УДК 539.3

А. А. Гриневич

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

МІЖФАЗНА ТРІЩИНА З ЗОНОЮ КОНТАКТУ В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ/П'ЄЗОМАГНІТНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Запропоновано точний аналітичний підхід до дослідження плоскої деформації п'єзоелектричного/п'єзомагнітного біматеріалу з електродованою та магнітно-проникною електрично зарядженою тріщиною, розташованою на межі розділу його компонент. На нескінченності задано поле нормальних та дотичних напружень, електричне й магнітне поля, паралельні до берегів тріщини. Розглянуто відкриту тріщину, зроблено припущення, що береги тріщини можуть контактувати на деякій ділянці невідомої довжини, що прилягає до однієї з вершин тріщини. Для моделі відкритої тріщини отримано задачу Гільберта. Її точний розв'язок подано в замкнутому вигляді. В умовах гладкого контакту берегів тріщини сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле – Рімана та задачу Гільберта, для яких виписано точні аналітичні розв'язки. Для обох випадків проведено числову ілюстрацію отриманих розв'язків для різних значень електричного поля на нескінченності. Доведено, що магнітне поле тріщини не впливає на електромеханічні характеристики в околі тріщини, і досліджено залежність цих характеристик від механічного навантаження та електричного поля.

Ключові слова: електрично заряджена міжфазна тріщина, п'єзоелектричний/п'єзомагнітний біматеріал, контактна зона.

Предложен точный аналитический подход к исследованию плоской деформации пьезоэлектрического/пьезомагнитного биматериала с электродированной и магнитно-проницаемой электрически заряженной трещиной, расположенной на границе раздела его компонент. На бесконечности задано поле нормальных и касательных напряжений, электрическое и магнитное поля, параллельные к берегам трещины. Рассмотрена открытая трещина, сделано предположение, что берега трещины могут контактировать на некотором участке неизвестной длины, что прилегает к одной из вершин трещины. Для модели открытой трещины получена задача Гильберта. Её точное решение представлено в замкнутом виде. В условиях гладкого контакта берегов трещины сформулирована комбинированная краевая задача Дирихле – Римана и задача Гильберта, для которых выписаны точные аналитические решения. Для обоих случаев проведена численная иллюстрация полученных решений для разных значений электрического поля на бесконечности. Доказано, что магнитное поле трещины не влияет на электромеханические характеристики в окрестности трещины, и исследовано зависимость этих характеристик от механического нагружения и электрического поля.

Ключевые слова: электрически заряженная межфазная трещина, пьезоэлектрический/пьезомагнитный биматериал, контактная зона.

Exact analytical approach for plane stain investigation of piezoelectric/piezomagnetic bimaterial with an electroded and magnetically permeable electrically conducting crack located at the interface between its components is proposed. It is assumed that a normal and shear stresses field, the electric and magnetic fields paralleled to the crack are given at infinity. First, an open crack is considered, and then it is assumed that the crack faces may be contacted at a certain section of unknown length, which is adjacent to one of the crack tip. For the model of open crack Hilbert problem has been derived. Its exact solution has been obtained in closed form. In the case where the crack faces with frictionless contact conditions the combined Dirichlet-Riemann boundary value problem and Hilbert problem have been formulated for which exact analytical solutions have been written out. For both cases a numerical illustration of the obtained solutions were done for different values of the electric field at infinity. It is proved that the magnetic field does not affect on the crack electromechanical characteristics, and the dependence of these parameters on the mechanical load and electric field were investigated.

Key words: electrically conducting interface crack, piezoelectric/piezomagnetic bimaterial, contact zone.

© А. А. Гриневич, 2015

Вступ. П'єзоелектричні/п'єзомагнітні матеріали з огляду на їх виключні властивості, такі як плоскочастотні характеристики та можливість перетворювати механічну, електричну та теплову енергії з одного стану на інший, широко використовують для виготовлення різних електромеханічних перетворювачів. Ці прилади зазвичай мають шарову структуру, тому під час їх експлуатації можливі інтерфейсні розшарування. Але наявність мікротріщин може суттєво вплинути на електромеханічні характеристики цих матеріалів, а іноді призвести і до їх руйнування. Основні положення механіки руйнування п'єзоелектричних матеріалів викладено у монографіях [1; 2; 7]. Електродовану тріщину в однорідному п'єзоелектричному матеріалі вивчали в [3], а тріщину з електропровідними берегами на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів розглядали в роботі [8]. При цьому слід відзначити, що в [3] об'єктом аналізу була тріщина, вільна від заряду, а у [8] враховували електричне навантаження, ортогональне до берегів тріщини, тому проблеми, пов'язані з можливим контактом берегів тріщини, не висвітлено. Також у праці [10] вивчали електрично та магнітно-проникну тріщину в п'єзоелектричному/п'єзомагнітному матеріалі.

