2. **Беляев, Н.Н.** К расчету вертикального отстойника на базе CFD модели [Текст] / Н.Н. Беляев, Е.К. Нагорная // Вісн. Нац. ун-ту водного господарства та природокористування. – 2012. – №1 (57). – С. 32-41.

3. **Василенко, О.А.** Водовідведення та очистка стічних вод міста. Курсове і дипломне проектування. Приклади та розрахунки: навчальний посібник [Текст] / О.А. Василенко, С.М. Епоян. – К. – Х. – КНУБА, ХНУБА, ТО «Ексклюзив», 2012. – 540 с.

4. **Ласков, Ю.М.** Примеры расчетов канализационных сооружений: учеб. пособие для вузов [Текст] / Ю.М. Ласков, Ю.В. Воронов, В.И. Калицун. – М.: Высш. школа, 1981. – 232 с.

5. **Лойцянский, Л. Г.** Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 735 с.

6. **Марчук, Г. И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды [Текст] / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1982. – 320 с.

7. Пат. № 2438992 RU, МПК B01D 21/00. Горизонтальный отстойник [Текст] / О.С. Кочетов, М.О. Стареева. Опубл. 10.01.2012, бюл. №1.

8. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде [Текст] / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К.: Наук. думка, 1997. – 368 с.

Надійшла до редколегії 10.06.2015

УДК 539.3

И. Ю. Гергель

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЯ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПОВРЕЖДЕННОМ КОНТАКТЕ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрена задача устойчивости биматериального тела, находящегося в условиях плоской деформации, когда на линии раздела материалов существует трещина. В слоистых композитных материалах такие дефекты часто возникают как из-за особенностей технологического процесса, который сопровождается возникновением и развитием остаточных напряжений на границах слоев, так и вследствие действия эксплутационных нагрузок. К композиту, состоящему из ортотропного слоя и ортотропного полупространства, приложена сжимающая загрузка паралельно свободной поверхности. Задача устойчивости рассмотрена в точной постановке в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел. За потерю устойчивости биматериального тела принята потеря устойчивости состояния равновесия материала возле межфазной трещины. С помощью метода интегральных преобразований Фурье проблема сведена к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядрами типа Коши. Из условия существования ненулевого решения этой системы численным методом найдена критическая нагрузка, приводящая к потери устойчивости. Получены зависимости критической нагрузки от геометрических и физических параметров элементов биматериального тела.

Ключевые слова: устойчивость, межфазная трещина, сингулярные интегральные уравнения, интегральные преобразования Фурье, квадратурная формула.

Розв'язано задачу стійкості біматеріального тіла в умовах плоскої деформації, коли на лінії розподілу матеріалів є тріщина. У шаруватих композиційних матеріалах такі дефекти часто неминучі як через особливість технологічного процесу, що супроводжується виникненням і розвитком залишкових напружень на межах шарів, так і через вплив експлуатаційних навантажень. На композит, який складається з ортотропного шару та ортотропного півпростору, діє стискальне навантаження паралельно вільної поверхні. Задачу стійкості

© И.Ю. Гергель, 2015

розглянуто в точній постановці в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл. За втрату стійкості біматеріального тіла взято втрату стійкості стану рівноваги матеріалу біля міжфазної тріщини. За допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є проблему зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь другого роду з ядрами типу Коші. За умови існування ненульового розв'язку цієї системи числовим методом визначено критичне навантаження, що призводить до втрати стійкості. Отримано залежності критичного навантаження від геометричних і фізичних параметрів складників біматеріального тіла.

Ключові слова: стійкість, міжфазна тріщина, сингулярні інтегральні рівняння, інтегральне перетворення Фур'є, квадратурна формула.

An analytical solution is presented for local buckling of a model of delaminated composites, that is, a layer bonded to a half-space with interface crack. The layered system is subjected to compressive load parallel to the free surface. Composite structures in some cases can work under the action of compressive load. Interface in such structures appearing because of manufacturing processes can be the reason of significant reduction of the load-carrying capacity under compressive loads. The presence of interface cracks in such cases may lead to fracture of structures by means of crack opening. The buckling state may occur at relatively small compressive loads due to some sufficiently large embedded delamination. Basic stability equations derived from the mathematical theory from the mathematic theory of elasticity are employed to study this local buckling behavior. A system of Cauchy-type singular integral equations of the second kind is formulated by means of the Fourier integral transform and is solved numerically by utilizing Gauss-Chebyshev quadrature formulae. Numerical results for the buckling load is presented for various delamination geometries and materials properties of both the layer and half-space.

