

Dr Branislav Todorović,  
dipl. inž.  
Sandra Erić,  
dipl. inž.  
Vojnotehnički institut VJ,  
Beograd

## TALASNA TRANSFORMACIJA – NOVI METOD ZA ANALIZU SIGNALA

UDC: 621.39:537.8.029:519.688

### Rezime:

*U radu je prikazana nova metoda za analizu signala – talasne transformacije. Razmatrani su uslovi pri kojima je moguća primena ove transformacije, osnovne teorijske postavke, način predstavljanja rezultata analize u vremensko-frekvencijskoj ravni, brzi algoritam koji omogućava praktičnu realizaciju i kriterijumi za procenu kvaliteta. Analizirane su mogućnosti primene ove transformacije i pravci daljeg razvoja.*

*Ključne reči: telekomunikacije, analiza signala, metod, transformacija, talasići.*

---

## WAVELETS TRANSFORMATION – A NEW METHOD FOR SIGNAL ANALYSIS

### Summary:

*In this paper a new method for signal analysis – wavelets transformation is presented. We consider basic theoretical assumptions and mathematical foundations, signal representation in time-frequency domain, fast algorithms for practical implementation and a method for quantifying signal approximation achieved with wavelets. We also analyze implementation possibilities of the wavelets transformation as well as trends of future development.*

*Key words: telecommunications, signal analysis, method, transformation, wavelets.*

---

### Uvod

Fizički objekat ili pojava koja se posmatra i proučava može se predstaviti na više različitih načina. Koja predstava će se izabrati zavisi od konkretnog slučaja. Na primer, u svakodnevnom životu se koristi decimalni brojni sistem, dok se rad na računarima zasniva na binarnoj predstavi podataka. U mnogim oblastima, kao, na primer, u numeričkoj analizi ili obradi signala, jedan od osnovnih kriterijuma pri izboru predstave signala jeste mogućnost relativno lakog i brzog identifikovanja njegovih osnovnih osobina.

Mogući način da se ovaj kriterijum ostvari jeste dekompozicija signala  $x$  pomoću skupa jednostavnijih signala  $x_i$ , pri čemu važi  $x = \sum_i x_i$ . Drugim rečima, obavlja se aproksimacija realnih signala pomoću jednostavnijih talasnih oblika. Cilj je da ta aproksimacija bude što je moguće bliža posmatranom signalu, a da broj talasnih oblika koji je čine bude što je moguće manji. Za praktičnu realizaciju dekompozicije signala neophodan je brz algoritam, jer bi u suprotnom takva predstava signala imala čisto teorijski značaj.

Metoda koja se do sada najčešće koristila za analizu signala jeste Furijeova transformacija. Furijeova analiza stavlja na raspolaganje više konkretnih alata za obradu signala: od kontinualne analize pomoću Furijeovog integrala, preko analize diskretnih signala, do brzog algoritma pogodnog za praktičnu primenu na računaru – brze Furijeove transformacije. Osnovna ideja Furijeove transformacije jeste dekompozicija signala na prostoperiodične komponente (bazne funkcije su oblika  $e^{j\omega t}$ ). Najpre će se posmatrati slučaj periodičnog signala. Takav signal predstavlja se sumom prostoperiodičnih signala čije su amplitude i faze različite, a frekvencija svakog od njih jednaka je umnošku osnovne frekvencije razlaganog signala. Dati signal je u potpunosti okarakterisan skupom brojeva koji predstavljaju te umnoške i skupom njima pripadajućih amplitude i faza. Dobija se slika posmatranog signala u domenu frekvencija, a ujedno je složeni talasni oblik rastavljen na prostije oblike. Zahvaljujući teoremi superpozicije i ovakvom predstavljanju signala ukupan odziv sistema može se dobiti određivanjem odziva na svaku od ovih prostijih komponenti zasebno. Naravno, u praktičnim slučajevima susreće se sa aperiodičnim signalima. Analiza ovakvog signala obavlja se pomoću Furijeovog integrala koji predstavlja granični slučaj razvijanja u red funkcije čija osnovna frekvencija teži nuli. Da bi posmatrani signal  $f(t)$  imao Furijeovu transformaciju mora biti zadovoljen uslov:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{ili} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt < \infty \quad (1)$$

gde je sa  $|f(t)|$  označena apsolutna vrednost funkcije  $f(t)$ .

Veličina  $F(j\omega)$  naziva se Furijeovom transformacijom funkcije  $f(t)$ . To je kon-

tinualna funkcija frekvencije i data je izrazom:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2a)$$

Izraz za inverznu Furijeovu transformaciju glasi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2b)$$

Dakle, ukoliko se posmatra signal  $e^{j\omega_0 t}$ , Furijeova transformacija će dati maksimalnu vrednost na frekvenciji  $\omega_0$ . Problem nastaje u slučaju da se posmatra signal koji je sastavljen od dva oscilatorna oblika koja se naizmenično pojavljuju u susednim vremenskim intervalima, tj. signal oblika:

$$f(t) = e^{j\omega_1 t} X_{[a, b]}(t) + e^{j\omega_2 t} X_{[b, c]}(t), \quad (3)$$

gde je  $X_{[a, b]}$  talasni oblik ograničen u vremenskom intervalu  $[a, b]$ , a  $X_{[b, c]}$  talasni oblik u vremenskom intervalu  $[b, c]$ .

Furijeova analiza će dati dve komponente u spektru, na frekvencijama  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , ali ne i informaciju o ponašanju signala u vremenu. Jedan od načina da se ovakav problem prevaziđe je prozorovanje, tj. korišćenje prozorovane ili kratkotrajne Furijeove transformacije (short-time Fourier transform.). Bazne funkcije, preko kojih se sada predstavlja signal, imaju oblik  $w(t - \tau)e^{j\omega t}$ , gde je  $w(t)$  prozorska funkcija koja omogućava lokalizaciju signala u vremenu.