У даній статті розглянуто електродовану електрично заряджену магнітно-проникну тріщину із зоною контакту на межі поділу двох п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів.

Загальний розв'язок основних рівнянь. У прямокутній системі координат x_j $(j=1,2,3)$ рівняння стану для пружного матеріалу, які враховують його п'єзоелектричні та п'єзомагнітні властивості, можуть бути записані так:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{lij}E_l - h_{lij}H_l, \\ D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \alpha_{il}E_l + d_{il}H_l, \\ B_i = h_{ikl}\gamma_{kl} + d_{il}E_l + \mu_{il}H_l, \end{cases} \tag{1}$$

де σ_{ij}, γ_{ij} – відповідно поля механічних напружень та деформації; D_i, B_i – поля електричної та магнітної індукцій; E_i, H_i – компоненти електричного й магнітного полів. Також c_{ijkl}, e_{ikl}, h_{ikl}, d_{il} – відповідно компоненти пружної, п'єзоелектричної, п'єзомагнітної та магнітоелектричної матриць; α_{il}, μ_{il} – діелектрична та магнітна проникність; i,j,k,l набувають значень $\{1,2,3\}$ і їх підсумовують за повторюваними індексами.

Рівняння рівноваги за відсутності в середовищі масових сил такі:

$$\sigma_{ij,i} = 0,\ D_{i,i} = 0,\ B_{i,i} = 0. \tag{2}$$

Вирази для деформації, електричного та магнітного полів мають вигляд

$$\gamma_{ij} = 0.5\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ E_i = -\varphi_{,i},\ H_i = -\psi_{,i}, \tag{3}$$

де u_i – компоненти механічного переміщення; φ, ψ – відповідно електричний і магнітний потенціали.

Із (1) – (3) отримуємо рівняння

$$\begin{cases} \left(c_{ijkl}u_k + e_{lij}\varphi + h_{lij}\psi\right)_{,li} = 0, \\ \left(e_{ikl}u_k - \alpha_{il}\varphi - d_{il}\psi\right)_{,li} = 0, \\ \left(h_{ikl}u_k - d_{il}\varphi - \mu_{il}\psi\right)_{,li} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де кома означає похідні за відповідними координатними змінними.

Уведемо вектори

$$\mathbf{V}=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ \varphi,\ \phi\}^T,\ \mathbf{t}=\{\sigma_{31},\ \sigma_{32},\ \sigma_{33},\ D_3,\ B_3\}^T. \tag{5}$$

Оскільки всі поля не залежать від координати x_2, то розв'язок рівнянь (4) відповідно до методу, запропонованого в [9] для анізотропного матеріалу, можна подати у вигляді

$$\mathbf{V}=\mathbf{af}(z), \tag{6}$$

де $z=x_1+px_3$, вектор $\mathbf{a}=[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5]^T$ знаходять із рівняння

$$\left[\mathbf{Q}+p\left(\mathbf{R}+\mathbf{R}^T\right)+p^2\mathbf{T}\right]\mathbf{a}=0, \tag{7}$$

а елементи матриць **Q**, **R** та **T** розмірності 5×5 визначають як

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1121} & c_{1131} & e_{111} & h_{111} \\ c_{1211} & c_{1221} & c_{1231} & e_{121} & h_{121} \\ c_{1311} & c_{1321} & c_{1331} & e_{131} & h_{131} \\ e_{111} & e_{121} & e_{131} & -\alpha_{11} & -d_{11} \\ h_{111} & h_{121} & h_{131} & -d_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} c_{1112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{211} & h_{211} \\ c_{1212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{221} & h_{221} \\ c_{1312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{231} & h_{231} \\ e_{112} & e_{122} & e_{132} & -\alpha_{12} & -d_{12} \\ h_{112} & h_{122} & h_{132} & -d_{12} & -\mu_{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} c_{2112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{212} & h_{212} \\ c_{2212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{222} & h_{222} \\ c_{2312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{232} & h_{232} \\ e_{212} & e_{222} & e_{232} & -\alpha_{22} & -d_{22} \\ h_{212} & h_{222} & h_{232} & -d_{22} & -\mu_{22} \end{bmatrix}.$$

Ненульовий розв'язок системи (7) існує, якщо p являє собою корінь рівняння

$$\det\left[\mathbf{Q}+p\left(\mathbf{R}+\mathbf{R}^T\right)+p^2\mathbf{T}\right]=0. \tag{8}$$

Оскільки рівняння (8) не має дійсних коренів [12], позначимо корені цього рівняння з додатною уявною частиною через p_α, а відповідні власні вектори (6) – через $\mathbf{a}_\alpha$ (нижній індекс α тут і далі набуває значень від 1 до 5). Загальний розв'язок рівнянь (4) може бути поданий у вигляді [12]

$$\mathbf{V}=\mathbf{Af}(z)+\overline{\mathbf{Af}}(\bar{z}), \tag{9}$$

де $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5]$ – матриця, складена з власних векторів системи (7), $\mathbf{f}(z)=[f_1(z_1),f_2(z_2),f_3(z_3),f_4(z_4),f_5(z_5)]^T$ – довільна аналітична вектор-функція, $z_\alpha=x_1+p_\alpha x_3$, а риска означає комплексно-спряжену величину.

