

УДК 519.872.2: 656.6

**ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ****OPTIMIZATION OF SINGLE-CHANNEL QUEUING SYSTEM WITH UNLIMITED QUEUE**©**Осипов Г. С.**

SPIN-код: 7749-0840

д-р техн. наук

Сахалинский государственный университет

г. Южно-Сахалинск, Россия, [\\_Osipov@rambler.ru](mailto:_Osipov@rambler.ru)©**Osipov G.**

SPIN-code: 7749-0840

Dr. habil., Sakhalin State University

Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, [\\_Osipov@rambler.ru](mailto:_Osipov@rambler.ru)

*Аннотация.* В работе рассмотрены теоретические и методологические основы аналитического и имитационного моделирования одноканальных систем массового обслуживания с неограниченной очередью. В качестве среды имитационного моделирования исследуемых систем принят пакет *AnyLogic*, к которому реализуются все современные парадигмы моделирования.

Основной методологии синтеза и исследования систем массового обслуживания выбран имитационно-оптимизационный подход к моделированию, собирающий воедино мощь имитации и оптимизации. Такая концепция позволяет проводить анализ и синтез проектных объектов, а также оптимизировать функционирующие системы приводя их в соответствие требованиям экономической эффективности, экологической обеспеченности и технологической завершенности.

В практической реализации выполнена имитация, параметрический анализ и оптимизация сложной системы — морской порт со специализированным грузовым терминалом. В качестве целевой функции (критерия оптимизации) предложена зависимость приведенных (на единицу груза) совокупных затрат, связанных с ожиданием в очереди (судовая составляющая) и обслуживанию в канале (на терминале). Таким образом решается задача определения оптимальной пропускной способности терминала по критерию минимальных суммарных приведенных затрат для обработки входящего судопотока (грузопотока).

Перспективные исследования нацелены на рассмотрение и анализ многоканальных систем с различными дисциплинами очередей и с приоритетами в обслуживании. Основная цель — оптимизация эффективности функционирования системы судно — терминал по критерию совокупных затрат.

*Abstract.* The paper discusses the theoretical and methodological foundations of analytical and simulation of single-channel queuing system with unlimited queue. In an environment simulation systems studied adopted a package *AnyLogic*, to which implemented all modern modeling paradigm.

The basic methodology of the synthesis and study of queuing systems selected simulation-optimization approach to modeling, gathering the power of simulation and optimization. This concept allows for the analysis and synthesis of the project sites, as well as to optimize

the functioning of the system leading them into compliance with the requirements of economic efficiency, ecological security and technological perfection.

The practical implementation is made imitation, parametric analysis and optimization of complex systems — sea port with dedicated cargo terminal. The dependence of the above (unit load), the total cost associated with waiting in line (ship component) and service in the channel (at the terminal) is proposed as an objective function (optimization criterion). Thus solves the problem of determining the optimal capacity of the terminal by the criterion of minimum total discounted costs for processing the incoming traffic flow (traffic).

Prospective studies are aimed at the review and analysis of multi-channel systems with a variety of disciplines and with the priorities of queues in service. The main purpose — to optimize the effectiveness of the functioning of the ship — terminal on the criterion of the total cost.

*Ключевые слова:* системы массового обслуживания, имитационное моделирование, оптимизационная задача, морской порт, специализированный грузовой терминал.

*Keywords:* queuing systems, simulation, optimization problem, seaport, specialized cargo terminal.

### *Введение*

На практике часто встречаются одноканальные системы массового обслуживания (СМО) с очередью, на которую не наложено ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания), например, входящий судопоток в морском порту, имеющем один канал — специализированный грузовой терминал и рейд для ожидания судов очереди на выполнение погрузочно-разгрузочных работ у терминала.

При проектировании новых портов с терминалом для обслуживания перспективного грузопотока (судопотока), а также для повышения эффективности функционирования существующих терминалов целесообразно предварительно построить имитационную модель системы, исследуя которую можно найти оптимальные параметры функционирования реальной системы. Таким образом, имитационная и имитационная модели должны составлять единый взаимоувязанный комплекс, обеспечивающий комплексное решение задачи минимизации приведенных совокупных затрат по эксплуатации терминала и по содержанию судов во время их пребывания в очереди и у терминала.