Signali sa kojima se svakodnevno susreće nisu potpuno slučajni, već imaju određenu korelacionu strukturu. Na primer, kod signala slike susedni elementi

(pikseli) jako su korelisani u prostoru (vremenu, frekvenciji). Sa druge strane, međusobno udaljeni pikseli su nekorelisani. Za ovakav tip korelacije kaže se da je lokalna. To navodi na zaključak da signale sa ovakvim osobinama treba aproksimirati pomoću jednostavnijih signala koji su lokalizovani u vremenu i u domenu frekvencija. Takvi signali pružaju mogućnost aproksimacije korelacionih osobina analiziranog signala sa relativno malim brojem komponentata. Talasna transformacija (wavelet transformation), čije osnovne postavke su izložene u ovom radu, zasnovana je upravo na ovakvom konceptu.

### Osnovne postavke talasne transformacije

Talasna transformacija obavlja dekompoziciju posmatranog signala preko jednostavnih talasnih oblika koji ne moraju da budu isključivo prostoperiodični signali kao u slučaju Furijeove transformacije. Dakle, umesto da se dekompozicija posmatranog signala obavlja pomoću prostoperiodičnih signala, ona se vrši pomoću signala  $\varphi(t)$  i njegovih transliranih i proširenih oblika. Drugim rečima, signal  $\varphi(t)$  u talasnoj transformaciji ima ulogu prostoperiodičnog signala  $e^{j\omega t}$  u Furijeovoj transformaciji.

U talasnoj transformaciji koristi se familija baznih funkcija:

$$\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a>0, b \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

gde je sa  $\varphi(t)$  označena fiksna funkcija koja se naziva matični ili osnovni talasić (mother wavelet) a  $a, b$  su parametri transliranja i proširenja osnovnog talasića. Funkcija treba da ima osobinu dobre

lokalizovanosti i u vremenu i po frekvencijama, tj. treba da budu ispunjeni uslovi:

$$|\varphi(t)| \leq c (1 + |t|)^{-1-\epsilon}, \quad (5a)$$

$$|\hat{\varphi}(\omega)| \leq c (1 + |\omega|)^{-1-\epsilon}, \quad (5b)$$

gde je sa  $c$  označena konstanta,

a  $\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-j\omega t} dt$  je Furijeova transformacija funkcije  $\varphi(t)$ .

Analiza se obavlja pod pretpostavkom da je zadovoljen uslov konačne snage, tj.

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (6)$$

Prostor funkcija koje zadovoljavaju uslov (6) naziva se Hilbertovim prostorom, i u njemu se može definisati skalarni proizvod funkcija  $i, j$ , označen sa  $\langle i, j \rangle$ , na sledeći način:

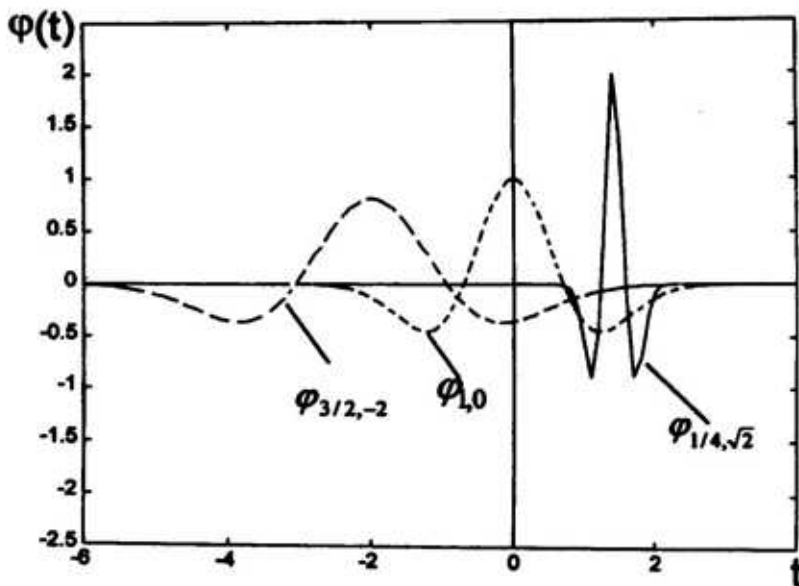
$$\langle i, j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)j^*(t) dt, \quad (7)$$

gde  $j^*(t)$  označava konjugovano kompleksnu vrednost  $j(t)$ . Talasna transformacija posmatrane funkcije  $f(t)$  označava se sa  $T_{a,b}f(t)$  i definiše na sledeći način:

$$T_{a,b}f(t) = \langle f, \varphi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (8)$$

Postojanje inverzne talasne transformacije zavisi od izbora osnovnog talasića  $\varphi(t)$ . Ako izabrani osnovni talasić zadovoljava uslov:

$$C_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty, \quad (9)$$



Sl. 1 – Nekoliko talasića izvedenih iz osnovnog talasića

funkcija  $f(t)$  može se rekonstruisati na sledeći način:

$$f(t) = C_{\varphi}^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{a,b} f(t) \varphi_{a,b}(t) db. \quad (10)$$

Ispunjeni uslov (9) ima za posledicu da funkcija  $\varphi(t)$  nema jednosmernu komponentu, tj. važi  $\bar{\varphi}(0) = 0$ . Osnovni talasić  $\varphi(t)$  treba da bude opadajuća funkcija i da u opštem slučaju ima  $N$  nula, tj.,  $\left(\frac{d}{d\omega}\right)^k$

$$\hat{\varphi}(0) = \int t^k \varphi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Na slici 1 dat je primer nekoliko talasića dobijenih iz osnovnog talasića oblika  $\varphi_{1,0}(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}$ , koji predstavlja drugi izvod Gausove funkcije. U ovom slučaju je  $N = 1$ , tj.  $\int \varphi(t) dt = \int t\varphi(t) dt = 0$ .

