DÜZGÜN ÖLÇÜM

Ali DÖNMEZ
Doğuş Üniversitesi, Fen Bilimleri Bölümü

Halit ORHAN
Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü

Özet: Düzgün ölçüm üzerine bazı teoremler ispatlandı.

Anahtar sözcükler: *Ölçüm, düzgün ölçüm, simetrik fark.*

Abstract: We have proved some theorems on regular measures

Key words: *Measure, regular measure, symetric difference.*

GİRİŞ

Herhangi bir A kümesinin dış ölçümü

$$\inf \sum_{A \quad P_k} m(P_k)$$

olarak tanımlanır ve bu,

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{A \quad P_k} m(P_k)$$

biçiminde gösterilir. Buna bağlı olarak A kümesinin iç ölçümü $\mu_*(A)$ işareti ile gösterilir ve $\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \setminus A)$ olarak tanımlanır (2, s. 258). İç ve dış ölçüm arasında her zaman $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ bağıntısı vardır. Eğer $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ oluyorsa, A kümesine Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir ve bu, $\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$ olarak gösterilir (2, s.258).

A kümesinin ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşulun $\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = 1$ olmasıdır (2, s.261-263).

$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ kümeleri ölçülebilirse, bu kümelerin bileşimleri ve kesişimleri de ölçülebilirdir. Ayrıca,

$$A \quad \overset{\infty}{\underset{n=1}{\quad}} A_n$$

ise

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olur. Eğer A_n kümeleri ikişer ikişer ayrıksa,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olur (2, s. 262-263).

Sayılabilir kümelerin ölçümü sıfırdır (3, s.35). Fakat, bu önermenin tersinin doğru olması gerekmez. Çünkü, Cantor kümesi ters bir örnektir.

A kümesinin ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ olacak biçimde ilkel bir B kümesinin olmasıdır (2, s.261).

A kümesi ölçülebilirse bu kümenin tümleyeni olan $A' = E \setminus A$ kümesi de ölçülebilirdir (2, s.263).

Eğer bir özellik bir E kümesinin sıfır ölçümlü bir küme oluşturan noktalar dışındaki tüm noktalarda sağlanıyorsa, bu özelliğe E kümesi üzerinde hemen hemen heryerde (hhh) sağlanıyor denilir (3, s. 33), (2, s. 288).

TEOREMLER:

1. Teorem: E temel kümesinde A,B E olmak üzere hemen hemen her yerde (hhh) A=B ise $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ olur ve $\mu(A \cap B) = \mu(A \quad B)$ eşitliği vardır.

İspat: Hemen hemen her yerde $A = B$ olduğundan $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ olduğu tanımdan yazılır. Diğer yandan $A \Delta B = (A \setminus B) \quad (B \setminus A)$ eşitliğindeki $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümeleri ayrık ve (hhh) $A = B$ olduğundan, $\mu(A \Delta B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 0$ yazılır. Buradan $\mu(A \Delta B) = 0$ bulunur.

Ayrıca,

$$A \cap B \quad A \quad B \text{ ve } A \Delta B = (A \quad B) \setminus (A \cap B)$$

biçiminde olduklarından

$$0 = \mu(A \Delta B) = \mu(A \quad B) - \mu(A \cap B)$$

yazılır. Buradan, $\mu(A \quad B) = \mu(A \cap B)$ bulunur. Bu da teoremde gösterilmek istenen sonuçtur.

İkinci bir yol da şöyledir. Ayrık olan $A \setminus B$, $A \quad B$ ve $B \setminus A$ kümeleri için

$$A \quad B = (A \setminus B) \quad (A \cap B) \quad (B \setminus A)$$

eşitliğinin her iki yanının ölçümleri alınırsa,

$$\mu(A \quad B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ olduğu kullanılırsa, $\mu(A \quad B) = \mu(A \cap B)$ sonucu bulunur.

Örneğin, $A = Z$ tamsayılar kümesi ve $B = Q$ rasyonel sayılar kümesi olsun. Buna göre (hhh) $Z = Q$ olduğu için, $\mu(A) = \mu(B)$, $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ ve

$$0 = \mu(A \Delta B) = \mu(A \quad B) - \mu(A \cap B)$$

olduğu görülür. Buradan $\mu(A \quad B) = \mu(A \cap B)$ ya da $\mu(Q) = \mu(Z)$ yazılır.