Із використанням рівнянь (4) вектор **t**, уведений у (5), може бути поданий як

$$\mathbf{t}=\mathbf{Bf}'(z)+\overline{\mathbf{Bf}}'(\bar{z}), \tag{10}$$

де матрицю **B** розмірності 5×5 визначають як

$$\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4,\mathbf{b}_5],$$

$$\mathbf{b}_\alpha=\left(\mathbf{R}^T+p_\alpha\mathbf{T}\right)\mathbf{a}_\alpha \text{ (підсумування за } \alpha \text{ не проводять)},$$

$$\mathbf{f}'(z)=\left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1},\frac{df_2(z_2)}{dz_2},\frac{df_3(z_3)}{dz_3},\frac{df_4(z_4)}{dz_4},\frac{df_5(z_5)}{dz_5}\right]^T.$$

Далі, уводячи вектори $\mathbf{L}$ та $\mathbf{P}$ на основі (9) та (10), будуємо вирази

$$\mathbf{L}=\mathbf{M}\mathbf{f}'(z)+\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}),$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{N}\mathbf{f}'(z)+\bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}),$$

де матриці $\mathbf{M}$ та $\mathbf{N}$ знаходимо перетворенням матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ a_{3j}\\ b_{4j}\\ b_{5j}\end{bmatrix},\quad \mathbf{N}=\begin{bmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ b_{3j}\\ -a_{4j}\\ -a_{5j}\end{bmatrix}.$$

У результаті аналізу за аналогією до [11] отримуємо

$$\langle \mathbf{L}(x_1)\rangle=\mathbf{W}^+(x_1)-\mathbf{W}^-(x_1), \tag{11}$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1)-\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1), \tag{12}$$

де $\mathbf{S}=\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D}=\mathbf{M}^{(1)}-\bar{\mathbf{M}}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{N}}^{(2)}\right)^{-1}\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{L}=\left[u_1',u_2',u_3',D_3,B_3\right]^T$,

$\mathbf{P}=\left[\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},E_1,H_1\right]^T$.

Постановка задачі та формулювання умов на інтерфейсі для відкритої тріщини та тріщини з контактною зоною. Розглянуто плоску деформацію біматеріалу, складеного з півпросторів $x_3>0$ та $x_3<0$, поляризованих за напрямком осі x_3 і зчеплених на інтерфейсі $x_3=0$. На відрізку $x_1\in(c,b)$ інтерфейсу розташована електродована тріщина (рис. 1), яку вважають електропровідною, тобто на її берегах $E_1^{(1)}(x_1,0)=E_1^{(2)}(x_1,0)=0$. Припускаємо також, що тріщина магнітно-проникна:

$$H_1^{(1)}(x_1,0)=H_1^{(2)}(x_1,0),\ B_3^{(1)}(x_1,0)=B_3^{(2)}(x_1,0)\ \text{для}\ x_1\in(-\infty,\infty), \tag{13}$$

де H_i, B_i – відповідно поля магнітного напруження та магнітної індукції. Крім того, на тріщині задано сумарний електричний заряд величини D_0, а на нескінченності – електричний та магнітний потоки

$$\sigma_{13}^{\infty}=\tau^{\infty},\ \sigma_{33}^{\infty}=\sigma^{\infty},\ E_1^{\infty}=e^{\infty},\ H_1^{\infty}=h^{\infty}. \tag{14}$$

Крім (13), інші умови на інтерфейсі для відкритої тріщини $x_1\in(c,b)$ (рис. 1 за *a=b*) набувають вигляду

$$\sigma_{i3}^{(1)}(x_1,0)=\sigma_{i3}^{(2)}(x_1,0),\ E_1^{(1)}(x_1,0)=E_1^{(2)}(x_1,0)\quad \text{для}\ x_1\in L, \tag{15}$$

$$D_3^{(1)}(x_1,0)=D_3^{(2)}(x_1,0),\ u_i'^{(1)}(x_1,0)=u_i'^{(2)}(x_1,0)\quad \text{для}\ x_1\in L, \tag{16}$$

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1,0)=0,\ E_1^{(m)}(x_1,0)=0\quad \text{для}\ x_1\in(c,b), \tag{17}$$

де $m=1,2$, u_i, E_i, σ_{ij}, D_i – відповідно поля переміщень, електричного напруження, механічних напружень та електричної індукції, $i,j=\overline{1,3}$, $L=(-\infty,\infty)\setminus(c,b)$.