Vrednosti talasne transformacije zavise od regularnosti funkcije  $f(t)$ . Funkcija  $f(t)$  je Holder regularna ako, i samo

ako, postoji polinom  $P(t)$  čiji je stepen  $n < \alpha$ ,  $\alpha > 0$ , takav da važi:

$$|f(t) - P(t)| \leq C_1 |t - t_0|^\alpha \quad (11)$$

Ovaj uslov je zadovoljen kada je funkcija  $f(t)$   $m$  puta diferencijabilna u okolini tačke  $t_0$ , pri čemu je  $m > \alpha$ . Na osnovu Tejlorove formule za razvoj funkcije u red imamo da je:

$$P(t) = \sum_{0 \leq k < \alpha} f^{(k)}(t_0) \frac{(t - t_0)^k}{k!}. \quad (12)$$

U slučaju  $\alpha < 1$   $P(t) = f(t_0)$ .

Matematičkom analizom u [1] pokazano je da, ako osnovni talasić  $\varphi_{a,b}(t)$  ima  $N > \alpha - 1$  nula, dovoljno iščezava u beskonačnosti (tj.  $\int \varphi(t) |t|^\alpha dt < +\infty$ ), i ako važi uslov:

$$|b - t_0| \leq Ca, \quad (13)$$

gde je:

$C$  – konstanta,

a – parametar širenja osnovnog talasića, važi sledeća relacija:

$$|T_{a,b} f(t)| \leq K |a|^{\alpha + 1/2}, \quad (14)$$

gde je K konstanta.

Dakle, ukoliko je funkcija regularna u okolini tačke  $t_0$  i ako je ispunjen uslov (13), amplitude talasne transformacije  $T_{a,b} f(t)$  ograničene su i opadaju veoma brzo. Ako funkcija ima neki prekid u ovoj oblasti, vrednosti  $T_{a,b} f(t)$  opadaju znatno sporije.

U praktičnim primenama talasna transformacija se može odrediti samo za konačan skup vrednosti. Postavlja se pitanje kako odabrati funkciju  $f(t)$ , a da se pri tome izdvoje sve bitne informacije koje ona nosi. Složenom matematičkom analizom ([1], [5]) može se pokazati da je najefikasnije odabrati analiziranu funkciju talasićima oblika:

$$\varphi_{j,k}(t) = a_0^{j/2} \varphi(a_0^j t - b_0 k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

gde su  $a_0 > 1$  i  $b_0 > 0$  fiksni parametri.

### **Predstavljanje signala u vremensko-frekvencijskoj ravni**

Talasnom transformacijom signal se razbija na komponente koje se nazivaju vremensko-frekvencijskim atomima, a predstavljaju se grafički u vremensko-frekvencijskoj ravni. Potpuna lokalizacija ovih atoma, u vremenu i frekvenciji, nije moguća. Naime, prema Hajzenbergovom principu neodređenosti proizvod neodređenosti vremena  $\Delta t$  i neodređenosti frekvencije  $\Delta f$  ograničen je i važi relacija:

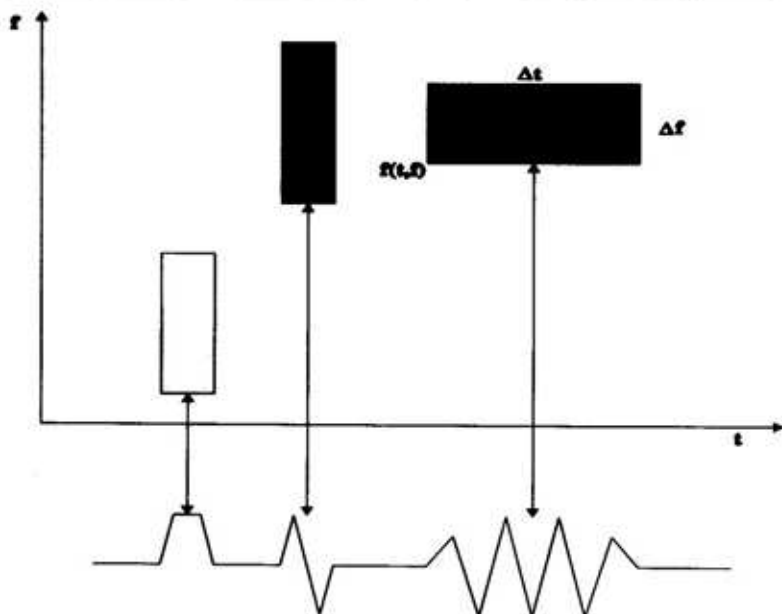
$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (16)$$

Vremensko-frekvencijski atomi predstavljaju se nekim dvodimenzionim oblikom, na primer pravougaonikom ili elipsom. Pozicija odabrane figure određuje položaj posmatrane komponente u vremenu i frekvenciji, dok je njena površina proporcionalna proizvodu neodređenosti vremena i frekvencije. Amplituda posmatrane komponente označava se stepenom osenčenosti figure. Najčešće se vremensko-frekvencijski atom predstavlja pravougaonikom, i nazivamo je informacionom ćelijom. Širina i visina te ćelije predstavlja neodređenost vremena, tj. neodređenost frekvencije. Koordinate ćelije, odnosno položaj posmatrane komponente u vremenu i frekvenciji obično se naznače u donjem levom uglu atoma. Na slici 2 dat je primer tri talasna oblika i njihova predstava u vremensko-frekvencijskoj ravni.

