

AFİNOR ALANLARIN HORIZONTAL LİFTİNİN NİJENHUIS-SHIROKOV TENSÖRÜ HAKKINDA

Necmi CENGİZ

Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü

Arif SALİMOV

Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü

ÖZET: Bu çalışmada almost kompleks yapının Nijenhuis tensörünün almost cebirsel yapılara genişlemesi olan Nijenhuis-Shirokov tensörü invaryant formda verilmiş ve bu tür tensörler tanjant demette incelenmiştir. Tanjant demette horizontal lift yardımıyla oluşan almost cebirsel yapının Nijenhuis-Shirokov tensörünün sıfıra eşit olmasını sağlayan şartlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: *Tensör, afinor alan, tanjant demet, horizontal lift.*

ABSTRACT: The main purpose of the present paper is first of all to study Nijenhuis-Shirokov tensors for an almost algebraic structure and then to apply the results to the study of tangent bundles.

Key words: *Tensor, afinor field, tangent bundle, horizontal lift.*

1. Giriş

M_n , C^∞ sınıfından n-boyutu diferensiyellenebilen bir manifold, A_m , m-boyutlu birimli, değişmeli, birleşmeli cebir olsun. M_n manifoldu üzerinde alınmış (1,1) tipli tensör (afinor) alanlarının herhangi kümesi Π olsun. Eğer Π A_m izomorfizmi varsa Π -yapıya almost cebirsel yapı denir. A_m cebirinin bazı $\{e_\alpha\}$ olmak üzere, karşılık gelen $\varphi \leftrightarrow e_\alpha$ afinorları için

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma \varphi_\gamma$$

yazılır. Burada $C_{\alpha\beta}^\gamma$, A_m cebirinin yapı sabitleri, $\varphi_\alpha \varphi_\beta$ ise φ_α ve φ_β afinorlarının kontraksiyonlu çarpımıdır. Koordinatlarla bu çarpım $\varphi_\alpha^i \varphi_\beta^j$ olarak gösterilir.

2. Nijenhuis-Shirokov Tensörü

M_n manifoldu üzerinde (1, σ) tipli tüm tensör alanlarının kümesini $\mathfrak{T}_q^1(M_n)$ ile gösterelim. $\mathfrak{T}_q^1(M_n)$, $F(M_n)$ (M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfından olan tüm fonksiyonların) üzerindeki bir modül oluşturur.

$t \in \mathfrak{T}_q^1(M_n)$ tensör alanı ve $\forall \varphi \in \Pi$, $\alpha = 1, \dots, m$, için aşağıdaki şart sağlanıyorsa, t tensör alanının almost cebirsel yapıya göre pür tensör alanı denir:

$$\varphi(t(X_1, \dots, X_q)) = t(\varphi X_1, \dots, X_q) = \dots = t(X_1, \dots, \varphi X_q) \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{T}_0^1(M_n).$$

Kabul edelim ki, $\psi \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ almost cebirsel yapıya göre bir pür afinor alanı olsun. Bu afinora uygulanan Jacobiana operatörüne bakalım [1],[2]:

$$(\Phi_\varphi \psi)(X, Y) = \varphi[\psi Y, X] + \psi[Y, \varphi X] - [\psi Y, \varphi X] - \psi\varphi[X, Y]. \quad (1)$$

Almost cebirsel Π -yapısı için $\mathcal{Q}_{\varphi, \psi}(X, Y)$, $\forall \varphi, \psi \in \Pi$ Nijenhuis-Shirokov tensörü

$$\mathcal{Q}_{\varphi, \psi}(X, Y) = [\psi X, \varphi Y] - \varphi[\psi X, Y] - \psi[X, \varphi Y] + \psi\varphi[X, Y] \quad (2)$$

diğerinde tanımlanır [5]. (1) ve (2) denklemlerinden

$$\mathcal{Q}_{\varphi, \psi}(X, Y) = -(\Phi_\varphi \psi)(Y, X) \quad (3)$$

bulunur.

