УДК 519.6

Е.А. Макаренков, А.В. Сясев

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО ПО ТОРЦАМ ЦИЛИНДРА ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ НА ОБРАЗУЮЩИХ

Рассмотрены различные элементы конструкций, применяемые в машиностроении. В этих элементах используются детали, имеющие вид толстостенного полого цилиндра, поперечное сечение которого представляет собой двухсвязную область. Высокотемпературный скоростной газовый или жидкостной поток, проходящий через внутреннюю полость, создает неравномерный нагрев, определяемый как условиями обтекания, так и особенностью конструкции. Исследование возникающего вследствие этого сложного термонапряженного состояния имеет большое значение при проектировании объектов машиностроения. Принимая во внимание то, что при этом часто приходится иметь дело с кратковременным воздействием высоких температур, большое значение приобретает вопрос исследования нестационарных температурных полей с целью определения их наибольшей неравномерности. Последнее обстоятельство может повлечь за собой возникновение термонапряженного состояния, приводящего к нарушению режима эксплуатации. Дана постановка задачи о распространении тепла в круговом конечном цилиндре с определенными радиусом и высотой с заданной начальной температурой; математическая постановка внутренней задачи, которая удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности и однородному смешанному условию на образующей цилиндра. Решение задачи получено методом факторизации с использованием конечного интегрального преобразования смешанной задачи математической физики для цилиндра.

Ключевые слова: круговой цилиндр, внутренняя задача, вынужденный теплообмен.

Розглянуто різні елементи конструкцій, застосовні у машинобудуванні. В цих елементах використовують деталі, що мають вид товстостінного порожнистого циліндра, поперечний переріз якого являє собою двозв'язну область. Високотемпературний швидкісний газовий або рідинний потік, що проходить через внутрішню порожнину, створює нерівномірний нагрів, визначуваний як умовами обтікання так і особливістю конструкції. Дослідження складного термонапруженого стану, що виникає в результаті цього, має велике значення для проектування об'єктів машинобудування. Беручи до уваги те, що при цьому часто доводиться мати справу з короткочасним впливом високих температур, великого значення набуває питання дослідження нестаціонарних температурних полів з метою визначити їх найбільшу нерівномірність. Остання обставина може спричинити виникнення термонапруженого стану, що призводить до порушення режиму експлуатації. Подано постановку задачі про поширення тепла в коловому скінченному циліндрі з певними радіусом і висотою із заданою початковою температурою; математичну постановку внутрішньої задачі, яка задовольняє неоднорідне рівняння теплопровідності й однорідну змішану умову на твірній циліндра. Розв'язок задачі отримано методом факторизації з застосуванням кінцевого інтегрального перетворення змішаної задачі математичної фізики для циліндра.

Ключові слова: коловий циліндр, внутрішня задача, вимушений теплообмін.

To consider different elements of constructions, which are used in mechanical engineering, the attention can be paid to the fact that components, in the form of a thick-walled hollow cylinder, which cross-section is a doubly connected area, are used in these elements. The high-temperature speed gas or liquid flow, passing through the inner cavity, creates uneven heating, defined both by conditions of the flow and feature of design. The research arising through this complex thermostressed state is important in the design of mechanical engineering things. Taking into account the fact that we often have to deal with short-term impact of high temperatures, it is important to study unsteady temperature fields to determine their greatest unevenness. The latter thing can give rise to the thermostressed state, leading to disturbance of the operating mode. The proposed paper deals with

©Е.А. Макаренков, А.В. Сясев, 2015

the task of spreading the heat in the circular cylinder with defined radius and height with the specified starting temperature. The bases of the cylinder are heat-insulated, and along the generatrix is forced heat exchange with the environment. A mathematical statement of the internal problem that satisfies the heterogeneous equation of thermal conduction and homogeneous mixed condition on the generatrix of the cylinder is given. The solution of the problem is carried out by factorization using finite integral transforms of the mixed problem of mathematical physics to the cylinder.

Key words: circular cylinder, the internal problem, forced heat exchange.