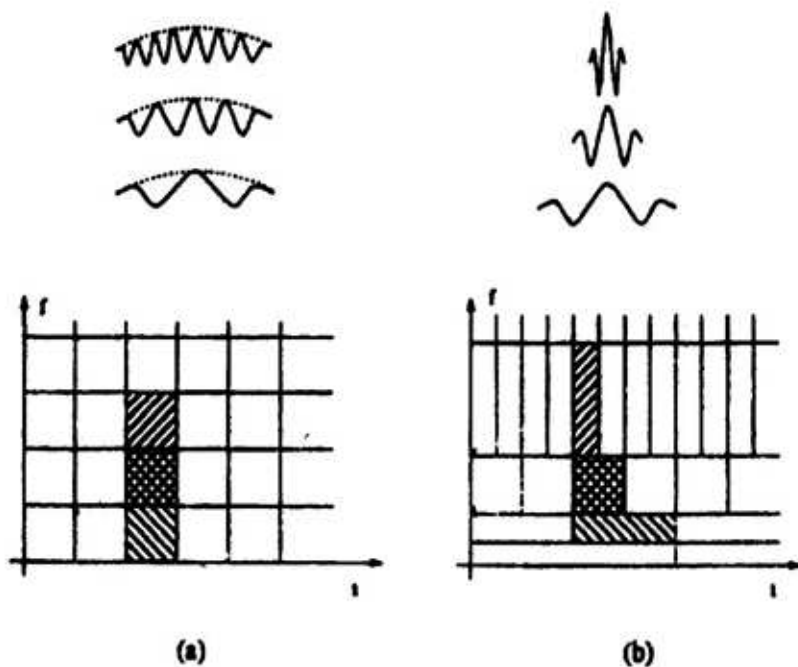
Prva dva signala sa leve strane imaju malu vremensku i veliku neodređenost frekvencije, te su predstavljeni pravougaonicima kao na slici 2. Treći signal ima manju frekvencijsku neodređenost i veću vremensku, pa je on predstavljen pravougaonikom manje visine. Ovaj signal ima mnogo veću energiju nego prethodna dva, što je naznačeno intenzivnijim zatamnivanjem njegove ćelije.

Na slici 3 prikazani su primeri baznih funkcija i odgovarajuće predstavljanje u vremensko-frekvencijskoj ravni u slučaju kratkotrajne Furijeove transformacije i talasne transformacije. Talasna transformacija daje mnogo bolju sliku signala, tj. pruža informaciju o ponašanju signala, kako u vremenskom domenu, tako i u domenu frekvencija.

Za talasnu transformaciju koriste se ortogonalne baze. Pod ortogonalnom bazom podrazumeva se skup sekvenci  $\{\varphi_i | n\}_{i \in \mathbb{Z}}$  takvih da za  $i \neq j$  važi:



Sl. 2 – Informacione ćelije u vremensko-frekvencijskoj ravni

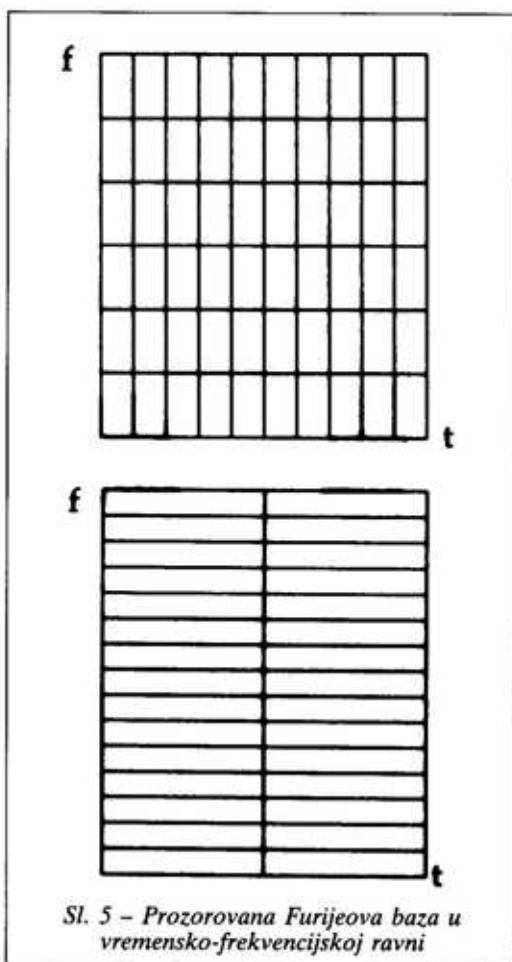
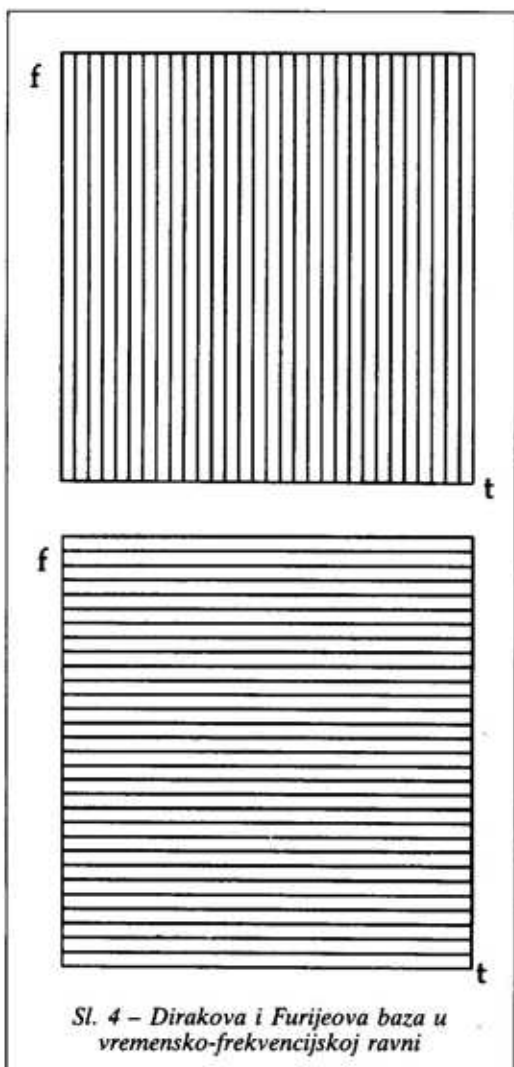


Sl. 3 – Bazne funkcije i vremensko-frekvencijska rezolucija:  
 a) kratkotrajna Furijeova transformacija, b) talasna transformacija

$$\int \varphi (nt - i) \varphi (nt - j) = 0 \quad (17)$$

U tom slučaju informacione ćelije se neće preklapati.

