# JORDAN ANLAMINDA ÖLÇÜLEBİLİRLİK

**Ali DÖNMEZ**
*Doğuş Üniversitesi, Fen Bilimleri Bölümü*

**Halit ORHAN**
*Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü*

**ÖZET:** *Doğuş Üniversitesi Dergisi*'nin ikinci sayısındaki makalemizde, eğer $A$ ve $B$ kümeleri Jordan anlamında ölçülebilirse, bu kümelerin kesişim, bileşim, fark ve simetrik farklarının da Jordan anlamında ölçülebilir olduğunu ispatlamıştık. Bu makalede, eğer $A_1$, $A_2$, $A_3$,... kümeleri Jordan anlamında ölçülebilirse, bu kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşim, kesişim, ikişer ikişer fark ve simetrik fark işlemlerine göre kapalı olduğunu ispatladık.

**Anahtar sözcükler:** *Jordan ölçülebilirlik, ölçüm.*

**ABSTRACT:** In our paper published in the second issue of the *Doğuş University Journal,* we proved that if $A$ and $B$ are Jordan measurable sets, then the union, intersection, difference and symmetric difference of these sets are again Jordan measurable. In this paper, we have proved that if $A_1$, $A_2$, $A_3$,... are Jordan measurable sets, then countable number of these sets is also closed according to the operations union, intersection, two by two difference and symmetric difference.

**Keywords:** *Jordan measurability, measure.*

Riemann integralinin temeli, Jordan ölçümü ve Lebesgue integralinin temeli Lebesgue ölçümüdür. Burada hemen akla şu soru gelir. Acaba bunların farkı nedir veya birisinin diğerine göre üstün yanı nedir? Bu soruya cevap arayalım.

Kartezyen koordinatlar düzleminde sınırlı basit bir $M$ kümesini ve her $x \in [a,b]$ için $0 \leq f(x) \leq c$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığında negatif olmayan bir $f$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $M$ kümesinin Jordan ölçümü, onun iç ve dış Jordan ölçümlerinin ortak değeridir.

$M$ kümesinin dış Jordan ölçümü, $M$ kümesini örten sonlu bileşime sahip dikdörtgenlerin alanlarının infimumudur. $M$ kümesinin iç ölçümü ise, $S$ de $M$ nin tümleyeninin dış ölçümü ile yüksekliği $C$ olan $[a,b]$ tabanlı $S$ dikdörtgenlerinin $C(b-a)$ alanı arasındaki farktır.

Lebesgue $S$ kümesinin bir alt kümesinin ölçümünün Jordan tanımında sonlu kelimesini sayılabilir kelimesi ile değiştirdi. Yapılmış olan bu yöntem $S$ kümesinin ölçülebilir alt kümelerinin sayısını büyük oranda artırdı. Bu integrasyon teorisinin Riemann'dan daha genel ve matematiksel olarak daha geniş bir alana yayılmasına önderlik etti.

**i. Tanım:** $\Re$ boş olmayan bir kümeler ailesi olsun. Eğer $A \in \Re$ ve $A \in \Re$ olması $A \Delta B$ ve $A \cap B$ kümelerinin de $\Re$ ailesinin öğeleri olmasını gerektiriyorsa $\Re$ ailesine bir halkadır denir (2,s.31).

**ii. Tanım:** $m$, $\Re$ halkası üzerinde tanımlanmış bir ölçüm olsun. Verilen bir $A$ kümesi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\Re$ halkası içinde

$$A' \subseteq A \subseteq A'' \text{ ve } m(A'' \backslash A') < \varepsilon$$

olacak şekilde $A''$ ve $A'$ kümeleri varsa $A$ kümesine Jordan anlamında ölçülebilirdir denir (2, s.281).

**1.Teorem:** $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kümeleri Jordan anlamında ölçülebilirse, bu kümelerin sayılabilir sayıdası bileşim, kesişim, ikişer ikişer fark ve simetrik fark işlemleri altında kapalıdır.

**İspat:** $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kümeleri Jordan anlamında ölçülebilir olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\begin{array}{l} A'_1 \subseteq A_1 \subseteq A''_1 \text{ ve } m(A''_1 \backslash A'_1) < \varepsilon/2 \\ A'_2 \subseteq A_2 \subseteq A''_2 \text{ ve } m(A''_2 \backslash A'_2) < \varepsilon/2^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \tag{1}$$

olacak şekilde $\Re$ halkasında $A'_i$ ve $A''_i$ kümeleri vardır $(i = 1,2,3,\ldots)$. (1) ifadesinden,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A''_i$$

ve

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (A'_i \backslash A''_{i+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \backslash A_{i+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A''_i \backslash A'_{i+1})$$

kapsamlarını yazmak kolaydır. Buradan,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (A''_i \backslash A'_{i+1}) \backslash (A'_i \backslash A''_{i+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(A''_i \backslash A'_i) \cup (A''_{i+1} \backslash A'_{i+1})\}$$