Özel durumda, eğer $\varphi = \psi$ ve almost cebirsel Π -yapı almost kompleks yapı ise ($\varphi^2 = id$) $\mathcal{Q}_{\varphi, \varphi}(X, Y) = -N_\varphi(Y, X)$ Nijenhuis tensörü bulunur ve (3)

eşitliğinden de $N_\varphi(X, Y) = -N_\varphi(Y, X)$ özelliğine göre

$$(\Phi_\varphi \varphi)(X, Y) = N_\varphi(X, Y)$$

olduğu yazılır [2].

Nijenhuis tensörü almost kompleks yapının, Nijenhuis-Shirokov tensörü ise almost cebirsel yapının integralenmesi problemlerinde önemli rol oynar.

3. Tanjant Demette Nijenhuis-Shirokov Tensörü

M_n , n -boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold olsun. M_n manifoldu üzerinde

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n)$$

tanjant demet ve $\pi : T(M_n \rightarrow M_n$ ($\tilde{p} \rightarrow p$) tabii izdüşümü verilmiş olsun. M_n manifoldunun U koordinat komşuluğunun p noktasındaki lokal koordinatlar $x^h, h = 1, \dots, n$ olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demette $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğundaki indirgenmiş lokal koordinatlar $(x^h, y^h) = (x^h, x^{\bar{h}}), \bar{h} = n+1, \dots, 2n$ olarak alınır. Burada $x^{\bar{h}} = v^h T_p(M_n)$ tanjant vektör uzayında ki \tilde{p} vektörünün $\{\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\}$ bazında koordinatlarıdır. Lokal koordinatlarda $M_n : x^{j'} = x^j(x^j)$ koordinat dönüşümüne karşılık $T(M_n)$ tanjant demette koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{j'} = x^j(x^j) \\ y^{j'} = A_j^{j'} y^j, A_j^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}, y^j = x^{\bar{j}} \end{cases} \quad (4)$$

biçiminde olur. (4) dönüşümünün Jacobian matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} & \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\bar{j}}} \\ \frac{\partial x^{\bar{j}}}{\partial x^j} & \frac{\partial x^{\bar{j}}}{\partial x^{\bar{j}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j^{j'} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^j \partial x^i} y^i & A_j^{j'} \end{pmatrix} \quad (5)$$

olarak yazılır.

M_n manifoldunun U koordinat komşuluğunda keyfi $w = w_i dx^i$ 1-formu verilmiş ise $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş koordinatlarda lokal ifadesi $\iota w = w_i y^i$ biçiminde olan fonksiyonu tanımlanır.

M_n manifoldu üzerinde X vektör alanı verilmiş olsun. w keyfi 1-form olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demette

$${}^v X(\iota w) = {}^v(w(X)) \quad (6)$$

olarak tanımlanan X vektör alanına X vektör alanının vertical lifti denir. X vektörünün $T(M_n)$ tanjant demette vertical liftinin bileşenleri

$${}^v X : \begin{pmatrix} {}^v X^h \\ {}^v X^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \quad (7)$$

olarak verilir. (7) ifadesiyle tanımlanmış vertical liftin tanjant demette bir vektör alanı olduğu (5) ile verilen Jakobian matrisinin yardımıyla da gösterilebilir.

Sonuç olarak (7) denkleminde

$$\begin{cases} {}^v X f = 0, {}^v(X+Y) = {}^v X + {}^v Y \\ {}^v(fX) = {}^v f {}^v X, X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n), f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n) \end{cases} \quad (8)$$

elde edilir. Ayrıca X ve Y keyfi vektör alanları olmak üzere (7) denkleminde Lie parantezi için

$$[{}^v X, {}^v Y] = 0 \quad (9)$$

elde edilir.