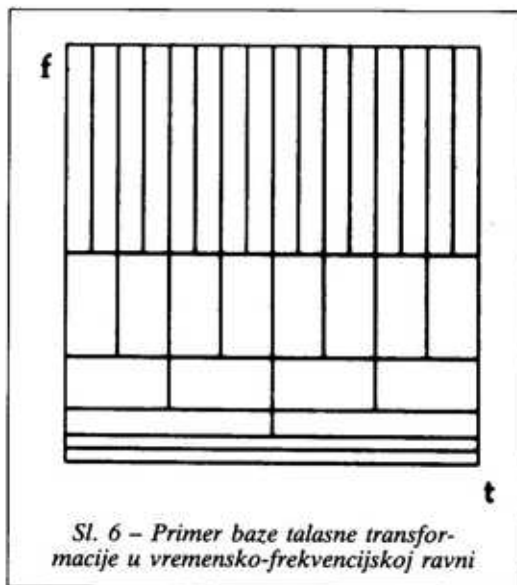
Na slikama 4 i 5 prikazani su primeri pojedinih baza predstavljenih u vremensko-frekvencijskoj ravni. Standardna Dirakova baza sadrži Dirakove impulse čiji je položaj u vremenu određen intervalom odabiranja. Ova baza ima optimalnu vremensku lokalizaciju, ali ne daje nikakvu informaciju o položaju posmatranog sig-



nala u frekvenciji. Sa druge strane je Furijeova baza kod koje je situacija obratna: ima dobru karakterizaciju signala u frekvencijskom domenu, ali nema nikakvu informaciju o ponašanju signala u vremenu.

Prozorovana ili kratkotrajna Furijeova transformacija predstavljena je informacionim ćelijama čija je širina proporcionalna širini prozora (slika 5). U slučaju talasne transformacije isti je slučaj kao na slici 6.

Relativno lako predstavljanje signala pomoću vremensko-frekvencijskih komponenti može se postići rekurzivnim algo-



ritmom deljenja koji je detaljno opisan u radu [3]. Suština je da se ulazni signal deli na dva dela, čime se zapravo vremensko-frekvencijska ravan deli na dve polovine. Da bi se to realizovalo potreban je operator koji daje ortogonalne ili nezavisne delove koji se ne preklapaju. Ovom operacijom treba ujedno izvršiti i decimaciju signala, tako da je zbir broja odbiraka signala u tim delovima jednak ukupnom broju odbiraka signala. Jedan od načina da se to ostvari je prozorovanje signala i određivanje Furijeove transformacije unutar svakog prozora. Drugi način da se ostvari dekompozicija je filtriranje konjugovanim parom filtara  $h$  i  $h^*$ , tj.  $g$  i  $g^*$ . Niskofrekvencijske komponente izdvajaju se NF filterom  $h$ , a visokofrekvencijske komponente pomoću filtera  $g$ . Nakon filtriranja signala obavlja se njegova decimacija.

### Inverzna talasna transformacija

Inverzna talasna transformacija postoji ako je ispunjen uslov definisan rela-

cijom (9), tj. ako izabrani osnovni talasić nema jednosmernu komponentu.

Da bi se došlo do izraza za inverznu transformaciju uvodi se pojam okvira. Sekvenca  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  u Hilbertovom prostoru  $H$  naziva se okvirom ako, i samo ako, za svaki signal  $x$  važi relacija:

$$A \|x\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq B \|x\|^2 \quad (18)$$

gde su  $A, B$  granice okvira i koje ne zavise od izbora signala  $x$ .

Složenom matematičkom analizom prikazanom u [1] može se doći do izraza za granice okvira. Ako važe pretpostavke:

$$0 < c_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(a_0^n \omega)|^2 \leq c_2 < +\infty \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \beta(v) &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(a_0^n \omega) \hat{\phi}(a_0^n \omega + v)| \leq \\ &\leq C (1 + |v|)^{-1-\epsilon}, \end{aligned} \quad (19b)$$

gde su  $c_1, c_2, C$  konstante, za neko  $\epsilon > 0$ , granice okvira date su izrazima:

$$A = \frac{2\pi}{b_0} \left\{ c_1 - \sum_{k \in \mathbb{Z}/(0)} \left[ \beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(\frac{2\pi}{b_t} k\right) \right]^{1/2} \right\} \quad (20a)$$

$$B = \frac{2\pi}{b_0} \left\{ c_1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}/(0)} \left[ \beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(\frac{2\pi}{b_t} k\right) \right]^{1/2} \right\} \quad (20b)$$

Granica  $A$  mora biti pozitivna veličina. Ovo uvek važi u slučaju da je  $b_0 < b_t$ , gde je  $b_t$  granična vrednost.