Розглядаючи другий випадок тріщини з контактною зоною (рис. 1), припускаємо, що відрізок $x_1\in[c,a]=L_1$ вільний від напруження, а в зоні $x_1\in(a,b)=L_2$ береги тріщини є в умовах безфрикційного контакту. В результаті умови на інтерфейсі разом із (13), (15) та (16) мають вигляд

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1,0)=0,\ E_1^{(m)}(x_1,0)=0 \text{ для } x_1\in L_1, \tag{18}$$

$$\langle u_3(x_1)\rangle=0,\ \sigma_{13}^{(m)}(x_1,0)=0,\ E_1^{(m)}(x_1,0)=0,\ \langle\sigma_{33}(x_1)\rangle=0 \text{ для } x_1\in L_2, \tag{19}$$

де $m=1,2$, u_i, E_i, σ_{ij} – відповідно поля переміщень, електричного напруження та механічних напружень, $i,j=\overline{1,3}$, $L=(-\infty,\infty)\setminus L_1\cup L_2$.

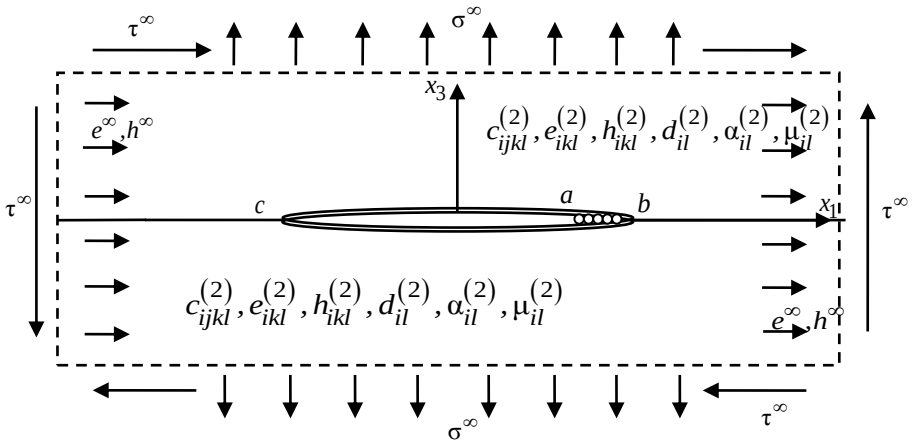


Рис. 1. Електродована тріщина з контактною зоною в біматеріалі

Враховуючи, що за $x_1\to\infty$ $\mathbf{W}^+(x_1)=\mathbf{W}^-(x_1)=\mathbf{W}(x_1)$, отримуємо за $x_1\to\infty$ з (14) $\mathbf{P}^\infty=(\mathbf{S}-\bar{\mathbf{S}})\mathbf{W}^\infty$, де $\mathbf{P}^\infty=\left[\tau^\infty,0,\sigma^\infty,e^\infty,h^\infty\right]$.

Звідси $\mathbf{W}^\infty=(\mathbf{S}-\bar{\mathbf{S}})^{-1}\mathbf{P}^\infty$, тобто

$$W_5^\infty=\left\{(\mathbf{S}-\bar{\mathbf{S}})^{-1}\mathbf{P}^\infty\right\}_5.$$

Але, з огляду на умови (13), із (11) випливає $W_5^+(x_1)-W_5^-(x_1)=0$ для $|x_1|<\infty$. Це означає, що $W_5(z)$ аналітична у всій площині, і тому $W_5(z)\equiv W_5^\infty(x_1)$ для будь-якого z. Тоді, залишаючи в (11), (12) тільки 1-й, 3-й та 4-й рядки, отримуємо

$$\langle\mathbf{L}(x_1)\rangle=\mathbf{W}^+(x_1)-\mathbf{W}^-(x_1),$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1,0)=\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1)-\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1)+\mathbf{Q},$$

де $\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix} s_{15}-\bar{s}_{15} \\ s_{35}-\bar{s}_{35} \\ s_{45}-\bar{s}_{45} \end{Bmatrix} W_5^{\infty}$ – трикомпонентний вектор.