Key words: layered composites, stability, singular integral equations, integral Fourier transform, quadrature formula.

Введение. Одним из наиболее интересных явлений в механике разрушения композитных материалов является разрушение при сжатии, когда основной механизм разрушения есть потеря устойчивости в структуре материала. В данной работе изложены результаты, полученные на основе трехмерной линеаризированной теории устойчивости [1] деформируемых тел, задачи устойчивости композита с межфазной трещиной. Рассмотрено сжатие вдоль трещины композитного материала, и за потерю устойчивости принята потеря устойчивости состояния равновесия материала возле трещины.

Физическая постановка задачи. Рассмотрим потерю устойчивости упругого биматериального тела, зажатого между двумя абсолютно жесткими гладкими плитами. Сечение тела в плоскости $x0y$ представляет собой слой $|x|\leq\infty$, $0\leq y\leq h$, сцепленный с полупространством по всей линии раздела материала, за исключением области межфазной трещины $|x|\leq 2a$, $y=0$ (рис. 1).

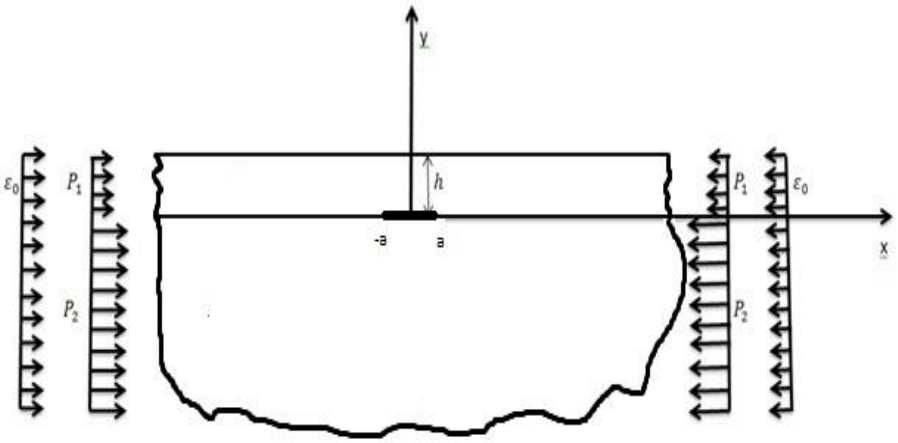

Рис. 1. Биматериальное тело с межфазной трещиной

Декартова система координат $0xyz$ введена таким образом, что начало системы координат совпадает с серединой трещины, ось x направлена вдоль берегов трещины, а ось y – перпендикулярно им.

Предполагается, что имеет место плоская деформация в плоскости, перпендикулярной оси z. Конструкция подвержена внешней сжимающей нагрузке, параллельной свободной поверхности и приводящей к однородной деформации ε_0. Увеличиваясь, сжимающая нагрузка достигает некоторого критического значения, при котором материал возле трещины теряет устойчивость. Это возможное дополнительное равновесное состояние, характеризуемое тем, что к начальному однородному состоянию добавляются бесконечно малые приращения напряжений $\sigma_{kj}^{(i)}$, перемещений $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ и деформаций $\varepsilon_{kj}^{(i)}$, (i=1,2), ($k,j=x,y$). Здесь и далее индекс i=1 соответствует характеристикам слоя, индекс i=2 – полупространства. Материал слоя и полупространства ортотропный, заданы их механические характеристики: модули Юнга $E_1^{(i)}$ и $E_2^{(i)}$, коэффициенты Пуассона $\nu_{12}^{(i)}$ и $\nu_{21}^{(i)}$, модули сдвига $G_{12}^{(i)}$.

Математическая постановка задачи. Уравнения равновесия возмущенного состояния при отсутствии массовых сил могут быть представлены в виде

$$c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\sigma_{xx}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

$$c_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sigma_{xx}^0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \qquad (1)$$

