tau) = M\{x(t)x(t-\tau)\}$ — автокорреляционная функция.

Предположим для измерения корреляционной функции используется цифровое устройство. Для этого необходимо, как минимум дискретизировать реализацию случайного процесса $x(t)$ по времени, т.е. измерить значения процесса в определенные моменты времени*. Эти значения назовем отсчетами $x(i\Delta t)$, где i – номер отсчета, а Δt – размер шага дискретизации по времени.

Предположим с учетом временной дискретизации оценка корреляционной функции вычисляется по формуле (3)

$$\bar{R}_{xx}(t,\tau) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t) \quad , \tag{3}$$

где a_{ij} — весовые коэффициенты;

m = $T/\Delta t$.— количество отсчетов реализации случайного процесса в течение времени его наблюдения T.

Найдем такой набор весовых коэффициентов a_{ij}, при котором СКО минимально.

* Для цифровой обработки требуется, правда, дополнительно проквантовать процесс по уровню. В рамках данной работы влияние квантования по уровню на точность измерения корреляционной функции не исследуется.

Решение сводится к поиску экстремума функции СКО(a_{ij}) множества аргументов a_{ij} с наложенными на них ограничительными условиями. В данном случае имеется одно условие — условие несмещенности оценки корреляционной функции:

$$R_{xx}(n\Delta t) - M\{\bar{R}_{xx}(t, n\Delta t)\} = 0$$

Учитывая (3), условие несмещенности приобретает вид:

$$R_{xx}(n\Delta t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} = 0$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа L в данном случае принимает форму (4):

$$L = \text{СКО} + \lambda\cdot\left[R_{xx}(n\Delta t) - \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\}\right], \tag{4}$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Он один, поскольку на искомые значения весовых коэффициентов a_{ij}, наложено лишь одно ограничение, связанное с несмещенностью оценки корреляционной функции.

Подставив (2) и (3) в (4), получим:

$$\begin{aligned} L = {} & R_{xx}^2(n\Delta t) - 2R_{xx}(n\Delta t)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} \\ & + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\sum_{h=1}^{m} a_{kl}a_{gh} M\{x(t+k\Delta t)x(t+l\Delta t)x(t+g\Delta t)x(t+h\Delta t)\} \\ & + \lambda\left(R_{xx}(n\Delta t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} M\{x(t+i\Delta t)x(t+j\Delta t)\}\right) \end{aligned}$$

Далее строится система уравнений (5):

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\,a_{ij},\lambda)}{\partial a_{ij}} = 0 \\ R_{xx}(n\Delta t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Находим частные производные функции Лагранжа $L(\,a_{ij},\ \lambda)$ по всем искомым весовым коэффициентам a_{ij}:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(a_{ij},\ \lambda)}{\partial a_{ij}} = {} & -2R_{xx}(n\Delta t)M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i \text{ и }}}^{m}\ \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{m} a_{kl} M\{x(t+k\Delta t)\cdot x(t+l\Delta t)x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} + \\ & + \sum_{\substack{g=1 \\ g\neq i \text{ и }}}^{m}\ \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq j}}^{m} a_{gh} M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)x(t+g\Delta t)\cdot x(t+h\Delta t)\} + \\ & + 2a_{ij}M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} - \lambda M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} \end{aligned}$$

В результате система уравнений (5) принимает вид (6):

$$\begin{cases} -2R_{xx}(n\Delta t)M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} + \\ +\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i \text{ и }}}^{m} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{m} a_{kl} M\{x(t+k\Delta t)\cdot x(t+l\Delta t)\cdot x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} + \\ +\sum_{\substack{g=1 \\ g\neq i \text{ и }}}^{m} \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq j}}^{m} a_{gh} M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\cdot x(t+g\Delta t)\cdot x(t+h\Delta t)\} + \\ +2a_{ij}M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\cdot x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} - \\ -\lambda M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} = 0 \\ \\ R_{xx}(n\Delta t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot R_{xx}\big((i-j)\Delta t\big) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Система имеет следующие решения:

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ a_{ij} = \begin{cases} 1/(m-n) \\ 0 \end{cases} \text{при} \quad \begin{matrix} (i-j) = n \text{ и } n < m \\ (i-j) \neq n \text{ или } n \geq m \end{matrix} \end{cases} \quad (7)$$

В этом легко убедиться, подставив найденные решения в систему (6).