Одноканальные системы — это простейшие объекты, в дальнейшем планируются аналогичные исследования для многоканальных систем, систем с ограничениями на очередь, приоритетами в обслуживании и т. д. Особое внимание будет уделено обеспечению эффективности и оптимизации функционирования рассматриваемых СМО с учетом суммарных затрат на ожидание в очереди и эксплуатацию каналов (обслуживания).

### *Необходимые сведения и формулы*

Рассматривается одноканальная СМО с неограниченной очередью (с Пуассоновским входным потоком заявок и Экспоненциальным временем обслуживания). Предполагается, что для систем этого типа выполняются следующие условия:

1. Появления заявок являются независимыми событиями, однако среднее число заявок, поступающих в единицу времени, неизменно.
2. Процесс поступления заявок описывается пуассоновским распределением, причем заявки поступают из неограниченного множества.
3. Заявки обслуживаются по принципу «первым пришел — первым обслужен» (*FIFO*), причем каждый клиент ожидает своей очереди до конца независимо от длины очереди.
4. Время обслуживания описывается экспоненциальным распределением вероятностей.
5. Темп обслуживания выше темпа поступления заявок.

Основные характеристики рассматриваемых систем сведены в Таблицу.

Таблица.

Показатели работы СМО

№		Наименование	Характеристика/ формула
1	$\lambda$	Интенсивность потока заявок	Среднее число заявок, поступающих в СМО в единицу времени. (число заявок/единицу времени)
2	$\mu$	Интенсивность потока обслуживания	Среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени. (число заявок/единицу времени)
3	$\rho$	Приведенная интенсивность потока заявок (интенсивность нагрузки канала)	Среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки. $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$
4	$L_s$	Среднее число заявок в системе	$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$
5	$L_q$	Среднее число заявок в очереди (длина очереди)	$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda}$
6		Среднее число заявок в канале (обслуживания)	$L_s - L_q = \rho$
7	$T_s$	Среднее время пребывания заявки в системе	$T_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$
8	$T_q$	Среднее время ожидания в очереди	$T_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$
9		Среднее время обслуживания	$T_s - T_q = \frac{L_s - L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$
10	$\gamma$	Отношение времени ожидания в очереди к времени обслуживания	$\gamma = \frac{T_q}{T_s - T_q} = \frac{L_q}{L_s - L_q} = \frac{\rho}{1 - \rho} = L_s$

Постановка задачи и метод решения

Моделирование систем массового обслуживания подчинено парадигме дискретно-событийного имитационного моделирования. Это совокупность операций или процессов с заявками, подчиненных причинно-следственным связям. На Рисунке 1 представлена процессная диаграмма одноканальной СМО [1].

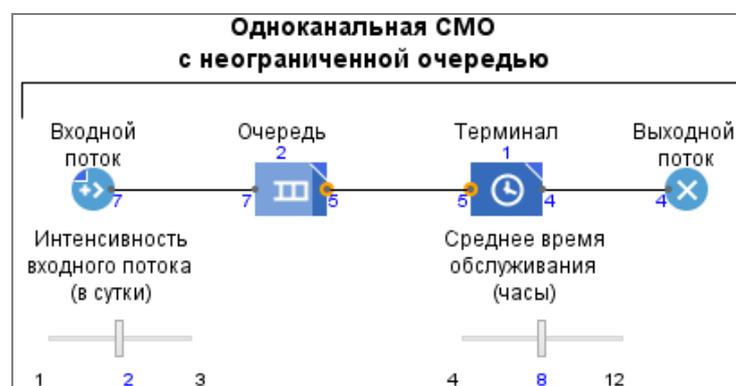


Рисунок 1. Принципиальная схема одноканальной СМО.

Для рассматриваемых простейших одноканальных систем с неограниченной очередью существуют аналитические выражения, которые позволяют рассчитать основные показатели функционирования СМО. Они приведены в Таблице. Однако это величины,

характеризующие функционирование системы в предельном (стационарном, асимптотическом режиме работы). Это средние величины, которые могут дать лишь общее (ограниченное) представление о поведении системы и не содержащие информацию о возможных отклонениях от среднего значения и критических ситуациях, возникающих в процессе функционирования реальной системы.

Таким образом актуальна задача моделирования СМО в специализированных пакетах имитационного моделирования. В качестве такой платформы выбран пакет *AnyLogic*, который, кроме используемого в данной работе дискретно-событийного моделирования, поддерживает и модели системной динамики и агентное моделирование [2]. Рассмотрение сложных технических и социально-экономических систем реально базируется на использовании совокупности существующих парадигм имитационного моделирования.