где

$$P_i=\frac{E_1^{(i)}}{1-\left(\nu_{21}^{(i)}\right)^2}\varepsilon_0. \qquad (2)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1) получено с помощью интегрального преобразования Фурье [4] и имеет следующий вид:

$$u^{(i)}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^2(A_i\alpha_{i1}e^{t\alpha_{i1}y}+B_i\alpha_{i2}e^{t\alpha_{i2}y}-C_i\alpha_{i1}e^{-t\alpha_{i1}y}-D_i\alpha_{i2}e^{-t\alpha_{i2}y})\sin txdt,$$

$$v^{(i)}(x,y)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^2(A_i\beta_{i1}e^{t\alpha_{i1}y}+B_i\beta_{i2}e^{t\alpha_{i2}y}+C_i\beta_{i1}e^{-t\alpha_{i1}y}+D_i\beta_{i2}e^{-t\alpha_{i2}y})\cos txdt,$$

(i=1,2). (3)

Согласно закону Гука для ортотропного материала

$$\sigma_{xx}=c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\sigma_{yy} = c_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\sigma_{xy} = c_{66}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right],$$

где $c_{11} = \dfrac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$, $c_{12} = \dfrac{E_1\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \dfrac{E_2\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$, $c_{22} = \dfrac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$, $c_{66} = G_{12}$,

возмущения напряжений будут иметь вид

$$\sigma_{yy}^{(i)}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^3(A_i\gamma_{i1}e^{t\alpha_{i1}y} + B_i\gamma_{i2}e^{t\alpha_{i2}y} - C_i\gamma_{i1}e^{-t\alpha_{i1}y} - D_i\gamma_{i2}e^{-t\alpha_{i2}y})\cos tx\, dt$$

$$\sigma_{xy}^{(i)}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^3(A_i\delta_{i1}e^{t\alpha_{i1}y} + B_i\delta_{i2}e^{t\alpha_{i2}y} + C_i\delta_{i1}e^{-t\alpha_{i1}y} + D_i\delta_{i2}e^{-t\alpha_{i2}y})\sin tx\, dt$$

(i=1,2). (5)

В формулах (3) и(5) приняты следующие обозначения:

$$\alpha_{i1}^2 = \frac{b_i + \sqrt{b_i^2 - 4a_ic_i}}{2a_i}, \qquad \alpha_{i1}^2 = \frac{b_i - \sqrt{b_i^2 - 4a_ic_i}}{2a_i},$$

$$\beta_{i1} = \frac{c_{11}^{(i)} - P_i - c_{66}^{(i)}\alpha_{i1}^2}{c_{11}^{(i)} + c_{66}^{(i)}}, \qquad \beta_{i1} = \frac{c_{11}^{(i)} - P_i - c_{66}^{(i)}\alpha_{i2}^2}{c_{12}^{(i)} + c_{66}^{(i)}},$$

$$\gamma_{i1} = c_{12}^{(i)}\alpha_{i1} - c_{22}^{(i)}\beta_{i1}, \qquad \gamma_{i2} = c_{12}^{(i)}\alpha_{i2} - c_{22}^{(i)}\beta_{i2},$$

$$\delta_{i1} = c_{66}^{(i)}\left(\alpha_{i1}^2 + \beta_{i1}\right), \qquad \delta_{i2} = c_{66}^{(i)}\left(\alpha_{i2}^2 + \beta_{i2}\right),$$

$$\alpha_i = \frac{c_{22}^{(i)}\, c_{66}^{(i)}}{c_{12}^{(i)} + c_{66}^{(i)}}, \qquad c_i = \left(c_{66}^{(i)} - P_i\right)\frac{c_{11}^{(i)} - P_i}{c_{12}^{(i)} + c_{66}^{(i)}},$$

$$b_i = \frac{c_{11}^{(i)}\, c_{22}^{(i)} - c_{12}^{(i)}\, c_{66}^{(i)} - P_i\left(c_{22}^{(i)} + c_{66}^{(i)}\right)}{c_{12}^{(i)} + c_{66}^{(i)}} - c_{12}^{(i)}. \tag{6}$$

и A_i, B_i, (i=1,2), C_1, D_1, C_2=D_2=0 – 6 неизвестных функций параметра t. Они могут быть определены из следующих граничных условий:

$$\begin{gathered}
\sigma_{yy}^{(1)}(x,h) = 0, \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x,h) = 0, \quad |x| < \infty, \\
\sigma_{yy}^{(1)}(x,0) = \sigma_{yy}^{(2)}(x,0), \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x,0) = \sigma_{xy}^{(2)}(x,0), \quad |x| < \infty, \\
\sigma_{yy}^{(1)}(x,0) = 0, \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x,0) = 0, \quad |x| < a, \\
u^{(1)}(x,0) = u^{(2)}(x,0), \quad v^{(1)}(x,0) = v^{(2)}(x,0), \quad |x| > a.
\end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя выражения для приращений перемещений (3) и напряжений (5) в граничные условия (7), получим следующую систему уравнений:

$$A_1\gamma_{11}e^{t\alpha_{11}h} + B_1\gamma_{12}e^{t\alpha_{12}h} - C_1\gamma_{11}e^{-t\alpha_{11}h} - D_1\gamma_{12}e^{-t\alpha_{12}h},$$
$$A_1\delta_{11}e^{t\alpha_{11}h} + B_1\delta_{12}e^{t\alpha_{12}h} + C_1\delta_{11}e^{-t\alpha_{11}h} + D_1\delta_{12}e^{-t\alpha_{12}h},$$
$$A_1\gamma_{11} + B_1\gamma_{12} - C_1\gamma_{11} - D_1\gamma_{12} - A_2\gamma_{21} - B_2\gamma_{22} = 0,$$
$$A_1\delta_{11} + B_1\delta_{12} + C_1\delta_{11} + D_1\delta_{12} - A_2\delta_{21} - B_2\delta_{22} = 0, \quad |x| < \infty, \tag{8}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^3(A_2\gamma_{21} + B_2\gamma_{22})\cos tx\, dt = 0,$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^3(A_2\delta_{21} + B_2\delta_{22})\sin tx\, dt = 0, \qquad |x| < a, \tag{9}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^2(A_1\alpha_{11} + B_1\alpha_{12} - C_1\alpha_{11} - D_1\alpha_{12} - A_2\alpha_{21} - B_2\alpha_{22})\sin tx\, dt = 0,$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^2(A_1\beta_{11} + B_1\beta_{12} + C_1\beta_{11} + D_1\beta_{12} - A_2\beta_{21} - B_2\beta_{22})\cos tx\, dt = 0, \quad |x| > a. \tag{10}$$

Введем две неизвестные функции по формулам

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[u^{(1)}(x,0) - u^{(2)}(x,0)\right], \quad \varphi(x) = \frac{d}{dx}\left[v^{(1)}(x,0) - v^{(2)}(x,0)\right] \tag{11}$$

Понятно, что для этих функций, согласно условиям (7), будет справедливым

$$f(x) = 0,\ \varphi(x) = 0 \ \text{ для } a < |x| < \infty. \tag{12}$$

Используя (9), соотношения (10) перепишем в следующем виде:

$$t^2(A_1\alpha_{11} + B_1\alpha_{12} - C_1\alpha_{11} - D_1\alpha_{12} - A_2\alpha_{21} - B_2\alpha_{22}) = F(t),$$
$$t^2(A_1\beta_{11} + B_1\beta_{12} + C_1\beta_{11} + D_1\beta_{12} - A_2\beta_{21} - B_2\beta_{22}) = \Phi(t), \tag{13}$$

причем

$$F(t) = \frac{1}{t}\int_0^a f(\xi)\cos t\xi\, d\xi,$$
$$\Phi(t) = \frac{1}{t}\int_0^a \varphi(\xi)\sin t\xi\, d\xi. \tag{14}$$

Решая систему 6 уравнений (8), (13), выразим коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i, (i=1,2) через неизвестные функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ в виде

$$A_1 = C_1R_{11}(t) + D_1R_{12}(t), \qquad B_1 = C_1R_{21}(t) + D_1R_{22}(t),$$
$$A_2 = C_1R_{31}(t) + D_1R_{32}(t), \qquad B_2 = C_1R_{41}(t) + D_1R_{42}(t),$$
$$C_1 = \frac{1}{t^2\Delta}\left[F(t)R_{62}(t) - \Phi(t)R_{52}(t)\right],$$
$$D_1 = \frac{1}{t^2\Delta}\left[\Phi(t)R_{51}(t) - F(t)R_{61}(t)\right], \tag{15}$$