kapsamı elde edilir. Bu kapsamın her iki yanının ölçümünden,

$$m\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} (A''_i \backslash A'_i)\right\} \leq m\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} [(A''_i \backslash A'_i) \cup (A''_{i+1} \backslash A'_{i+1})]\right\} < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} \tag{2}$$

eşitsizliği gelir. (2) eşitsizliğindeki ortadaki terim açık yazılırsa,

$$m(A''_1 \backslash A'_1) + m(A''_2 \backslash A'_2) + \ldots < \varepsilon/2 + \varepsilon/2^2 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i}$$

olur.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i}$$

serisi geometrik seri olup ortak çarpan $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ olduğundan yakınsak ve toplamı da $\varepsilon$ sayısına eşittir. Sonuç olarak,

$$m\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(A''_i \setminus A'_i)\right\} < \varepsilon$$

eşitsizliği bulunur. Bu da istenen sonuçtur.
Öte yandan yine (1) ifadesinden,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A'_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A''_i$$

ve

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(A''_i \setminus A'_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[(A''_i \setminus A'_i) \cup (A''_{i+1} \setminus A'_{i+1})\right] \tag{3}$$

kapsamları yazılır. (3) ifadesinin her iki yanının ölçümünden,

$$m\left\{\bigcap_{i=1}^{\infty}(A''_i \setminus A'_i)\right\} \leq m\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[(A''_i \setminus A'_i) \cup (A''_{i+1} \setminus A'_{i+1})\right]\right\} < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} \tag{4}$$

elde edilir. (4) ifadesinde ortadaki terim açık yazılırsa,

$$m(\{(A''_1 \setminus A'_1) \cup (A''_2 \setminus A'_2) \cup (A''_2 \setminus A'_2) \cup (A''_3 \setminus A'_3) \cup \ldots\}$$
$$= m(\{(A''_1 \setminus A'_1) \cup (A''_2 \setminus A'_2) \cup (A''_3 \setminus A'_3) \cup \ldots\}$$

$$m(A''_1 \setminus A'_1) + m(A''_2 \setminus A'_2) + m(A''_3 \setminus A'_3) + \ldots < \varepsilon/2 + \varepsilon/2^2 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon$$

olur. Bu da istenen sonuçtur.
Üçüncü olarak yine aynı düşünce ile (1) ifadesinden ve

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A'_i \setminus A''_{i+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A''_i \setminus A'_{i+1})$$

kapsamından,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A''_i \setminus A'_{i+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[(A''_i \setminus A'_i) \cup (A''_{i+1} \setminus A'_{i+1})\right] \tag{5}$$

yazılır. (5) ifadesinin her iki yanının ölçümünden

$$m\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(A''_i \setminus A'_{i+1})\right\} \leq m(A''_1 \setminus A'_1) + m(A''_2 \setminus A'_2) + \ldots < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon$$

elde edilir.

Son olarak yine (1) ifadesinden,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A'_i \setminus A''_{i+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A''_i \setminus A'_{i+1}) \tag{6}$$

ve

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A'_{i+1} \setminus A''_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_{i+1} \setminus A_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(A''_{i+1} \setminus A'_i) \tag{7}$$

kapsamı yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(A'_i \setminus A''_{i+1}) \cup (A'_{i+1} \setminus A''_i)\} &\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\{(A_i \setminus A_{i+1}) \cup (A_{i+1} \setminus A_i)\} \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\{(A''_i \setminus A'_{i+1}) \cup (A''_{i+1} \setminus A'_i)\}\end{aligned} \tag{8}$$

yazılır. (8) ifadesinde ortadaki terimi açık yazarsak,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(A_i \setminus A_{i+1}) \cup (A_{i+1} \setminus A_i)\} = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \bigcup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_2) \bigcup \ldots$$

ifadesi kümelerin ikişer ikişer simetrik farklarının bileşimi olduğu görülür. Böylece,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(A''_i \cup A''_{i+1}) \setminus (A'_i \cup A'_{i+1})\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\{(A''_i \setminus A'_i) \cup (A''_{i+1} \setminus A'_{i+1})\} \tag{9}$$

kapsamı yazılır. (9) ifadesinin her iki yanının ölçümünden,

$$m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(A''_i \cup A''_{i+1}) \setminus (A'_i \cup A'_{i+1})\}\right] \le m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(A''_i \setminus A'_i) \cup (A''_{i+1} \setminus A'_{i+1})\}\right] \le \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon 2^{-i} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

## KAYNAKLAR

DÖNMEZ, A. ve H. ORHAN (2000). "Düzgün Ölçüm", *Doğuş Üniversitesi Dergisi*, Sayı 2, s. 84-99.

GOLMOGOROV, A.N. and S.V. FOMIN (1970). *Introduction and Real Analysis*, Revised English Edition, Translated and Edited by Silverman, R. A., New York, p.31, 255-283.

SHENITZER, A. (1994). "The evolution of integration", *The Amarican Math.* vol, 101., Number 1, p.66-72.