Кроме непосредственно моделирования, которое предполагает лишь наблюдение за поведением исследуемого объекта, важнейшей составляющей анализа функционирования любой системы является ее оптимизация. Это подразумевает определение тех параметров, которые обеспечивают оптимальное значение некоторого функционала, характеризующего «полезность» системы в соответствии с поставленной целью и задачами, которые должна решать «правильно» функционирующая система.

В одноканальной СМО с неограниченной очередью оптимизация подразумевает обеспечение такого соотношения интенсивностей поступления заявок ( $\lambda$ ) и их обслуживания ( $\mu$ ) при котором обеспечивается минимум суммарных (совокупных) затрат по ожиданию заявок в очереди и обслуживания в канале. Очевидно, эти совокупные затраты ( $f$ ) определяются приведенной интенсивностью потока заявок  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  (см. Таблицу 1), т. е.

$f = f(\rho)$ . Ясно, что стремление минимизировать затраты, связанные с ожиданием в очереди, приводит к увеличению расходов в канале (обслуживания). И наоборот минимизация затрат на обслуживание заявок (увеличение интенсивности нагрузки канала) приведет к возрастанию времени (и соответственно затрат) ожидания в очереди.

### Практическая реализация

#### 1. Сравнение параметров имитации с аналитическим решением.

В порту имеется специализированный терминал для разгрузки контейнеровозов [1]. Входящий поток судов является простейшим (пуассоновским) с интенсивностью  $\lambda = 2$  (судна в сутки). Время разгрузки судов подчинено показательному закону распределения с математическим ожиданием 8 (часов). Найти показатели эффективности работы терминала

В данном случае задача имеет аналитическое решение для стационарного (предельного) режима работы системы.

Очевидно, т.к.  $\lambda = 2$ , а  $\mu = 3$ , то  $\rho = \frac{2}{3}$  (доля времени, когда терминал занят),

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2 \text{ судна (среднее число судов в порту у терминала)}$$

$$L_q = L_s - \rho = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ судна (средняя длина очереди)}$$

$$T_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{2}{2} = 1 \text{ сутки (среднее время пребывания судна в порту)}$$

$$T_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3} \text{ суток, т. е. 16 часов (среднее время в очереди)}$$

$$\gamma = L_s = 2 \text{ (отношение времени ожидания в очереди к времени обслуживания)}$$

Пакет *AnyLogic* позволяет сравнивать аналитические решения с показателями функционирования моделируемой системы. Так на Рисунке 2 представлены результаты

по длине очереди и интенсивности нагрузки терминала. Как уже отмечалось «реальные» показатели функционирования асимптотически приближаются к расчетным величинам.

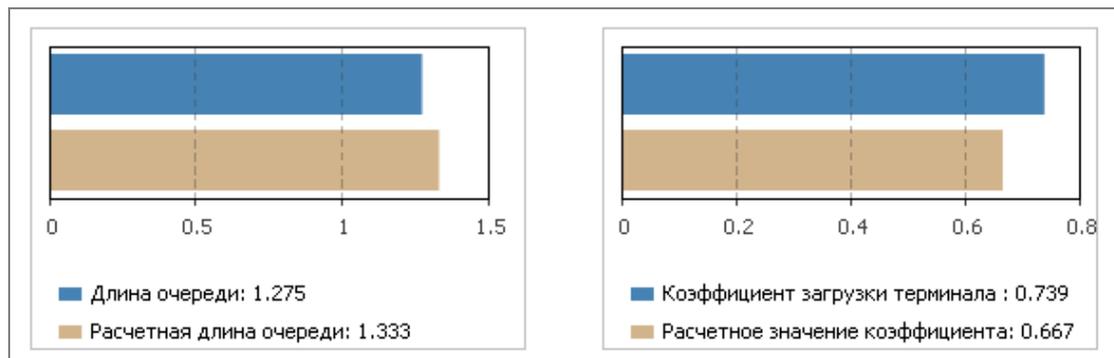


Рисунок 2. Сравнение аналитических и модельных характеристик.

Понятно, что текущие показатели могут варьироваться в достаточно широком диапазоне, отклоняясь от расчетных величин в ту или сторону. Для примера на Рисунке 3 представлен график изменения во времени числа заявок в очереди и у терминала.