Diğer taraftan M_n diferensiyellenebilir manifoldunda Γ_{ij}^k katsayıları ile ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. M_n manifoldunda keyfi tipli S tensör alanının $T(M_n)$ tanjant demetdeki horizontal lifti

$${}^H S = {}^c S - \nabla_{\gamma} S \quad (10)$$

olarak tanımlanır [4, s.94]. Burada ${}^c S$ -tam lifti gösterir, $\nabla_{\gamma} S$ ise

$$\nabla_{\gamma} S = (y^l \nabla_l S^{i\dots h}_{k\dots j}) \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^k \otimes \dots \otimes dx^j$$

gibi verilir. Burada $\nabla_{\gamma} S^{i\dots h}_{k\dots j}$ tensör alanının kovaryant türevidir. O halde $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ vektör alanlarının $T(M_n)$ tanjant demette horizontal liftinin bileşenleri

$$\begin{cases} {}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \\ {}^H \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_i^h & 0 \\ -\Gamma_t^h \varphi_t^i + \Gamma_i^t \varphi_t^h & \varphi_i^h \end{pmatrix}, \Gamma_i^h = y^j \Gamma_{ji}^h \end{cases} \quad (11)$$

olarak yazılır.

$\check{R}, \check{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$, biçimindeki $\check{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü olmak üzere (lokal koordinatlarda $\check{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$) aşağıdaki formüller yazılır:

$$\begin{aligned} [{}^v X, {}^H Y] &= {}^v [X, Y] - {}^v (\nabla_X Y) \\ [{}^H X, {}^v Y] &= {}^v [X, Y] + {}^v (\nabla_Y X) \\ [{}^H X, {}^H Y] &= {}^H [X, Y] - \gamma \check{R}(X, Y) \end{aligned} \quad (12)$$

$\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$${}^H \varphi {}^v X = {}^v (\varphi X), \quad {}^H \varphi {}^H X = {}^H (\varphi X) \quad (13)$$

olur.

1. Teorem \tilde{S} ve \tilde{T} , $T(M_n)$, tanjant uzayında $(1, s)$ tipinde iki tensör alanı olsun. \tilde{X}_t ($t = 1, \dots, s$) ile ${}^v X$ veya ${}^H X$ vektör alanlarını işaret edelim. Eğer \tilde{X}_t alanları için

$$\tilde{S}(\tilde{X}_s, \dots, \tilde{X}_1) = \tilde{T}(\tilde{X}_s, \dots, \tilde{X}_1), \quad \forall X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$$

ise, bu taktirde $\tilde{S} = \tilde{T}$ olur ([4, s.101]).

M_n manifoldu üzerinde değişmeli almost cebirsel Π_- yapısı verilmiş olsun.

$\forall \varphi, \varphi \in \Pi, \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için Nijenhuis-Shirokov tensörleri

$$Q_{\varphi, \varphi}^{\alpha \beta}(X, Y) = Q_{\alpha \beta}^{\alpha \beta}(X, Y) \text{ olmak üzere}$$

$$Q_{\alpha \beta}^{\alpha \beta}(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] + C_{\alpha \beta}^{\gamma} \varphi[X, Y] \quad (14)$$

biçiminde yazılır.

${}^H \varphi^H \psi = {}^H(\varphi \psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ olduğunu biliyoruz [4, s.102]. Buna göre

$${}^H \varphi^H \varphi = {}^H(\varphi \varphi) = {}^H(C_{\alpha \beta}^{\gamma} \varphi) = C_{\alpha \beta}^{\gamma} {}^H \varphi$$

olur. Bu ise ${}^H \Pi = \{{}^H \varphi\}$ yapısının da almost cebirsel yapı olması demektir.

${}^H \Pi = \{{}^H \varphi\}$ yapıya göre $Q_{\alpha \beta}^*$ Nijenhuis-Shirokov tensörleri için, (9), (12), (13), (14) formülleri yardımıyla

$$Q_{\alpha \beta}^*({}^v X, {}^v Y) = 0$$

$$Q_{\alpha \beta}^*({}^v X, {}^H Y) = {}^v(Q_{\alpha \beta}(X, Y)) - {}^v\{(\nabla_{\varphi X} \varphi)Y - \varphi(\nabla_X \varphi)Y\}$$

$$Q_{\alpha \beta}^*({}^H X, {}^v Y) = {}^v(Q_{\alpha \beta}(X, Y)) + {}^v\{(\nabla_{\varphi Y} \varphi)X - \varphi(\nabla_Y \varphi)X\}$$

$$Q_{\alpha \beta}^*({}^H X, {}^H Y) = {}^H(Q_{\alpha \beta}(X, Y)) - \gamma \check{R}(\varphi X, \varphi Y) + {}^H \varphi \gamma \check{R}(\varphi X, Y)$$

$$+ {}^H \varphi \gamma \check{R}(X, \varphi Y) - C_{\alpha \beta}^{\gamma} {}^H \varphi \gamma \check{R}(X, Y)$$

bulunur.