Signalu  $x$  dodeljuje se operator  $F$  koji preslikava svako  $x \in H$  u sekvencu  $(\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$  i operator  $F_d$  koji sekvencu



$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  preslikava u  $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e_n$ . U radu [1] pokazano je da se pomoću ova dva operatora može uvesti nova sekvenca  $\hat{e}_n$ :

$$\hat{e}_n = (F_d F)^{-1} e_n, \quad (21)$$

koja takođe, predstavlja okvir. Ovaj okvir naziva se dualnim okvirom, a njegove granice su  $A^{-1} \geq B^{-1} > 0$ .

Na osnovu matematičke analize u [1] svaki signal  $x \in H$  može se napisati u obliku:

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, e_n \rangle \hat{e}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, \hat{e}_n \rangle e_n \quad (22)$$

Dakle, za inverznu talasnu transformaciju neophodno je poznavati dualni okvir  $(\hat{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , tj. inverzni operator operatora  $F_d F$ . Postupak određivanja operatora  $F_d F$  prikazan je u radu [1].

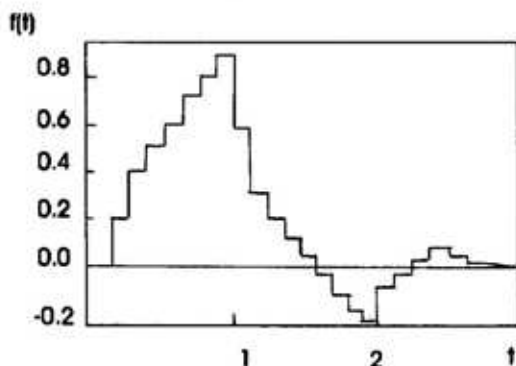
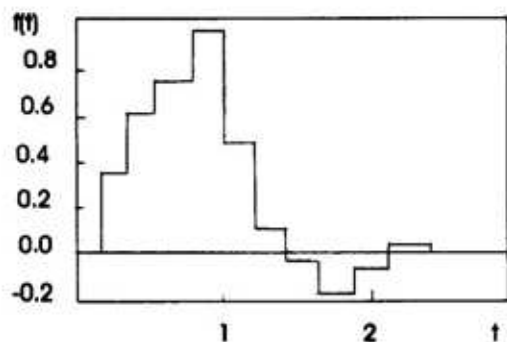
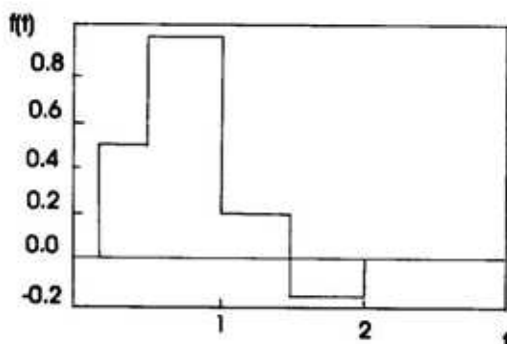
Dualni okvir  $\hat{\varphi}_{n,m} = (F_d F)^{-1} \varphi_{n,m}$  u opštem slučaju ne nastaje transliranjem i širenjem osnovnog talasića. Jedino u slučaju  $A = B$  dualni okvir je jednak osnovnom talasiću:  $\hat{\varphi}_{n,m} = A^{-1} \varphi_{n,m}$ . Normalizacijom  $\varphi_{n,m}$  može se podesiti tako da je  $A = B = 1$ , i u tom slučaju važi:

$$f(t) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{n,m} \rangle \varphi_{n,m}(t) \quad (23)$$

Ovakav okvir naziva se uskim okvirom.

### Brza talasna transformacija

Da bi neka transformacija bila od koristi potreban je brzi algoritam koji se može implementirati na računaru, linearne ili linearno-logaritamske složenosti. Takav algoritam naziva se brzom talasnom transformacijom.



Sl. 7 – Primer postepenog aproksimiranja funkcije

Jedan od načina da se ovaj zahtev realizuje je multirezoluciona analiza. Naime, ideja je da se funkcija aproksimira različitim rezolucionim nivoima. Analogna situacija nastaje u slučaju predstavljanja slike sa sve većim brojem piksela. Koefficienti talasića određuju se kao dodatni detalji kojima se poboljšava aproksimacija, tj. prelazi od grublje ka finijoj

aproksimaciji, kao što je prikazano na slici 7.

Posmatra se slučaj talasića oblika (15), pri čemu je  $a_0 = 2$  i  $b_0 = 1$ :

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (24)$$

Jedan od najstarijih primera ortogonalne baze je Harov sistem, kod kojeg je osnovni talasić, deo po deo, konstantna funkcija oblika:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2] \\ -1, & t \in (1/2, 1] \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases} \quad (25)$$

Na slici 8 dat je prikaz nekoliko talasića posmatrane baze.

Najpre će se pokazati da ovakav sistem čini ortogonalnu bazu. Za fiksnu vrednost  $j$  lako se uočava da su funkcije  $\varphi_{j,k}$  i  $\varphi_{j,k'}$ , različite od nule u intervalima koji se ne preklapaju, te je jasno da je njihov proizvod jednak nuli, tj. da su one ortogonalne. Ako se razmatra slučaj  $j' > j$ , talasić  $\varphi_{j,k}$  ima konstantnu vrednost različitu od nule u istom opsegu kao

i  $\varphi_{j',k}$ , ali je njihov proizvod ponovo jednak nuli. Dakle, talasići  $\varphi_{j,k}$  i  $\varphi_{j',k}$  su ortogonalne funkcije. Ostaje još da se pokaže da one čine bazu, odnosno da se bilo koja funkcija  $f(t)$  može predstaviti kao kombinacija talasića  $\varphi_{j,k}$  oblika:

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(t) \quad (26)$$

Uvodi se nova veličina  $A_{j,f}$  određena koeficijentima  $a_{j,k}$  koji predstavljaju konstantnu aproksimaciju funkcije na intervalu  $I_{j,k}$ , gde je  $I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Znači da je:

$$a_{j,k} = A_{j,f}/I_{j,k} = 2^j \int_{I_{j,k}} f(t) dt \quad (27)$$

Ako se posmatraju intervali  $I_{j+1,2k} = [2^{-j-1}k, 2^{-j-1}(k+1/2)]$  i  $I_{j+1,2k+1} = [2^{-j-1}(k+1/2), 2^{-j-1}(k+1)]$  uočava se da su to podintervali intervala  $I_{j,k}$  duplo manje dužine. Očigledno je  $a_{j,k}$  srednja vrednost srednjih vrednosti funkcije na datim podintervalima, tj.:

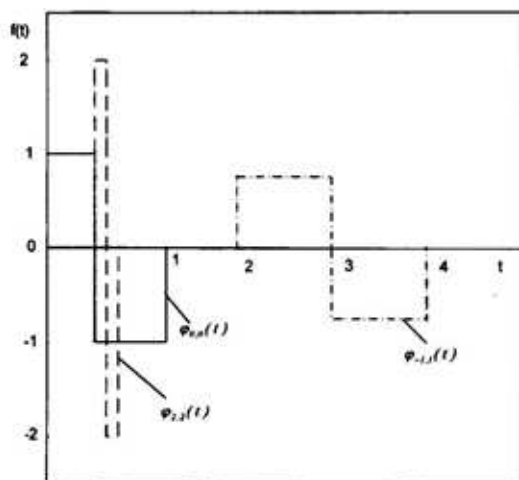
$$a_{j,k} = \frac{a_{j+1,2k} + a_{j+1,2k+1}}{2} \quad (28)$$

Pošto je usvojen odgovarajući oblik osnovnog talasića, razlika dva susedna koeficijenta  $A_{j+1,f}$  i  $A_{j,f}$  može se izraziti preko  $\varphi_{j,k}$ . Dakle, važi izraz:

$$A_{j+1,f} - A_{j,f} = \sum_k d_{j,k} \varphi_{j,k} \quad (29)$$

Na osnovu definicije veličine  $A_{j,f}$  uočava se da je

$$d_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \quad (30)$$



Sl. 8 - Primer nekoliko Harovih baznih funkcija

Ukoliko se usvoji neka fiksna vrednost  $j_1$ , može se dobiti vrednost koeficijenta  $A_{j_1}f$  pomoću grublje aproksimacije  $a_{j_0}f$ ,  $j_0 < j_1$  i dodatnog člana koji predstavlja kombinaciju talasića:

$$A_{j_1}f = A_{j_0}f + \sum_{j=j_0}^{j_1-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \quad (31)$$

Ako se u ovom izrazu pusti da npr.  $j_1 \rightarrow +\infty$  i  $j_0 \rightarrow -\infty$  dobija se izraz (26).

Cilj svake aproksimacije jeste da što bolje reprodukuje posmatranu funkciju, pa sa tog aspekta odgovara što veća vrednost  $j_1$ , odnosno što manja vrednost  $j_0$ . Međutim, u praksi se, uglavnom, sreće sa odbircima nekog signala ili sa čisto diskretnim podacima, tako da  $j_1$  i  $j_0$  najčešće imaju konačnu vrednost.

Posmatrani Harov sistem nije pogodan za veliki broj konkretnih aplikacija. Ovako usvojeni talasići nisu kontinualne funkcije i njima se ne može postići dovoljno dobra aproksimacija glatkih funkcija. Zbog toga se često, umesto razvoja funkcije preko talasića, pribegava aproksimiranju izvoda te funkcije izvodima koeficijenata  $A_j f$ . Jedan od osnovnih problema teorije baza talasića jeste konstruisanje sistema koji ima sličnu multirezoluciju strukturu kao Harova baza, ali da pri tome osnovni talasić bude regularna funkcija kako bi se postigla bolja aproksimacija razmatranih signala. Jedan od najčešće korišćenih postupaka za određivanje osnovnog talasića dat je u literaturi [1].

### Kriterijum za procenu kvaliteta aproksimacije

Osnovni cilj jeste da se funkcija  $f(t)$  aproksimira funkcijom  $f_M(t)$ , koja je linearna kombinacija  $M$  odabranih talasi-

ća. Pitanje je kojih  $M$  talasića iz beskonačnog skupa mogućih treba odabrati. U idealnom slučaju kriterijum za izbor je da razlika originalne funkcije i njene aproksimacije bude što je moguće manja, ali on nije pogodan za praktičnu realizaciju. U konkretnim situacijama kriterijum se pojednostavljuje time što se biraju koeficijenti sa najvećim apsolutnim vrednostima. Pretpostavka je da je aproksimacija:

$$f_M = \sum_{\lambda \in \Lambda_M} c_\lambda \varphi_\lambda, \quad (32)$$

gde je sa  $\Lambda_M$  označen skup talasića odabranih za analizu signala. Skup  $\Lambda_M$  u ovom slučaju sadrži indekse  $M$  najvećih talasić-koeficijenata. Kako ovaj skup indeksa zavisi od posmatrane funkcije, aproksimacija nije linearna ( $(f + g)_M \neq f_M + g_M$ ).