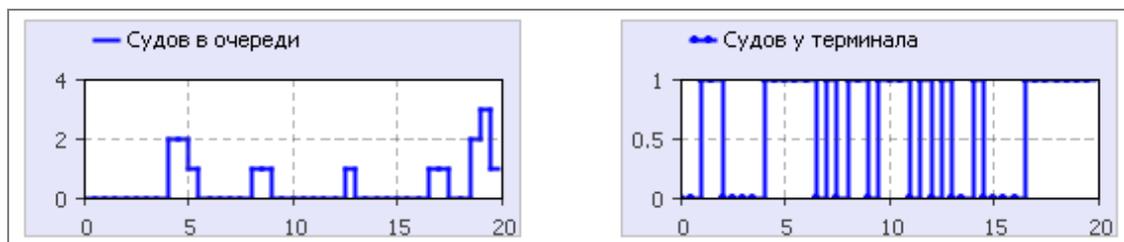


Рисунок 3. Показатели функционирования системы.

## 2. Оптимизация системы.

Параметром оптимизации является интенсивность нагрузки терминала, а целевой функцией — суммарные приведенные затраты по судам и терминалу.

Минимизация расходов по терминалу возможна при условии его полного использования (отсутствия свободных резервов), а это, в свою очередь, ведет к возрастанию простоев судов. С другой стороны, минимизация расходов по судам может быть обеспечена за счет увеличения пропускной способности терминала, однако это, очевидно, связано с дополнительными затратами по устройству и содержанию терминала

Затраты по судам могут быть найдены так:

$$f_s = \lambda(t_{zp} + t_{ожс} + t_T)Z_s = \lambda(t_{zp} + \gamma(\rho)t_{zp} + k_T t_{zp})Z_s = \lambda t_{zp} (1 + \gamma(\rho) + k_T)Z_s, \quad 1),$$

где  $t_{zp}, t_{ожс}, t_T$  — соответственно длительность грузовых операций, их ожидания и технических операций;

$Z_s$  — затраты по судну в сутки;

$k_T$  — коэффициент, учитывающий время на выполнение технических операций на судне.

Соответственно, затраты по терминалу:

$$f_T = k\rho Z_T^p(\Pi) + (1 - k\rho)Z_T^{np}(\Pi), \quad 2),$$

где  $k$  — коэффициент, учитывающий перерывы между сменами, различные технологии работы и т.д.;

$\Pi$  — пропускная способность терминала (т/сут.).

$Z_T^p, Z_T^{np}$  — затраты по терминалу за время работы и простоя в сутки, соответственно.

Сложив выражения (1) и (2) и разделив на планируемый грузооборот  $G = \rho\Pi$  получим суммарные приведенные затраты по судам и терминалу (УЕ/т):

$$f = \frac{k\rho Z_T^p + (1-k\rho)Z_T^{np} + \lambda t_{sp}(1+\gamma(\rho)+k_T)Z_s}{\Pi\rho} = \frac{kZ_T^p + \left(\frac{1}{\rho} - k\right)Z_T^{np} + (1+\gamma(\rho)+k_T)Z_s}{\Pi},$$

Таким образом в среде AnyLogic решается следующая экстремальная задача:

$$(D, f): f(\rho) = \frac{kZ_T^p(\Pi) + \left(\frac{1}{\rho} - k\right)Z_T^{np}(\Pi) + (1+\gamma(\rho)+k_T)Z_s}{\Pi} \rightarrow \min$$

$$D = \{\rho \in R_+^n : \rho < 1\}$$

На Рисунке 4 представлены графики затрат по судну, терминалу их сумма и приведенных затрат в зависимости от интенсивности нагрузки терминала.

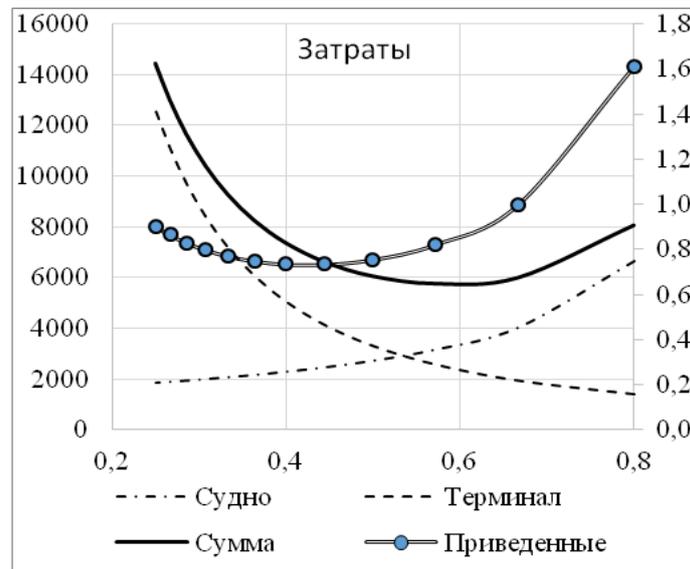


Рисунок 4. Зависимость затрат в системе от загрузки терминала.