Tanım: Sayılabilir sonsuzluktaki kümelerin genelleştirilmiş olan simetrik farkı $A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \Delta \ldots = \Delta A_i$ ile gösterilir ve

$$\Delta A_i = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\quad}} A_i \setminus \left\{ \underset{i \neq j}{\quad} (A_i \cap A_j) \right\}$$

olarak tanımlanır.

2. Teorem: Eğer $A_1, A_2, A_3,...$ kümeleri ölçülebilirse, bu kümelerin simetrik farkı olan ΔA_i kümesi de ölçülebilirdir.

İspat: $i \neq j$ için A_i ve A_j kümeleri ölçülebilir olduklarından, $A_i \cap A_j$ kesişim kümesi ölçülebilirdir. Ölçülebilir kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşimi ölçülebilir olacağından

$$\bigcup_{i \neq j}^{\infty} (A_i \cap A_j)$$

bileşim kümesi de ölçülebilirdir.

Benzer olarak,

$$\Delta A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \left\{ \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j) \right\}$$

eşitliğinin ikinci yanı da ölçülebilirdir. Buradan ΔA_i simetrik farkı ölçülebilirdir.

Tanım: Eğer her T kümesi için

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \quad A')$$

oluyorsa, A kümesi Caratheodory anlamında μ^* ölçümüne göre ölçülebiliyor denilir (3, s. 31).

Buradan hemen şu sonucu söyleyebiliriz.

A kümesinin μ^* ölçümüne göre ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşulun her T kümesine karşılık

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A')$$

olmasıdır.

3. Teorem: A ve B kümeleri Caratheodory tanımına göre ölçülebilirse $A \Delta B$ ve $A \setminus B$ kümeleri de aynı tanıma göre ölçülebilirdir.

İspat: Tüm T kümeleri için

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap (A \Delta B)) + \mu^*(T \cap (A \Delta B)')$$

olduğunu göstermeliyiz. A ve B kümeleri bu ölçüme göre ölçülebilir olduklarından her T kümesi için

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A') \\ &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap (A' \cap B)) + \mu^*(T \cap (A' \cap B')) \\ &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A' \cap B) + \mu^*(T \cap (A \quad B)')\end{aligned} \tag{1}$$

yazılır. Öte yandan,

$$T \cap (A \Delta B) = \{T \cap (A' \cap B) \quad [(T \cap A) \setminus (T \cap A \cap B)]\}$$

ifadesinin her iki yanının dış ölçümünden,

$$\mu^*(T \cap (A \Delta B)) \leq \mu^*((T \cap (A' \cap B)) + \mu^*(T \cap A) - (T \cap A \cap B)$$

olur. Buradan,

$$\mu^*(T \cap (A \Delta B)) + \mu^*(T \cap A \cap B) \leq \mu^*((T \cap (A' \cap B)) + \mu^*(T \cap A)$$

yazılır. Buna göre (1) ifadesinde

$$\mu^*(T \cap (A' \cap B)) + \mu^*(T \cap A)$$

ifadesinden daha küçük olan

$$\mu^*(T \cap (A \Delta B)) + \mu^*(T \cap (A \cap B))$$

değeri yazılırsa,

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap (A \Delta B)) + \mu^*(T \cap (A \quad B)') + \mu^*(T \cap A \cap B)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenen sonuçtur. Burada, Venn şemasıyla,

$$T \cap (A \Delta B)' = \{(T \cap (A \quad B)')\} \quad \{(T \cap A \cap B)\}$$

eşitliğinden

$$\mu^*(T \cap (A \Delta B)') + \mu^*(T \cap (A \quad B)') + \mu^*(T \cap A \cap B)$$

olduğu daha kolay bir şekilde görülebilir.