Ako  $M \rightarrow \infty$  aproksimacija konvergira ka  $f(t)$ . Da bi se odredio kvalitet aproksimacije, tj. koliko ona verno reprodukuje originalni signal, posmatraće se brzina konvergencije. Ona se procenjuje na osnovu parametra  $\alpha$  koji je definisan implicitno preko funkcije konvergencije  $O$ :

$$|f - f_M| = O(M^{-\alpha}). \quad (33)$$

Što je parametar  $\alpha$  veći, to je konvergencija brža, odnosno aproksimacija bolja pri istoj vrednosti  $M$ . Ako je funkcija  $f(t)$  diferencijabilna  $\alpha$  puta, parametar  $\alpha$  se može relativno lako odrediti. Signali sa kojima se u praksi susreće najčešće nisu takvi, pa je određivanje  $\alpha$  u opštem slučaju složen postupak. Aproksimacija neke funkcije, bazirana na Furijeovoj transformaciji, takođe se može procenjivati pomoću koeficijenta  $\alpha$ , koji u tom slučaju ima vrednost  $\alpha = 1$ . Ukoliko se aproksimacija obavlja pomoću talasića, vrednost koeficijenta  $\alpha$  je uvek  $\alpha \geq 2$ .

## Vrste talasića i njihova primena

Koncept talasića datira još sa početka veka. Zbog složenog matematičkog aparata koji ova transformacija podrazumeva, tek sredinom osamdesetih godina počinje se sa detaljnijim razmatranjem mogućnosti njene primene. Jedna od oblasti u kojoj su talasići našli svoju primenu jeste kompresija signala i kodovanje u podopsegu, uglavnom za audio-signale i signal govora. Kodovanje pomoću talasića naročito je zanimljivo, jer pruža mogućnost dekodovanja samo dela signala kako bi se dobila njegova aproksimacija. Priroda audio signala i signala govora su različite, ali je u oba slučaja prijemnik isti – ljudsko uvo. Šematski prikazano ljudsko uvo u osnovi predstavlja banku filtera sa određenim nelinearnim efektima. Upravo zbog toga kodovanje ovakvih signala pomoću talasića je najbolje rešenje.

Ovakvi algoritmi za kodovanje koriste se i za signal slike. Nekada su ti algoritmi bili konstruisani tako da je eksploatisana jedino osobina talasića da signal razloži na statistički nezavisne opsege, tj. primenjivana su samo svojstva talasića vezana za frekventijsku lokalizaciju signala. Novije varijante algoritama kodovanja koriste mogućnosti i prostorne i frekventijske lokalizacije. Talasići se koriste i za kodovanje slike i video signala koji se prenose preko telefonskih linija, zemaljskih kanala za difuziju, ili preko mreža poput ATM-a i INTERNET-a.

U prethodnim odeljcima navedene su osnovne karakteristike talasne transformacije i osobine koje treba da zadovoljavaju funkcije pomoću kojih se vrši dekompozicija posmatranog signala. Postoji više grupa funkcija za koje važe dati

uslovi, a za sada se najčešće koristi pet kategorija funkcija.

### 1. Funkcije nastale transliranjem i širenjem jedne funkcije

Ovo su klasični talasići koji se za sada najviše koriste u praksi, jer se prirodno uklapaju u koncept multirezolucione analize.

### 2. Paketi talasića

Ova grupa funkcija predstavlja proširenje klasičnih talasića. Osnovna osobina je mogućnost primene baza sa boljom frekventijskom lokalizacijom, ali je sa druge strane sama transformacija nešto složenija.

### 3. Lokalne trigonometrijske baze

Osnovna ideja jeste da se za bazne funkcije uzmu prostoperiodične funkcije definisane na nekom konačnom intervalu, pri čemu se koristi poseban metod za povezivanje baznih funkcija na krajnjim tačkama intervala definisanosti.

### 4. Multitalasići

U ovom slučaju ne barata se samo sa jednom funkcijom i njenim proširenim i transliranim oblicima, već nekim konačnim brojem funkcija, pri čemu je taj broj veći od jedan. Na taj način može se dobiti veliki broj različitih kombinacija sa vrlo dobrim osobinama koje nije moguće postići klasičnim talasićima.

### 5. Druga generacija talasića

Ovde se potpuno napušta ideja transliranja i širenja nekoliko jednostavnijih

talasnih oblika, talasići su potpuno različiti signali. Ovako konstruisane baze prevazilaze većinu problema koji se susreću u ostalim slučajevima, ali je postupak generisanja takvih baza, kao i analiza signala pomoću njih vrlo komplikovana.

## Zaključak

Talasna transformacija u velikom broju slučajeva daje bolje rezultate od Furijeove transformacije koja se do sada najčešće primenjivala. Ovakva transformacija daje podatke o ponašanju signala u vremenskom domenu i u domenu frekvencija, a aproksimacija pomoću talasić-koeficijenta mnogo brže konvergira ka posmatranom signalu. Talasići uvode u oblast obrade nestacionarnih, neuniformnih signala, odnosno oblast koja je mnogo šira od oblasti vremenski invarijantne obrade gde glavno oruđe predstav-

lja upravo Furijeova transformacija. Talasići su, za sada, našli svoju glavnu primenu u oblasti kodovanja u podopsegu, dok je njihova primena u oblasti komunikacija još uvek prilično zanemarena. Trenutno se razmatra mogućnost primene talasića za transmupleksere, tj. za prenos više različitih signala po jednom kanalu.

### Literatura:

- [1] Cohen, A. and Kovačević J.: Wavelets: The Mathematical Background, Proc. of the IEEE, Vol. 84, No. 4, April 1996, pp. 514-522.
- [2] Sweldens, W.: Wavelets: What Next?, Proc. of the IEEE, Vol. 84, No. 4, April 1996, pp. 680-685.
- [3] Hess N. - Nielsen and Wickerhauser, M. V.: Wavelets and Time-Frequency Analysis, Proc. of the IEEE, Vol. 84, No. 4, April 1996, pp. 523-540.
- [4] Ramchandran, K., Vetterli, M. and Herley, C.: Wavelets, Subband Coding and Best Bases, Proc. of the IEEE, Vol. 84, No. 4, April 1996, pp. 541-558.
- [5] Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets, Philadelphia: SIAM, 1992.
- [6] Mallat, S.: Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models, IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 37, December 1989, pp. 2091-2110.