За результатами аналізу, аналогічного [11], отримуємо

$$ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+ir_{j4}E_1^{(1)}(x_1,0)=F_j^{+}(x_1)+\gamma_j F_j^{-}(x_1)+\theta_j, \qquad (20)$$

$$t_{j1}\langle u_1'(x_1)\rangle+it_{j3}\langle u_3'(x_1)\rangle+t_{j4}\langle D_3(x_1)\rangle=F_j^{+}(x_1)-F_j^{-}(x_1), \qquad (21)$$

де $\theta_j=ir_{j1}Q_1+r_{j3}Q_3+ir_{j4}Q_4$; r_{ij} та t_{ij} $(i,j=1,3,4)$ – компоненти відомих матриць, а γ_j константи, які визначаються фізичними характеристиками матеріалів, причому $r_{13}=r_{33}=r_{44}=1$ та $r_{43}=0$; $F_j(z)$ – функції, аналітичні у всій площині за винятком області тріщини.

Розв'язання задачі для відкритої тріщини. Задовольняючи за допомогою виразу (20) граничні умови (17), приходимо до таких задач лінійного спряження:

$$F_1^{+}(x_1)+\gamma_1 F_1^{-}(x_1)=-\theta_1 \quad \text{для } x_1\in(c,b), \qquad (22)$$

$$F_4^{+}(x_1)+F_4^{-}(x_1)=-\theta_4 \quad \text{для } x_1\in(c,b). \qquad (23)$$

Застосувавши задані граничні умови на нескінченності (14), запишемо

$$F_j(z)\big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j-\frac{\theta_j}{1+\gamma_j}, \qquad (24)$$

де $\tilde{\sigma}_j=\dfrac{r_{j3}\sigma^{\infty}}{\vartheta_j}$, $\tilde{\tau}_j=-\dfrac{1}{\vartheta_j}\left(r_{j1}\tau^{\infty}+r_{j4}e^{\infty}\right)$, $(j=1,3,4)$, $\vartheta_k=1+\gamma_k$, $(k=1,3)$, $\vartheta_4=2$.

Для розв'язання задач (22), (24) та (23), (24) уводимо заміну

$$F_1(z)=\Phi_1(z)-\frac{\theta_1}{1+\gamma_1}, \quad F_4(z)=\Phi_4(z)-\frac{\theta_4}{2}, \qquad (25)$$

тоді отримуємо однорідні задачі

$$\Phi_1^{+}(x_1)+\gamma_1\Phi_1^{-}(x_1)=0 \quad \text{для } x_1\in(c,b),$$

$$\Phi_4^{+}(x_1)+\Phi_4^{-}(x_1)=0 \quad \text{для } x_1\in(c,b)$$

за таких умов на нескінченності:

$$\Phi_j(z)\big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j, \quad j=1,3,4.$$

Розв'язки останніх задач очевидні [5] та мають вигляд

$$\Phi_1(z)=\frac{c_{01}+c_{11}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_1},$$

$$\Phi_4(z)=\frac{c_{04}+c_{14}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}.$$

Переходячи до $F_j(z)$ за допомогою (25), матимемо

$$F_1(z)=\frac{c_{01}+c_{11}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_1}-\frac{\theta_1}{1+\gamma_1}, \qquad (26)$$

$$F_4(z)=\frac{c_{04}+c_{14}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}-\frac{\theta_4}{2}. \tag{27}$$

Довільні константи $c_{01},c_{11},c_{04},c_{14}$ знаходять на основі умов на нескінченності (24), однозначності переміщень і теореми Гаусса. Розглядаючи розв'язки (26) і (27) разом із формулами (20) та (21), отримуємо вирази для електромеханічних факторів і для $x_1>b$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=(1+\gamma_1)\mathrm{Re}\{F_1(x_1)\}.$$

З останньої формули зрозуміло, що магнітний потік впливає на $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$ через доданок θ_1, але він не вносить сингулярних доданків у це напруження.

Розв'язання задачі для тріщини з контактною зоною. Задовольняючи за допомогою виразів (20), (21) граничні умови (18), (19), приходимо до такої комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана:

$$F_1^+(x_1)+\gamma_1F_1^-(x_1)=-\theta_1 \quad \text{для } x_1\in L_1, \tag{28}$$

$$\mathrm{Im}F_1^{\pm}(x_1)=0 \quad \text{для } x_1\in L_2 \tag{29}$$

і задачі Гільберта

$$F_4^+(x_1)+F_4^-(x_1)=-\theta_4 \quad \text{для } x_1\in L_1\cup L_2 \tag{30}$$

з умовами на нескінченності

$$F_j(z)\Big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j-\frac{\theta_j}{1+\gamma_j}, \tag{31}$$

де $\tilde{\sigma}_j=\dfrac{r_{j3}\sigma^{\infty}}{\vartheta_j}$, $\tilde{\tau}_j=-\dfrac{1}{\vartheta_j}\left(r_{j1}\tau^{\infty}+r_{j4}e^{\infty}\right)$, $(j=1,3,4)$, $\vartheta_k=1+\gamma_k$, $(k=1,3)$, $\vartheta_4=2$.