Benzer olarak her T kümesi için

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \cap (A \setminus B)')$$

olduğunu göstermeliyiz. A ve B kümeleri ölçülebilir olduklarından, her T kümesi için,

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A') \\ \left.\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap (A \quad B)') + \mu^*(T \cap (A' \quad B)) \\ \mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A' \cap B) + \mu^*(T \cap (A' \quad B'))\end{aligned}\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$T \cap (A \setminus B) = (T \cap A) \setminus (T \cap A \cap B)$$

eşitliğinin her iki yanına dış ölçüm tanımı uygulanırsa,

$$\mu^*(T \cap (A \setminus B)) \leq \mu^*(T \cap A) - \mu^*(T \cap A \cap B)$$

yazılır. Buradan,

$$\mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \cap A \cap B) \leq \mu^*(T \cap A)$$

eşitsizliği çıkar. Böylece (2) eşitliğinde $\mu^*(T \cap A)$ ifadesi yerine bundan daha küçük olan

$$\mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \cap A \cap B)$$

ifadesi yazılırsa,

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A' \cap B') + \mu^*(T \cap A' \cap B) + \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \cap (A \setminus B))$$

eşitsizliği elde edilir. Venn şemasıyla,

$$T \cap (A \setminus B)' = (T \cap A' \cap B') \quad (T \cap A' \cap B) \quad (T \cap A \cap B)$$

olduğundan,

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \cap (A \setminus B)')$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

Tanım: Verilen bir A kümesi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için R halkası (2, s.31) içinde

$$A' \quad A \quad A'' \text{ve } m(A'' \setminus A') < \varepsilon$$

olacak şekilde A' ve A'' kümeleri varsa A kümesine Jordan anlamında ölçülebilirdir denir (2, s.281). Burada A' ve A'' kümeleri tümleyen anlamında kullanılmamıştır.

4. Teorem: A ve B kümeleri Jordan anlamında ölçülebilirse, $A \quad B$, $A \cap B, A \setminus B$ ve $A \Delta B$ kümeleri de Jordan anlamında ölçülebilirdir.

İspat: A ve B kümeleri tanıma göre ölçülebilirse, her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$A' \quad A \quad A'' \text{ ve } m(A'' \setminus A') < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$B' \quad B \quad B'' \text{ ve } m(B''\setminus B') < \frac{\varepsilon}{2}$$

koşullarını sağlayan A', B', A'' ve B'' kümeleri vardır. Bu halde,

$$A' \quad B' \quad A \quad B \quad A'' \quad B''$$

ve

$$A'\setminus B'' \quad A\setminus B \quad A''\setminus B''$$

kapsamaları yazılır. Ayrıca,

$$(A'' \quad B'')\setminus(A' \quad B') \quad (A''\setminus A') \quad (B''\setminus B')$$

kapsamından,

$$m\{(A'' \quad B'')\setminus(A' \quad B')\} \leq m\{(A''\setminus A') \quad (B''\setminus B')\} \leq m(A''\setminus A')+m(B''\setminus B') \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu da, $A \quad B$ kümesinin Jordan anlamında ölçülebilir olması demektir.

Öte yandan,

$$(A''\cap B'')\setminus(A'\cap B') \quad (A''\setminus A') \quad (B''\setminus B')$$

kapsamından,

$$m\{(A''\cap B'')\setminus(A'\cap B')\} \leq m\{(A''\setminus A') \quad (B''\setminus B')\}$$

yazılır. Buradan,

$$m\{(A''\cap B'')\setminus(A'\cap B')\} \leq m\{(A''\setminus A')+m(B''\setminus B') \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. ε sayısı keyfi olduğundan, $A \quad B$ ve $A\cap B$ kümeleri Jordan anlamında ölçülebilir olduğu gösterilmiş olunur.