1. Teoremi kullanarak aşağıdaki Teoremi ispatlamış oluruz:

2. Teorem M_n manifoldu üzerinde cebirsel Π_- yapısı verilmiş olsun. Eğer

$$Q_{\alpha\beta} = 0$$

$$(\nabla_{\alpha} \varphi)(\varphi X, Y) - \varphi(\nabla_{\beta} \varphi)(X, Y) = 0$$

$$(\nabla_{\beta} \varphi)(\varphi Y, X) - \varphi(\nabla_{\alpha} \varphi)(Y, X) = 0$$

$$\overset{\vee}{R}_{\beta}(\varphi X, \varphi Y) - \varphi \overset{\vee}{R}_{\alpha}(\varphi X, Y) - \varphi \overset{\vee}{R}_{\beta}(X, \varphi Y) + C_{\alpha\beta}^{\gamma} \varphi \overset{\vee}{R}_{\gamma}(X, Y) = 0$$

çizimliliği sağlanıyorsa $\hat{Q}_{\alpha\beta}^* = 0$ olur.

Eğer almost cebirsel Π -yapı almost integrallenebilirse, yani burulmasız ∇ konneksiyonu için $\nabla \varphi = 0$ oluyor ise bu durumda $Q = 0$ olur [3]. Diğer taraftan

$$Q_{\alpha\beta}(X, Y) = -Q_{\beta\alpha}(Y, X) \text{ olduğunu dikkate alırsak [3], bu tür yapılar için}$$

$$0 = Q_{\alpha\beta}(X, Y) = -(\Phi_{\varphi} \varphi)(Y, X) = -\{(\nabla_{\beta} \varphi)(\varphi Y, X) - \varphi(\nabla_{\alpha} \varphi)(Y, X)\},$$

$$0 = Q_{\beta\alpha}(X, Y) = -(\Phi_{\varphi} \varphi)(X, Y) = -\{(\nabla_{\alpha} \varphi)(\varphi X, Y) - \varphi(\nabla_{\beta} \varphi)(X, Y)\}$$

olduğundan dolayı 2. Teoremde aşağıdaki sonucu çıkarırız.

Sonuç: Eğer M_n manifoldu üzerinde almost integrallenebilen almost cebirsel Π -yapı verilmiş

$$R_{\beta}(\varphi X, \varphi Y) - \varphi R_{\alpha}(\varphi X, Y) - \varphi R_{\beta}(X, \varphi Y) + C_{\alpha\beta}^{\gamma} \varphi R_{\gamma}(X, Y) = 0$$

şartı sağlanıyorsa, bu taktird $\hat{Q}_{\alpha\beta}^* = 0$ olur. Burada, R, ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörüdür.

Kaynaklar

- [1]. TACHIBANA, S. (1960), Analytic tensor and its generalization, Tohoku Math. J., 12N.2, 208-221.
- [2]. YANO, K., AKO, M. (1968), On certain operators associated with tensor fields, Kodai Math. Sem., Rep., 20, 414-436.
- [3]. KRUCHKOVICH, G.I. (1972), Hypercomplex structures on manifolds, I. Trudy sem. vector. tensor. anal, Moscow Univ., N.16, 174-201.
- [4]. YANO, K., ISHIHARA, S. (1973), Tangent and Cotangent bundles, Marcel Dekker Inc., New York.
- [5]. SALIMOV, A.A. (1994), The Generalized Yano-Ako operator and complete lift of the tensor fields, Tensor N.S., Tensor Soc. of Japan, 55, N.2, 142-146.