Увеличение пропускной способности терминала ( $\Pi > G$ ) приводит к увеличению затрат по терминалу  $Z_T^p$  и  $Z_T^{np}$  и как следствие к уменьшению значения  $\gamma = \gamma(\rho)$ , а, следовательно, и затрат по судам.

На Рисунке 5 представлена принципиальная расчетная схема определения основных показателей функционирования системы.

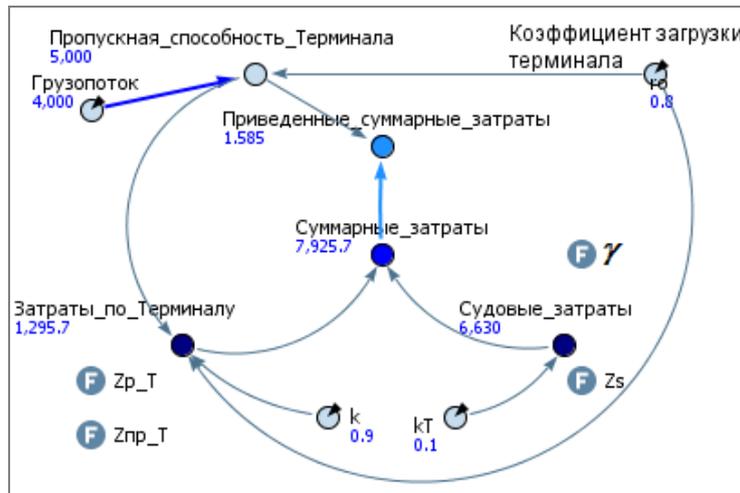


Рисунок 5. Расчетная схема.

Фрагмент результатов оптимизационного эксперимента, выполненного в среде AnyLogic, представлен на Рисунке 6. Видно, что приведенные суммарные затраты составляют 0.748 (УЕ/т), при этом интенсивность нагрузки терминала равна 0,44.

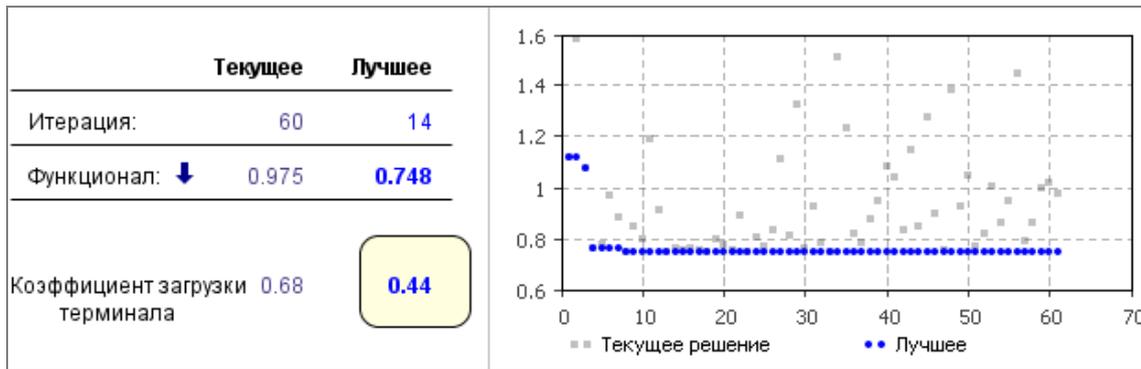


Рисунок 6. Результаты решения оптимизационной задачи.

Следует отметить, дополнением к процедуре решения оптимизационных задач в среде AnyLogic выступает надстройка, позволяющая проводить параметрический анализ решения. Это дает возможность проанализировать влияние того или иного параметра на целевую функцию, выявить качественные и количественные закономерности этого влияния. В качестве примера на Рисунке 7. представлены результаты работы процедуры параметрического эксперимента — выявлена зависимость целевой функции задачи от интенсивности нагрузки терминала.