Şimdi $A\Delta B$ kümesinin Jordan anlamında ölçülebilir olduğunu gösterelim. A ve B kümeleri Jordan anlamında ölçülebilirse,

$$A' \quad A \quad A'' \text{ve } m(A''\setminus A') < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$B' \quad B \quad B'' \text{ ve } m(B''\setminus B') < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde A', B', A'' ve B'' kümeleri vardır. Buna göre,

$$A' \quad A \quad A'' \text{ ve } B' \quad B \quad B''$$

kapsamlarından,

$$A'\Delta B' \quad A\Delta B \quad A''\Delta B''$$

yazılır. Buradan,

$$m(A''\Delta B''\backslash A'\Delta B') < \varepsilon$$

olacak şekilde A', B', A'' ve B'' kümelerinin olduklarını göstermeliyiz. Bir kere,

$$A' \quad A \quad A''$$

ve

$$B' \quad B \quad B''$$

kapsamlarından,

$$A'\backslash B'' \quad A\backslash B \quad A''\backslash B' \tag{3}$$

ve

$$B'\backslash A'' \quad B\backslash A \quad B''\backslash A' \tag{4}$$

yazılır. (3) ve (4) ifadelerinin taraf tarafa bileşimi alınırsa,

$$(A'\backslash B'') \quad (B'\backslash A'') \quad (A\backslash B) \quad (B\backslash A) \quad (A''\backslash B') \quad (B''\backslash A')$$

veya

$$(A'\backslash B'') \quad (B'\backslash A'') \quad (A\Delta B) \quad (A''\backslash B') \quad (B''\backslash A') \tag{5}$$

yazılır. Ayrıca,

$$A'\backslash B' \quad A\backslash B \quad A''\backslash B''$$

ve

$$B'\backslash A' \quad B\backslash A \quad B''\backslash A''$$

kümelerinin bileşiminden,

$$(A'\backslash B') \quad (B'\backslash A') \quad (A\backslash B) \quad (B\backslash A) \quad (A''\backslash B'') \quad (B''\backslash A'')$$

veya,

$$A'\Delta B' \quad A\Delta B \quad A''\Delta B'' \tag{6}$$

yazılır. Bu halde işlemlerimizi (6) ifadesi yerine (5) ifadesi ile devam ettirelim.

$$(A'' \quad B'')\backslash(A' \quad B') \quad (A''\backslash A')\backslash(B''\backslash B')$$

olduğundan, ε keyfi sayısı için,

$$m\{(A'' \quad B'')\backslash(A' \quad B')\} \leq m\{(A'' \setminus A') \quad (B''\setminus B')\} \leq m(A'' \setminus A')+m(B'' \setminus B') \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu da, $A \Delta B$ kümesinin Jordan anlamında ölçülebilir olması demektir.

Son olarak,

$$A' \quad A \quad A'' \text{ ve } B' \quad B \quad B''$$

ve

$$A' \setminus B'' \quad A \setminus B \quad A''\setminus B'$$

kapsamlarından,

$$\{(A'' \setminus B') \setminus (A' \quad B'') \quad (A''\setminus A') \quad (B''\setminus B')$$

bağıntısı yazılır. Bu kapsamın her iki yanınının ölçümünden,

$$m\{(A'' \setminus B')\backslash(A' \setminus B'')\} \leq m\{(A'' \setminus A') \quad (B'' \setminus B')\} \leq m(A''\setminus A')+m(B'' \setminus B') \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. ε sayısı keyfi olduğundan $A\backslash B$ kümesinin de, Jordan anlamında ölçülebilir olduğu gösterilmiş olunur.

Tanım: E temel kümesi üzerinde μ ölçümünün düzgün olması için gerekli ve yeterli koşulun, her bir $A \quad E$ kümesi için $A \quad B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ olacak şekilde ölçülebilir bir B kümesinin olmasıdır (1.a, s.56 - 1.b, s.271).

5. Teorem: A ve B kümeleri verildiğinde $A \quad B$ için $\mu(A) = \mu(B)$ oluyorsa, A' ve B' tümleyen kümeleri için de $\mu(A') = \mu(B')$ olur.

İspat: $A' = B' \quad (B\setminus A)$ şeklinde ayrık iki kümenin bileşimi olduğundan,

$$\mu(A') = \mu(B') + \mu(B \setminus A) \tag{7}$$

yazılır.