Введение. В различных элементах конструкций химических и энергетических установок, сверхзвуковых летательных аппаратов, в атомной энергетике применяются детали, имеющие вид толстостенного полого цилиндра, поперечное сечение которого представляет собой двухсвязную область. Высокотемпературный скоростной газовый (или жидкостной) поток, проходящий через внутреннею полость, создает неравномерный нагрев, определяемый как условиями обтекания, так и особенностью конструкции. Исследование возникающего вследствие этого сложного термонапряженного состояния имеет большое значение при проектировании указанных объектов машиностроения. Решения подобных задач, связанных с круговым цилиндром, предложены в исследованиях [3; 4]. В работе [1] рассмотрена нестационарная задача теплопроводности для цилиндра с конвективным теплообменом со средой с кипящим слоем. Решение получено численным и приближенным аналитическим методами с последующим сравнением результатов.

Новизной предлагаемой работы является то, что рассмотрен круговой конечный цилиндр с теплоизолированными основаниями, вдоль образующей которого происходит вынужденный теплообмен с окружающей средой, дана математическая постановка и предложено решение внутренней задачи методом факторизации.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении тепла в круговом конечном цилиндре радиуса R и высотой $2h$ с заданной начальной температурой. Основания цилиндра теплоизолированы, а вдоль образующей происходит вынужденный теплообмен с окружающей средой. Математическая постановка внутренней задачи запишем в виде [5]

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\chi L[U],\quad U\big|_{t=0}=\varphi(r,\theta,z),\quad \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=0}=0,$$
$$\left.\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial r}+\varepsilon U\right)\right|_{r=R}=\alpha(t)U_0\equiv\aleph(t),\quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=\pm h}=0, \tag{1}$$
$$U(r,\theta,z,t)=U(r,\theta+2\pi,z,t),$$

где $t\ge 0$, $\varepsilon>0$ − параметр; $r\in[0,R]$, $\theta\in[0,2\pi)$, $z\in[-h,h]$, $\chi=\dfrac{\lambda}{c\gamma}$ − коэффициент температуропроводности; $L=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, λ − коэффициент теплопроводности; c − удельная теплоемкость; γ − плотность материала цилиндра; $\alpha(t)$ − переменный коэффициент теплоотдачи; U_0 − температура окружающей среды.

Метод решения. Для решения поставленной задачи применим метод факторизации с использованием конечного интегрального преобразования смешанной задачи математической физики для цилиндра.

Положим [1]

$$U(M,t)=w(M,t)+V(r,t),\quad M=\{r,\theta,z\},$$

где $V(r,t)=Dr^2\aleph$, $D=\left(2\lambda R+\alpha R^2\right)^{-1}$, а новая искомая функция $w(M,t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности и однородному смешанному условию на образующей цилиндра (остальные условия однозначности не меняются):

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\chi L[w]+f(r,t),\quad f(r,t)=\left(4\chi\aleph-r^2\frac{\partial\aleph}{\partial t}\right)D,$$

$$w\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(M),\quad \tilde{\varphi}(M)=\varphi(M)-V(r,0)=\varphi(M)-Dr^2\aleph, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\quad \left.\left(\frac{\partial w}{\partial r}+Hw\right)\right|_{r=R}=0,\quad H=\frac{\alpha}{\lambda},$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=\pm h}=0,\quad w(M,t)=w(r,\theta+2\pi,z,t),$$

где H − относительная интенсивность теплообмена между цилиндром и омывающей средой. Предполагается, что непрерывная функция $f(t,r)$ имеет кусочно-непрерывную производную по r первого порядка и при всех $t>0$ выполняются условия $f(0,t)=f(R,t)=const$ [1; 5].