где

$$\Delta = R_{51}(t)R_{62}(t) - R_{61}(t)R_{52}(t)\,,$$

$$R_{11}(t) = \frac{\gamma_{11}\delta_{12} + \delta_{11}\gamma_{12}}{\Delta_1} e^{-2t\alpha_{11}h}\,, \qquad R_{12}(t) = \frac{2\gamma_{12}\delta_{12}}{\Delta_1} e^{-t(\alpha_{11}+\alpha_{12})h}\,,$$

$$R_{21}(t) = -\frac{2\gamma_{11}\delta_{11}}{\Delta_1} e^{-t(\alpha_{11}+\alpha_{12})h}\,, \qquad R_{22}(t) = -\frac{\gamma_{12}\delta_{11} + \delta_{12}\gamma_{11}}{\Delta_1} e^{-2t\alpha_{12}h}\,,$$

$$\Delta_i = \gamma_{i1}\delta_{i2} - \delta_{i1}\gamma_{i2}\,,$$

$$R_{3i}(t) = \frac{1}{\Delta_2}\left[a_{i1}R_{1i}(t) + a_{i2}R_{2i}(t) + a_{i3}\right],$$

$$R_{4i}(t) = -\frac{1}{\Delta_2}\left[a_{i+2,1}R_{1i}(t) + a_{i+2,2}R_{2i}(t) + a_{i+2,3}\right],$$

$$a_{i1} = \gamma_{11}\delta_{22} - \delta_{11}\gamma_{22}\,,$$

$$a_{i2} = \gamma_{12}\delta_{22} - \delta_{12}\gamma_{22}\,,$$

$$a_{i3} = -\gamma_{1i}\delta_{22} - \delta_{1i}\gamma_{22}\,,$$

$$a_{i+2,1} = \gamma_{11}\delta_{21} - \delta_{11}\gamma_{21}\,,$$

$$a_{i+2,2} = \gamma_{12}\delta_{21} - \delta_{12}\gamma_{21}\,,$$

$$a_{i+2,3} = -\gamma_{1i}\delta_{21} - \delta_{1i}\gamma_{21}\,,$$

$$R_{5i}(t) = R_{1i}(t)\alpha_{11} + R_{2i}(t)\alpha_{12} - R_{3i}(t)\alpha_{21} - R_{4i}(t)\alpha_{22} - \alpha_{1i}\,,$$

$$R_{6i}(t) = R_{1i}(t)\beta_{11} + R_{2i}(t)\beta_{12} - R_{3i}(t)\beta_{21} - R_{4i}(t)\beta_{22} + \beta_{1i}\,,$$

$$(i = 1,2). \qquad (16)$$

Рассматривая условия (9) на берегах трещины и подставляя выражения для A_2, B_2 из (15), после аналитических преобразований приходим к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядрами типа Коши:

$$\beta_1 f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(\xi)}{\xi - x}d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\left[f(\xi)K_{11}(\xi,x) + \varphi(\xi)K_{12}(\xi,x)\right]d\xi = 0\,,$$

$$-\beta_2\,\varphi(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)}{\xi - x}d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\left[f(\xi)K_{21}(\xi,x) + \varphi(\xi)K_{22}(\xi,x)\right]d\xi = 0\,,$$

$$|x|<a, \qquad (17)$$

где

$$\beta_1 = \frac{Q_{11}^{\infty}}{Q_{12}^{\infty}}, \qquad \beta_2 = \frac{Q_{22}^{\infty}}{Q_{21}^{\infty}},$$

$$K_{11}(\xi,x) = \frac{1}{Q_{12}^{\infty}}\int_0^{\infty}\left[Q_{11}(t) - Q_{11}^{\infty}\right]\cos(t\xi)\cos(tx)dt\,,$$

$$K_{12}(\xi,x) = \frac{1}{Q_{12}^{\infty}}\int_0^{\infty}\left[Q_{12}(t) - Q_{12}^{\infty}\right]\sin(t\xi)\cos(tx)dt\,,$$

$$K_{21}(\xi,x)=-\frac{1}{Q_{21}^{\infty}}\int_0^{\infty}\left[Q_{21}(t)-Q_{21}^{\infty}\right]\cos(t\xi)\sin(tx)dt,$$

$$K_{22}(\xi,x)=-\frac{1}{Q_{21}^{\infty}}\int_0^{\infty}\left[Q_{22}(t)-Q_{22}^{\infty}\right]\sin(t\xi)\sin(tx)dt,$$

$$Q_{i1}(t)=\frac{1}{\Delta}\left[N_{i1}(t)R_{62}(t)-N_{i2}(t)R_{61}(t)\right],\quad Q_{i2}(t)=\frac{1}{\Delta}\left[N_{i2}(t)R_{51}(t)-N_{i1}(t)R_{52}(t)\right],$$

$$N_{1i}(t)=R_{1i}(t)\gamma_{11}+R_{2i}(t)\gamma_{12}-\gamma_{1i},\qquad N_{2i}(t)=R_{1i}(t)\delta_{11}+R_{2i}(t)\delta_{12}+\delta_{1i},$$

$$Q_{ij}^{\infty}=\lim_{t\to\infty}Q_{ij}(t),\qquad (i,j=1,2).\qquad (18)$$

Дополнительные условия к системе (17) запишем, исходя из условия однозначности смещений при обходе контура трещины:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}f(\xi)d\xi=0,\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\varphi(\xi)d\xi=0,\qquad (i=1,2),\quad |x|<a.\qquad (19)$$