Diğer yandan, A ve $B \setminus A$ kümeleri ayrık olduklarından $B = A \quad (B\setminus A)$ ve $\mu(A) = \mu(B) + \mu(B \setminus A)$ olur. $A \quad B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ olduğundan, $\mu(B \setminus A)=0$ gelir. Bu sonuç (7) ifadesinde kullanılırsa, $\mu(A') = \mu(B')$ elde edilir. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

6. Teorem:

$$A \quad B \text{ ve } \mu(A) = \mu(B)$$

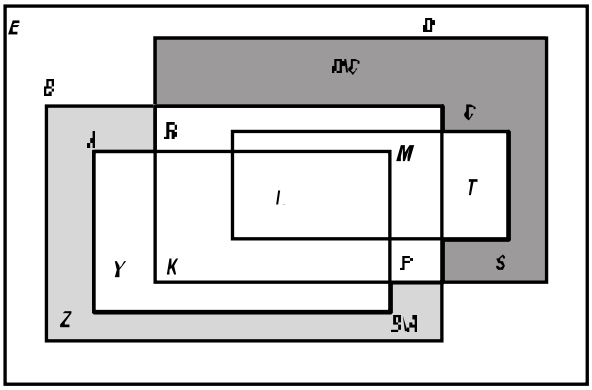
$$C \quad D \text{ ve } \mu(C) = \mu(D)$$

ise,

$$A \quad C \quad B \quad D \text{ ve } \mu(A \quad C) = \mu(B \quad D)$$

olur.

İspat: Aşağıdaki şekle dikkat edilirse,



$$A \quad C = Y \quad K \quad L \quad M \quad T$$

yazılır. Burada her iki yanının ölçümünden,

$$\mu(A \quad C) = \mu(Y \quad K \quad L \quad M \quad T)$$

olur. Ayrıca,

$$Y \cap K \cap L \cap M \cap T = \emptyset$$

olduğundan, $\mu(A \quad C) = \mu(Y)+\mu(K)+\mu(L)+\mu(M)+\mu(T)$ yazılır. Yine, K ve M kümelerinin ölçümleri sıfır olduğundan,

$$\mu(A \quad C) = \mu(Y)+\mu(L)+\mu(T) \tag{8}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$B \quad D = Z \quad Y \quad K \quad L \quad P \quad R \quad M \quad T \quad S$$

ifadesinin her iki yanının ölçümünden ,

$$\mu(B \quad D) = \mu(Z)+\mu(Y)+\mu(K)+\mu(L)+\mu(P)+\mu(R)+\mu(M)+\mu(T)+\mu(S)$$

yazılır. Yine burada şekle dikkat edilirse, Z, K, P, R, M, S kümelerinin ölçümlerinin sıfıra eşit olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$\mu(B \quad D) = \mu(Y)+\mu(L)+\mu(T) \tag{9}$$

bulunur. (8) ve (9) eşitliğinden $\mu(A \quad C) = \mu(B \quad D)$ elde edilir. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

7. Teorem:

$$A_1 \quad B_1 \text{ ve } \mu(A_1) = \mu(B_1) \tag{10}$$
$$A_2 \quad B_2 \text{ ve } \mu(A_2) = \mu(B_2) \tag{11}$$

ise,

$$A_1 \cap A_2 \quad B_1 \cap B_2 \text{ ve } \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(B_1 \cap B_2)$$

olur.

İspat: Bir kere, $A_1 \cap A_2 \quad B_1 \cap B_2$ olduğu açıktır. Şimdi,

$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(B_1 \cap B_2)$$

olduğunu gösterelim. Verilen hipoteze göre, (10) ve (11) ifadelerinden, $B_1 = A_1 \quad C_1$ ve $B_2 = A_2 \quad C_2$ olacak şekilde $\mu(C_1) = 0 = \mu(C_2)$ olan C_1 ve C_2 kümeleri vardır. Buradan,

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \quad C_1) \cap (A_2 \quad C_2) \quad (A_1 \quad C_1) \quad (A_2 \quad C_2)$$

ve

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_2) \quad (C_1 \cap A_2) \quad (A_1 \cap C_2) \quad (C_1 \cap C_2)$$

ifadelerinden,

$$\mu(B_1 \cap B_2) \leq \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(C_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap C_2) + \mu(C_1 \cap C_2)$$

$$\leq \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(C_1) + \mu(C_2) + \mu(C_1) + \mu(C_2)$$