Для розв'язання задач (28), (29), (31) та (30), (31) уводимо заміну, аналогічну (25), і тоді отримуємо однорідні задачі Діріхле – Рімана та Гільберта, а також умови на нескінченності без доданка з θ_j. Розв'язки отриманих задач знайдено за аналогією до [4; 6] і мають вигляд

$$F_1(z)=P(z)X_1(z)+Q(z)X_2(z)-\frac{\theta_1}{1+\gamma_1}, \tag{32}$$

$$F_4(z)=\frac{ih_4}{2}\left(z-\frac{c+b}{2}+\frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{1}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}-\frac{\theta_4}{2}, \tag{33}$$

де $P(z)$, $Q(z)$ – багаточлени 1-го порядку з дійсними коефіцієнтами, $h_4=r_{41}\tau^{\infty}+r_{44}e^{\infty}$.

Розглянувши розв'язки (32) та (33) і формули (20) та (21), отримаємо вирази для напружень і стрибка переміщень:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\frac{1}{r_{13}}\left[\frac{\vartheta_1Q(x_1)\cos\varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}-\frac{\vartheta_1P(x_1)\sin\varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}}\right] \quad \text{для } x_1>b,$$

$$\langle u_3(x_1)\rangle=\frac{2\sqrt{\alpha}}{t_{13}}\int_c^{x_1}\left[\frac{P(x_1)\sin\varphi^*(x_1)}{\sqrt{(b-x_1)(x_1-c)}}-\frac{Q(x_1)\cos\varphi^*(x_1)}{\sqrt{(a-x_1)(x_1-c)}}\right]dx_1 \quad \text{для } x_1\in L_1.$$

Положення точки a, що визначає величину зони контакту, знайдемо з нерівностей

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)\le 0 \text{ для } x_1\in L_2, \quad \langle u_3(x_1)\rangle \ge 0 \text{ для } x_1\in L_1, \tag{34}$$

виконання яких приводить до такого трансцендентного рівняння відносно λ:

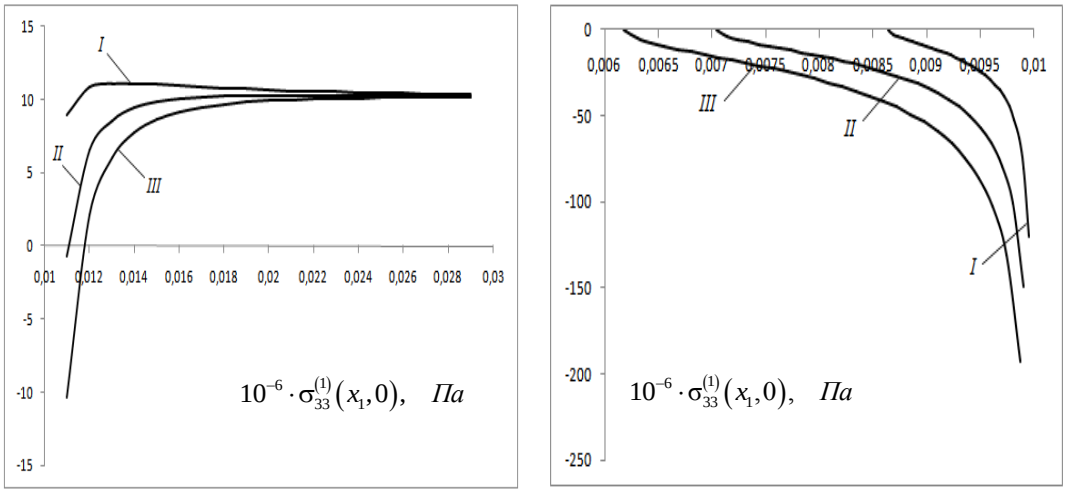
$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sigma^{\infty}\sqrt{1-\lambda}+2\varepsilon h_1}{2\varepsilon\sigma^{\infty}-h_1\sqrt{1-\lambda}-s(\lambda)}, \tag{35}$$

де $s(\lambda)=\dfrac{t_{14}D_0(1+\gamma_1)}{\pi\sqrt{(a-c)(b-c)}}$, $\lambda=\dfrac{b-a}{b-c}$, $h_1=r_{11}\tau^{\infty}+r_{14}e^{\infty}$.