Если представить новую искомую функцию в виде суммы двух функций $wu(M,t)+Q(M,t)$, то задача (2) распадается на две:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\chi L[u]\\ u(M,0)=\tilde{\varphi}(M)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0\\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+Hu\right)\right|_{r=R}=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\pm h}=0\\ u(M,t)=u(r,\theta+2\pi,z,t)\end{cases}, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial t} = \chi L[Q] + f(r,t) \\ Q(M,0) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial Q}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \\ \left.\left(\dfrac{\partial Q}{\partial r} + HQ\right)\right|_{r=R} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right|_{z=\pm h} = 0 \\ Q(M,t) = Q(r,\theta+2\pi,z,t) \end{cases} . \qquad (4)$$

Решая задачу (3) методом Фурье, получаем решение в виде ряда [1; 6]

$$u(t,M) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\exp\left[-\chi\left(\frac{\mu_{nk}^2}{R^2} + \frac{m^2\pi^2}{4h^2}\right)t\right]J_n\left(\frac{\mu_{nk}r}{R}\right)\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h)\times\right.$$
$$\left.\times\left(A_{knm}\cos n\theta - B_{knm}\sin n\theta\right)\right\},$$

где μ_{nk} – положительные корни трансцендентного уравнения

$$(L+n)J_n(\mu) = \mu J_{n+1}(\mu), \quad L = HR .$$

Так как функции $\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h)$ образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-h,h]$, то известным приемом [5; 6] находим коэффициенты

$$A_{km0} = N_{k0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} r\tilde{\varphi}(M)J_0\left(\frac{\mu_{k0}r}{R}\right)\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h)\,dr\,d\theta\,dz ,$$
$$A_{kmn} = 2N_{kn}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} r\tilde{\varphi}(M)J_n\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)\cos n\theta\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h)\,dM , \qquad (5)$$
$$B_{kmn} = 2N_{kn}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} r\tilde{\varphi}(M)J_n\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)\sin n\theta\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h)\,dM ,$$

где $N_{k0} = \dfrac{\mu_{k0}^2}{\pi hR^2\left(\mu_{k0}^2 + L^2\right)J_0^2(\mu_{k0})}$, $N_{kn} = \dfrac{\mu_{kn}^2}{\pi hR^2\left(\mu_{kn}^2 + L^2 - n^2\right)J_n^2(\mu_{kn})}$.

Решение задачи (4) ищем в виде [3]

$$Q(M,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}(r,t)(A\cos n\theta + B\sin n\theta)\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h), \qquad (6)$$

где граничные условия по переменным θ и z удовлетворяются сами собой.

Предположим, что $f(t,r)$, рассматриваемая как функция точки $M=\{r,\theta,r\}$, может быть разложена в ряд Фурье [5; 6]

$$f(M,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}v_{mn}(r,t)(A\cos n\theta+B\sin n\theta)\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h), \tag{7}$$

Подставляя ряды (6) и (7) в (4), получим

$$\frac{\partial v_{mn}}{\partial t}=\chi\left\{\frac{\partial^2 v_{mn}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_{mn}}{\partial r}-\left(\frac{n^2}{r^2}+\beta^2\right)v_{mn}\right\}+f_{mn}(r,t), \tag{8}$$

где $f_{mn}(r,t)=\frac{1}{\pi h}\int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}v_{mn}(M,t)(A\cos n\theta+B\sin n\theta)\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h)$, $\beta=\frac{m\pi}{2h}$,

$v_{mn}(r,0)=0$, $\left.\frac{\partial v_{mn}}{\partial r}\right|_{r=0}=0$, $\left.\left(\frac{\partial v_{mn}}{\partial r}+Hv_{mn}\right)\right|_{r=R}=0$.

Воспользуемся конечным интегральным преобразованием Ханкеля [2]

$$\bar{v}(\sigma_k,t)=\int_0^R\rho K_n(\sigma_k,\rho)v(\rho,t)d\rho, \quad v(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}K_n(\sigma_k,r)\bar{v}(\sigma_k,t), \tag{9}$$

где $K_n(\sigma_k,r)=\frac{\sqrt{2}}{R}\left[\frac{H^2}{\sigma_k^2}+\left(1-\frac{n^2}{\sigma_k^2R^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{J_n(\sigma_k r)}{J_n(\sigma_k R)}$, σ_k – положительные корни трансцендентного уравнения $\sigma J_n'(\mu)+HJ_n(\mu)=0$, $\sigma=\frac{\mu}{R}$.