yazılır. Ayrıca, $\mu(C_1) = 0$ ve $\mu(C_2) = 0$ olduklarından,

$$\mu(B_1 \cap B_2) \leq \mu(A_1 \cap A_2) \tag{12}$$

gelir. Öte yandan, $A_1 \cap A_2 \quad B_1 \cap B_2$ kapsamından,

$$\mu(A_1 \cap A_2) \leq \mu(B_1 \cap B_2) \tag{13}$$

yazılır. (12) ve (13) ifadelerinden,

$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(B_1 \cap B_2)$$

eşitliği elde edilir. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

8. Teorem:

$$A_1 \quad A_2 \text{ ve } \mu(A_1) = \mu(B_1)$$
$$A_2 \quad A_2 \text{ ve } \mu(A_2) = \mu(B_2)$$
$$\begin{array}{cccc} . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}$$

olsun. Bu halde,

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B \text{ ve } \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$$

olur.

İspat:

$$\begin{array}{l} B_1 = A_1 \quad C_1 \text{ ve } \mu(C_1) = 0 \\ B_2 = A_2 \quad C_2 \text{ ve } \mu(C_2) = 0 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \end{array}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = 0$$

olacak şekilde $C_1, C_2, \ldots$ kümeleri vardır. Böylece,

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i \cap C_j)$$

$$= \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \left[\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i \cap C_j) \right]$$

$$A \quad (\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i)$$

kapsamı yazılır. Böylece,

$$\mu(B) \leq \mu(A) + \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i) \tag{14}$$

$$\leq \mu(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$$

$$= \mu(A)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B$$

kapsamından,

$$\mu(A) \leq \mu(B) \tag{15}$$

olur. (14) ve (15) ifadelerinden,

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(A) = \mu(B) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$$

elde edilir.

9. Yardımcı Teorem: $A \quad B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ olsun. Bu halde, $A \quad C = B$ ve $A \cap C = \emptyset$ olacak şekilde ölçümü sıfır olan bir C kümesi vardır.

İspat: Burada $\mu(C) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için, Venn şemasına göre,

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \quad B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

yazılır. Hipotezde, $\mu(A) = \mu(B)$ olduğundan, $\mu(C) = \mu(A \cap C) = \mu(\emptyset) = 0$ elde edilir. Böylece, $\mu(C) = 0$ olduğu gösterilmiş olunur.

10. Teorem: Sayılabilir sonsuzluktaki $A_1, A_2, A_3,...$ kümeleri için,

$$\begin{array}{llll} A_1 & B_1 \text{ ise } & \mu(A_1) = & \mu(B_1) \\ A_2 & B_2 \text{ ise } & \mu(A_2) = & \mu(B_2) \\ . & . & . & . \\ A_n & B_n \text{ ise } & \mu(A_n) = & \mu(B_n) \\ . & . & . & . \end{array}$$

ise,

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B \text{ ve } \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$$

olur.

İspat: Önce,

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B$$

diyelim. Buna göre, B= $A \quad C$ ve $A \cap C = \emptyset$ olacak şekilde ölçümü sıfır olan bir C kümesi vardır. Ayrıca, B= $A \quad C$ eşitliğinden,

$$\mu(B) = \mu(A \quad C) = \mu(A) + \mu(C)\ ) - \mu(A \cap C)$$

yazılır. Böylece, $\mu(C) = 0$ ve $\mu(A \cap C) = \mu(\emptyset) = 0$ olduklarından $\mu(A) = \mu(B)$ olduğu gösterilmiş olunur. Bu da,

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$$

demektir.

11. Sonuç: A ve B kümeleri için, $A \quad B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ ise, bu kümeler ancak ölçümü sıfır olan bir küme farkıyla eşittirler.

İspat: $A \quad B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ olduğundan $A \quad C = B$ olacak şekilde en az bir C kümesi vardır. Buradan, $A \quad C = B$ ise, $B \setminus A = C$ ve $\mu(B) - \mu(A) = \mu(C)$ olur. $\mu(A) = \mu(B)$ ifadesi kullanılırsa, $\mu(A) = \mu(B) = 0 = \mu(C)$ olduğu bulunur. Bu da, istenen sonuçtur.