Произведем замену переменных $\xi=as$ и $x=at$ и представим неизвестные функции $f^*(s)=f(as)$ и $\varphi^*(s)=\varphi(as)$ в следующем виде [7;8]

$$f^*(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\left[g_1(s)\cos\theta-g_2(s)\sin\theta\right],$$

$$\varphi^*(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\left[g_1(s)\sin\theta+g_2(s)\cos\theta\right],\qquad (20)$$

где

$$\theta=-\eta\ln\left(1-s^2\right),\qquad \eta=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\beta_1\beta_2}}{1-\sqrt{\beta_1\beta_2}}\right).\qquad (21)$$

Численное решение задачи. Для дальнейшего численного анализа к системе уравнений (17), (19) применим квадратурную формулу Гаусса–Чебышева [4]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(s)}{\sqrt{1-s^2}}\frac{ds}{s-t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\psi(s_i)\frac{1}{s_i-t_k},$$

где

$$s_i=\cos\left(\pi\frac{2i-1}{2n}\right),\quad (i=1,2,\ldots,n),\quad t_k=\cos\left(\pi\frac{k}{n}\right),\quad (k=1,2,\ldots,n-1).\qquad (22)$$

Используя аппроксимации

$$f^*(t_k)\approx\frac{1}{2}\left[f^*(s_k)+f^*(s_{k+1})\right],$$

$$\varphi^*(t_k)\approx\frac{1}{2}\left[\varphi^*(s_k)+\varphi^*(s_{k+1})\right],\qquad (23)$$

преобразуем систему сингулярных интегральных уравнений второго рода с ядрами типа Коши (17) и дополнительные условия (19) в систему $2n$ однородных алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных $g_1^*(s_i)$ и $g_2^*(s_i)$, (i = 1,2,...,n).

Критическую нагрузку $\frac{P_1}{G_{12}^{(1)}}$ находят из условия равенства нулю определителя полученной системы алгебраических уравнений.

Результаты, представленные ниже, показывают зависимость критической нагрузки от толщины слоя биматериального тела (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость критической нагрузки от толщины слоя

$\frac{h}{a}$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\frac{P_1}{G_{12}^{(1)}}$	0,038	0,052	0,078	0,110	0,136	0,161	0,192	0,247	0,260

Вычисления проводили при следующих механических значениях слоя и полупространства: E_1=1,2*10^4 кг/см^2, E_2=0,6*10^4 кг/см^2; ν_{12}=0,071, ν_{21}=0,036, значение модуля сдвига полупространства G_{12}=0,07*10^4 кг/см^2. Как и следовало ожидать, увеличение толщины слоя приводит к увеличению критической нагрузки.

Библиографические ссылки

1. **Гузь, А.Н.** Механика разрушения композитных материалов при сжатии [Текст] / А.Н. Гузь. – К.: Наук. думка, 1989. – 632 с.
2. **Грандштейн, И.С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И.С. Грандштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
3. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
4. **Трантер, К. Дж.** Интегральные преобразования в математической физике [Текст] /К.Дж. Трантер. – М.: Гостехиздат, 1956. – 204 с.
5. **Erdogan, F.** On the numerical solution of singular integral equations [Text] / F. Erdogan, G.D. Gupta // Q. Appl. Math. – 1972. – Vol. 29. – P. 525–534.
6. **Loboda, V.V.** On the stability loss of a bimaterial finite sized body with a tunnel crack in an interface [Text] / V.V. Loboda, I.Yu. Mityukova // Int. Solid and Structure. – 2001. – Vol. 38. – P. 7283–7296.
7. **Wang, W. X.** Load buckling of a layer bonded to a half-space with an interface crack [Text] / W.X. Wang, Y. Takao //ASME J.of Appl. Mech. – 1995. – Vol. 62. – P. 64–70.
8. **Williams. M. L.** The stresses around a fault or cracks in dissimilar media [Text] / M.L. Erdogan // Bull. Seismological Society of America. – 1959. Vol. 49. – P. 199–204.

Надійшла до редколегії 09.06.2015