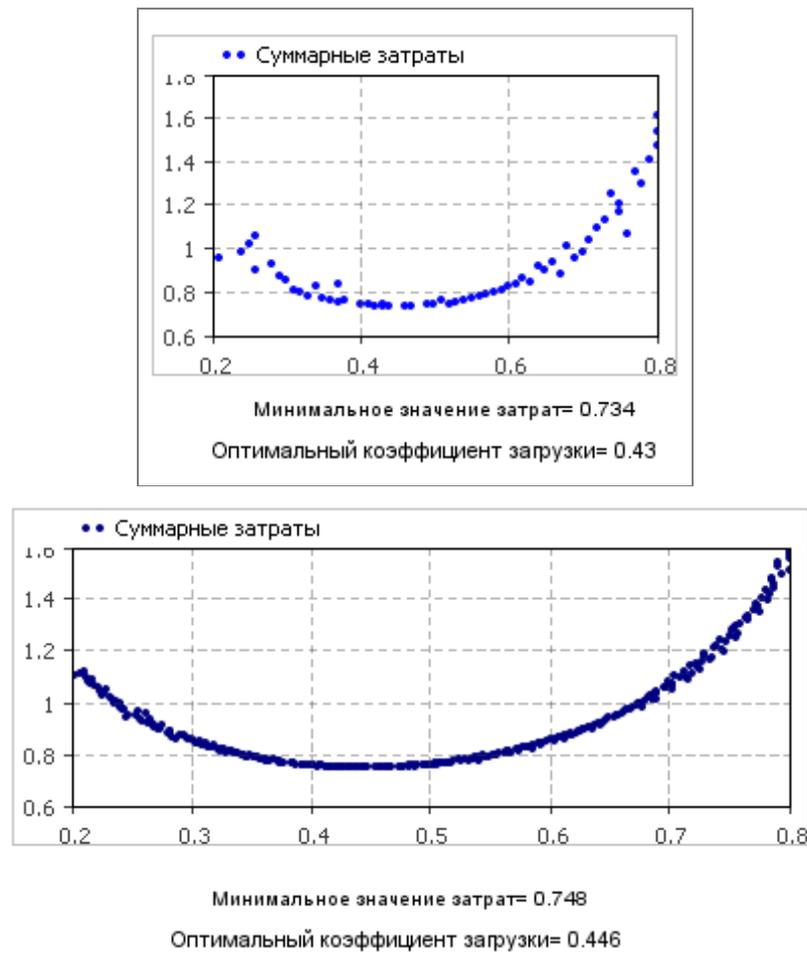


Рисунок 7. Результат параметрического эксперимента.

#### Анализ результатов

В результате исследования была сформулирована методология решения экстремальных задач по оптимизации одноканальных систем массового обслуживания с неограниченной очередью в среде пакета имитационного моделирования *AnyLogic*.

В качестве целевой функции предложена зависимость суммарных приведенных затрат, связанных с ожиданием в очереди и непосредственно с обслуживанием заявок в канале от приведенной интенсивности потока заявок (интенсивности нагрузки канала).

Практическая апробация разработанной методологии осуществлялась на примере оптимизации деятельности морского порта, содержащего специализированный терминал для обработки судов. Получены данные по оптимальному значению интенсивности загрузки терминала, которое обеспечивает минимум совокупных приведенных (к заданному грузопотоку (судопотоку)) затрат.

Дальнейшие исследования целесообразно продолжить применительно к многоканальным СМО, а также к системам с особыми условиями дисциплины очереди.

#### Список литературы:

1. Осипов Г. С. Одноканальные системы массового обслуживания с неограниченной очередью в *AnyLogic* // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2016. №8 (9). С. 92–95. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov> (дата обращения 25.08.2016). DOI: 10.5281/zenodo.60245.

2. Карпов Ю. Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с *AnyLogic 5*. СПб.: БХВ–Петербург, 2006. 400 с.

*References:*

1. Osipov G. Single-channel queuing system with unlimited queue in AnyLogic. Bulletin of Science and Practice. Electronic Journal, 2016, no. 8 (9), pp. 92–95. Available at: <http://www.bulletennauki.com/osipov>, accessed 15.08.2016. (In Russian). DOI: 10.5281/zenodo.60245.
2. Karpov Yu. G. Simulation systems. Introduction to modeling with AnyLogic 5. St. Petersburg: BHV–Petersburg, 2006. 400 p.

*Работа поступила  
в редакцию 15.08.2016 г.*

*Принята к публикации  
18.08.2016 г.*