12. Örnek: A, $[a,b]$ kapalı aralığındaki tam sayılar kümesi, B, $[a,b]$ kapalı aralığındaki rasyonel sayılar kümesi, $C \setminus B$, $[a,b]$ kapalı aralığındaki irrasyonel sayılar kümesi ve C, $[a,b]$ kapalı aralığındaki gerçel sayılar kümesi olmak üzere,

$$C \setminus B \quad C \text{ ve } \mu(C \setminus B) = \mu(C)$$
$$A \quad B \text{ ve } \mu(A) = \mu(B)$$

ise,

$$\mu((C \setminus B) \quad A) = \mu(C \quad B)$$

olur.

Çözüm: Yukarıdaki eşitliğin birinci yanı,

$$\mu((C \setminus B) \quad A) = \mu(C \setminus B) + \mu(A) - \mu((C \setminus B) \quad A)$$
$$= b - a + 0 - 0 = b - a$$

bulunur. İkinci yana da aynı işlem uygulanırsa,

$$\mu(C \quad B) = \mu(C) + \mu(B) - \mu(C \cap B)$$
$$= b - a + 0 - 0 = b - a$$

olduğu bulunur.

13. Teorem:

$$A \quad B \Leftrightarrow B' \quad A' \text{ ve } \mu(B') = \mu(A')$$
$$C \quad D \Leftrightarrow D' \quad C' \text{ ve } \mu(D') = \mu(C')$$

ise,

$$\mu(B' \quad D') = \mu(A' \quad C')$$

olur.

İspat:

$$\left.\begin{matrix} D' \quad C' \\ \\ B' \quad A' \end{matrix}\right\} B' \quad D' \quad A' \quad C'$$

yazılır. Her iki yanın ölçümü alınırsa,

$$\mu(B' \quad D') \leq \mu(A' \quad C')$$

olduğu görülür. Bu ifadeyi açarsak,

$$\mu(B') + \mu(D') - \mu(B' \cap D') \leq \mu(A') + \mu(C') - \mu(A' \cap C')$$

$$\mu(A' \cap C') \leq \mu(B' \cap D') \tag{16}$$

yazılır. Öte yandan,

$$\left.\begin{matrix} D' & C' \\ B' & A' \end{matrix}\right\} \Rightarrow B' \cap D' \quad A' \cap C'$$

ve

$$\mu(B' \cap D') \leq \mu(A' \cap C') \tag{17}$$

olur. (16) ve (17) ifadelerinden

$$\mu(A' \cap C') = \mu(B' \cap D')$$

yazılır.

Öte yandan, $(B' \quad D') \quad K = A' \quad C'$ ve $(B' \quad D') \cap K = \emptyset$ olacak şekilde ölçümü sıfır olan bir K kümesi vardır. Böylece, yukarıdaki eşitliğin her iki yanının ölçümünden,

$$\mu(B' \quad D') + \mu(K) = \mu(A' \quad C')$$

$$\mu(B') + \mu(D') - \mu(B' \cap D') + \mu(K) = \mu(A') + \mu(C') - \mu(A' \cap C')$$

yazılır. Buradan,

$$\mu(K) - \mu(B' \cap D') = -\mu(A' \cap C')$$

olur. Böylece,

$$\mu(K) = \mu(B' \cap D') - \mu(A' \cap C') = 0$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak,

$$\mu(B' \quad D') + \mu(K) = \mu(A' \quad C')$$

ve

$$\mu(B' \quad D') = \mu(A' \quad C')$$

yazılır.

KAYNAKLAR

[1.a]. FEDERER, H., (1969), Geometrik Measure Theory, Springer-Verlag, New York (p. 52-57).

[1.b]. FEDERER, H. AND MORSE, A.P., (1943), Some properties of measurable functions, Bull., Am., Math., Soc., 49, 270-277.

[2]. GOLMOGOROV, A.N. AND FOMİN, S. V., (1970), Introduction to Real Analysis, Revised English Edition, Translated and Edited by Silverman, R. A., 270 Madison Avenue, New York, p. 255-283.

[3]. MURRAY, R. S., (1969), Real Variables Lebesgue Measure and Integration With Applications to Fourier Series, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill Book Company, New York, p. 30-40.