Применяя прямое преобразование (9) к задаче (8) (индексы для упрощения записи опускаем), получаем в области изображений по r задачу Коши

$$\frac{dv}{dt}+\left(\sigma_k^2+\beta^2\right)\bar{v}=\bar{A}(\sigma_k,n,\beta), \quad \tau=\chi t, \quad \bar{v}(\sigma_k,0)=0,$$

где $\bar{A}(\sigma_k,n,\beta)=\int_0^R\rho K_n(\sigma_k,\rho)A(\rho,n,\beta)d\rho$, $A(r,n,\beta)=\frac{f(r,t)}{\chi}=4\alpha U_0D=const$,

решение которой имеет вид

$$\bar{v}(\sigma_k,t)=\frac{\bar{A}(\sigma_k,n,\beta)\left(1-\exp\left(-I_k^2\chi t\right)\right)}{I_k^2}, \quad I_k^2=\sigma_k^2+\beta^2.$$

Применяя формулу обратного перехода (9) в области оригиналов, находим

$$v(\sigma_k,t)=\sum_{k=1}^{\infty}K_n(\sigma_k,r)\frac{\bar{A}(\sigma_k,n,\beta)\left(1-\exp\left(-I_k^2\chi t\right)\right)}{I_k^2}.$$

После подстановки этого выражения в (6), запишем решение задачи (4) в виде

$$Q(M,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}K_n(\sigma_k,r)\frac{\overline{A}(\sigma_k,n,\beta)\left(1-\exp\left(-I_k^2\chi t\right)\right)}{I_k^2}\times$$

$$\times\left(A\cos n\theta+B\sin n\theta\right)\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h),$$

где $\overline{A}(\sigma_k,n,\beta)=\dfrac{4\alpha U_0 D\sqrt{2}}{R\sigma_k^2 I_n(\sigma_k r)}\left[\dfrac{H^2}{\sigma_k^2}+\left(1-\dfrac{n^2}{\sigma_k^2R^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\sigma_k R} z\,J_n(z)dz,$

или

$$Q(M,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\mu_k\dfrac{r}{R}\right)I(\mu_k)\left(1-\exp\left(-\chi\left(\mu_k^2+R^2\beta^2\right)\dfrac{t}{R^2}\right)\right)}{\left(L^2+\mu_k^2-n^2\right)\left(\mu_k^2+R^2\beta^2\right)J_n^2(\mu_k)}\times$$

$$\times\left(A\cos n\theta+B\sin n\theta\right)\cos\frac{m\pi}{2h}(z+h),$$

где $I(\mu_k)=\int\limits_0^{\mu_k} z\,J_n(z)dz$, A и B определены формулами (5).

Подставляя найденные выражения $Q(M,t)$, $u(M,t)$, $V(r,t)$ в формулу для $U(M,t)$, получим искомое решение задачи (1).

Выводы. Таким образом, предложен эффективный алгоритм решения задачи о распространении тепла в круговом конечном цилиндре с заданной начальной температурой и теплоизолированными основаниями.

Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что этот метод решения позволяет исследовать термонапряженное состояние в деталях, имеющих форму толстостенных неравномерно нагретых цилиндров.

Библиографические ссылки

1. **Арсенин, В.Л.** Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции [Текст] / В.Л. Арсенин. – М.: Наука, 1966. – 327 с.
2. **Галицын, А.С.** Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности [Текст] / А.С. Галицын, А.Н. Жуковский. – К.: Наук. думка, 1976. – 282 с.
3. **Горелов, Д.Н.** Присоединенные массы жидкости, колеблющейся внутри кругового цилиндра при деформации его стенок [Текст] / Д.Н. Горелов // Вестн. Омск. ун-та. – 2014. – № 2 (72). – С. 17 – 20.
4. **Жорник, А.И.** Об одной задаче теплопроводности для цилиндра с конвективным теплообменом [Текст] / А.И. Жорник, В.А. Киричек, П.А. Савочка // Изв. ЮФУ. Техн. науки. − 2013. − № 4 (141). – С. 246 – 253.
5. **Кошляков, Н.С.** Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер., М.М. Смирнов. − М.: Высш. шк., 1970. – 713с.
6. **Толстов, Г.П.** Ряды Фурье [Текст] / Г.П. Толстов. – М. – Л.: ГШТЛ, 1951. – 396 с.

Надійшла до редколегії 03.04.2015