Вибір максимального кореня рівняння (35) з інтервалу $(0,1)$ забезпечує виконання обох нерівностей (34) за винятком дуже малої зони осциляції біля лівої вершини тріщини, якою знехтуємо. Розв'язок рівняння (35) можна знайти шляхом обчислення. Якщо ж λ мале порівняно з 1, то можна застосувати асимптотичну формулу, що випливає із (35) за $\sqrt{1-\lambda}\approx 1$.

Візуалізація результатів. Як матеріали виберемо Vf-5 (верхній матеріал) та Vf-1 (нижній). Для розрахунків використаємо $c=-0.01$ *м*, $b=0.01$ *м*, $\sigma^{\infty}=10^7$ *Па*, $\tau^{\infty}=0$ *Па*, $D_0=0.0003$ *Кл/м*, а величина e^{∞} варіюється.

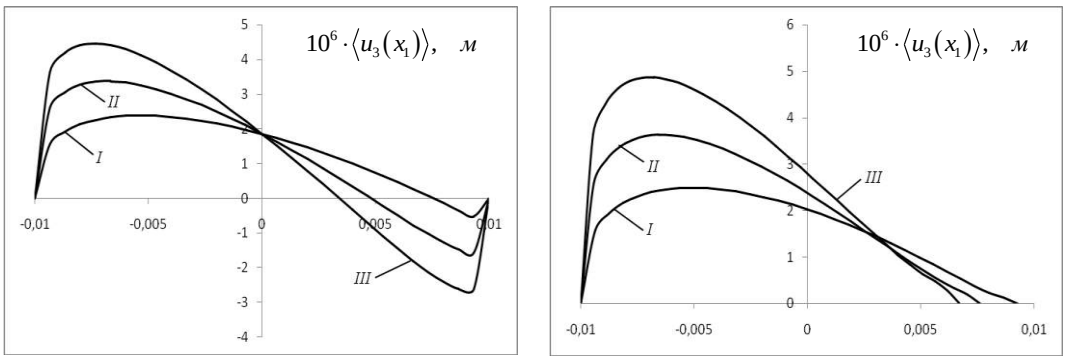
На рис. 2 для різних e^{∞} зображено графіки зміни нормального напруження для відкритої тріщини на її продовженні та в зоні контакту берегів тріщини для контактної моделі (*I* – $e^{\infty}=0.5\cdot 10^7$ *В/м*, *II* – $e^{\infty}=1\cdot 10^7$ *В/м*, $e^{\infty}=1.5\cdot 10^7$ *В/м*), а на рис. 3 – відповідні графіки зміни стрибка нормального переміщення в її відкритій частині (*I* – $e^{\infty}=0.5\cdot 10^7$ *В/м*, *II* – $e^{\infty}=1\cdot 10^7$ *В/м*, $e^{\infty}=1.5\cdot 10^7$ *В/м*).



а *б*

Рис. 2. Розподіл $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$ за $\sigma^{\infty}=10^7$ *Па*, $D_0=0.0003$ *Кл/м*:

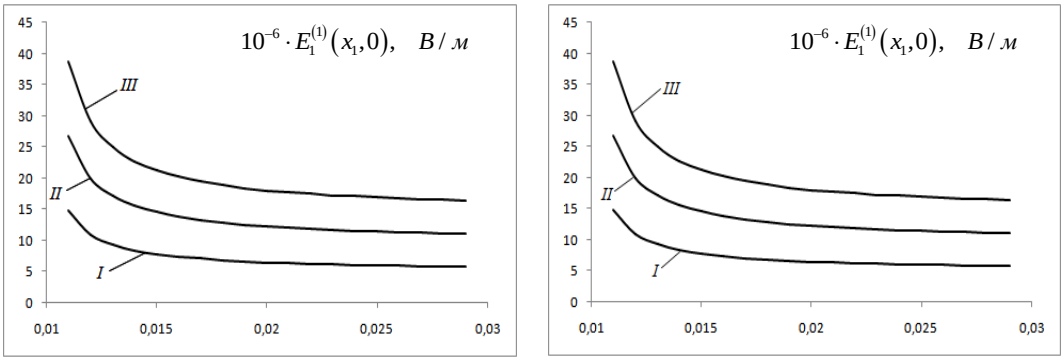
а – для відкритої тріщини на її продовженні; *б* – для тріщини з контактною зоною



а *б*

Рис. 3. Розподіл $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$ уздовж тріщини за $\sigma^\infty = 10^7$ *Па*, $D_0 = 0.0003$ *Кл/м*:

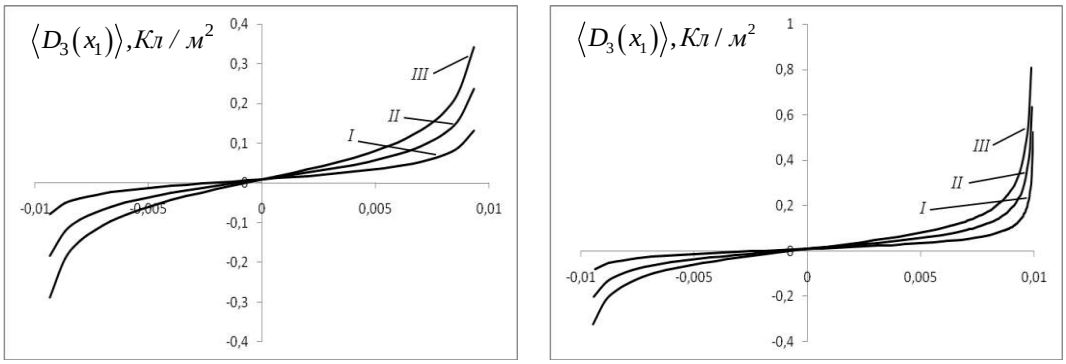
а – для відкритої тріщини; *б* – для тріщини з контактною зоною



а *б*

Рис. 4. Розподіл $E_1^{(1)}(x_1, 0)$ на продовженні тріщини за $\sigma^\infty = 10^7$ *Па*, $D_0 = 0.0003$ *Кл/м*:

а – для відкритої тріщини; *б* – для тріщини з контактною зоною



а *б*

Рис. 5. Розподіл $\langle D_3(x_1) \rangle$ уздовж тріщини за $\sigma^\infty = 10^7$ *Па*, $D_0 = 0.0003$ *Кл/м*:

а – для відкритої тріщини; *б* – для тріщини з контактною зоною

На рис. 4 для різних значень e^{∞} наведено графіки зміни електричного поля на продовженні тріщини (I – $e^{\infty} = 0.5 \cdot 10^7$ *В/м*, II – $e^{\infty} = 1 \cdot 10^7$ *В/м*, $e^{\infty} = 1.5 \cdot 10^7$ *В/м*). На рис. 5 – відповідні графіки зміни стрибка $\langle D_3(x_1) \rangle$ уздовж області тріщини (I – $e^{\infty} = 0.5 \cdot 10^7$ *В/м*, II – $e^{\infty} = 1 \cdot 10^7$ *В/м*, $e^{\infty} = 1.5 \cdot 10^7$ *В/м*).

Висновки. За результатами аналізу та візуалізацією даних визначено, що як віддалене електричне поле, так і сумарний заряд тріщини суттєво впливають на довжину зони контакту (a,b) та електромеханічні характеристики в околі тріщини, а вплив магнітного потоку на вказані характеристики не вносить у них додаткових сингулярних складових. При цьому вказані фактори можуть призвести до виникнення значних областей контакту берегів тріщини навіть за відсутності полів зовнішніх зсувних напружень.

Бібліографічні посилання

1. **Гринченко, В. Т.** Механика связанных полей в элементах конструкций [Текст]: в 5 т. / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – Т. 5.: Электроупругость. – 280 с.
2. **Калоеров, С. А.** Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей [Текст] / С. А. Калоеров, А. И. Баева , О. И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
3. **Кныш, П. Ю.** Аналитическое и численное исследование электродированой трещины в пьезоэлектрическом материале [Текст] / П. Ю. Кныш, В. В. Лобода // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка, 2012. – С. 1 – 15.
4. **Лобода, В. В.** О межфазной трещине с учетом контакта ее берегов [Текст] / В. В. Лобода // Гидроаэромеханика и теория упругости. – 1991. – № 21. – С. 78–86.
5. **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. **Нахмейн, Е. Л.** Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом [Текст] / Е. Л. Нахмейн, Б. М. Нуллер // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, вып. 4. – С. 663–673.
7. **Партон, В. З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел [Текст] / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
8. **Beom, H. G.** Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media [Text] / H. G. Beom, S. N. Atluri // Intern. J. of Fracture. – 2002. – Vol. 118. – P. 285–301.
9. **Eshelby, J. D.** Anisotropic elasticity with application to dislocation theory [Text] / J. D. Eshelby, W. T. Read, W. Shockley // Acta Metall. – 1953. – Vol.1.– P. 251–259.
10. **Herrmann, K. P.** An interface crack with contact zones in a piezoelectric/ piezomagnetic bimaterial [Text] / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, T. V. Khodanen // Arch. Appl. Mech. – 2010. – Vol. 80. – P. 651–670.
11. **Loboda, V.** An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial [Text] / V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta // Intern. J. of Solids and Structures. – 2014. – Vol. 51. – P. 63–73.
12. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics [Text] / Z. Suo, C.-M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – Vol. 40.– P. 739 – 765.

Надійшла до редколегії 20.05.2015