Для выяснений какого рода экстремальное значение найдено, найдем значение второй производной функции Лагранжа (7):

$$\frac{\partial^2 L(a_{ij},\ \lambda)}{\partial {a_{ij}}^2} = 2M\{x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\cdot x(t+i\Delta t)\cdot x(t+j\Delta t)\} \geq 0 \quad (8)$$

Поскольку она положительна или равна нулю, то для всех значений коэффициентов a_{ij} применение найденного набора значений коэффициентов приводит к получению оптимальной в смысле минимума дисперсии ошибки (и в данном случае СКО) вычисления автокорреляционной функции эргодического случайного процесса *x(t)* по формуле (3).

Ранее в ходе модельного эксперимента, опубликованного автором в работе [5], показано, что применение расчетной формулы (3) и решения (7) действительно приводит наинизшему среди взятых на сравнение методов вычисления корреляционной функции уровню СКО. Правда строгого математического доказательство этому факту в работе [5] приведено не было.

Заключение

В результате проведенного исследования найдены значения весовых коэффициентов, позволяющие получать оптимальные в смысле минимума СКО ошибки измерения автокорреляционной функции эргодического случайного процесса, наблюдаемого в течение ограниченного времени при использовании расчетной формулы (3).

Дальнейшие исследование целесообразно вести в направлении определения степени эффективности использования найденных весовых коэффициентов, а также на пути использовании расчетных формул другого вида.

Примечания:

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
2. Бетсен М. Моделирование нелинейных систем на основе теории Винера. ТИИЭР, т.69, №12, с. 42-62.
3. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. Л.:Энергия, Ленингр. отд. 1979. 288 с.
4. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982. 320 с.
5. Мацканюк А.А. Исследование методов и устройств оперативного корреляционного анализа случайных процессов. Специальность 05.11.16 «Информационно-измерительные системы». Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н. Ленинград, 1983.

References:

1. Eikkhoff P. Osnovy identifikatsii sistem upravleniya. M.: Mir, 1975. 683 s.
2. Betsen M. Modelirovanie nelineinykh sistem na osnove teorii Vinera. TIIER, t.69, №12, s. 42-62.
3. Tsvetkov E.I. Osnovy teorii statisticheskikh izmerenii. L.:Energiya, Leningr. otd. 1979. 288 s.
4. Mirskii G.Ya. Kharakteristiki stokhasticheskoi vzaimosvyazi i ikh izmereniya. M.: Energoizdat, 1982. 320 s.
5. Matskanyuk A.A. Issledovanie metodov i ustroistv operativnogo korrelyatsionnogo analiza sluchainykh protsessov. Spetsial'nost' 05.11.16 «Informatsionno-izmeritel'nye sistemy». Avtoreferat dissertatsii na soiskanie uchenoi stepeni k.t.n. Leningrad, 1983.

УДК 519.2

Оптимизация измерения корреляционной функции стационарного эргодического случайного процесса

Алексей Алексеевич Мацканюк

Сочинский государственный университет, Российская Федерация
354000, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: alexmatsk@gmail.com

Аннотация. Работа направлена на нахождение весовых коэффициентов, позволяющих получать оптимальные в смысле минимума дисперсии ошибки измерения оценку автокорреляционной функции эргодического случайного процесса, наблюдаемого в течение ограниченного времени при использовании заданного вида расчетной формулы.

Ключевые слова: автокорреляционная функция, оптимальные весовые коэффициенты, минимум дисперсии ошибки, момент второго порядка, стационарный эргодический случайный процесс.