

Profesor dr Miroslav Demić,*
dipl. inž.
Mašinski fakultet,
Kragujevac
Mr Jovanka Lukić,
dipl. inž.
Mašinski fakultet,
Kragujevac
Profesor
dr Constantinos Spentzas,
National Technical University
of Athens, Greece

FORMALIZOVANO MODELIRANJE UPRAVLJIVOSTI MOTORNIH VOZILA

UDC: 629.1.075:519.711

Rezime:

U ovom radu prikazana je primena simboličke matematike i programa za automatsko generisanje diferencijalnih jednačina pri modeliranju upravljivosti vozila. Pri tome je metoda najpre verifikovana na poznatom Rokardovom modelu vozila, a zatim je razvijen formalizovani postupak za modeliranje upravljivosti vozila. Analize su pokazale da se korišćeni postupak može uspešno primeniti u ovakvim slučajevima, pri čemu se javljaju teškoće pri uključivanju elasto-prigušnih elemenata u razmatranje, a što je u vezi sa performansama računara.

Ključne reči: vozilo, dinamika, upravljivost, automatsko modeliranje.

FORMALIZED MODELLING OF VEHICLE HANDLING

Summary:

In this paper an application of symbolic mathematics and procedure for automated setting of differential equations of vehicle handling were shown. The method was verified on the Rocard's model and the formalizam for vehicle handling modelling was developed. The analysis showed that the used procedure can be applied in these cases, but there are some difficulties when elasto-damping elements are included and they are caused by PC performances.

Key words: vehicle, dynamics, handling, automated modelling.

Uvod

Upravlјivost spada u grupu veoma značajnih parametara za sveobuhvatniju ocenu karakteristika motornih vozila. Zbog toga se analizi parametara upravljivosti poklanja velika pažnja, još u fazi projektovanja vozila. Pri tome značajnu ulogu imaju metode dinamičke simulacije koje se zasnivaju na modeliranju vozila.

Opisivanje dinamičkog ponašanja vozila, zbog njegove složenosti i postojanja velikog broja podsistema, predstavlja veliki problem. Da bi se pomenuta aktivnost olakšala, poslednjih desetak godina veoma se intenzivno radi na definisanju postupaka i izradi programa za automatsko generisanje diferencijalnih jednačina za opisivanje kretanja dinamičkih sistema. U tome posebno mesto zauzimaju manipulatori, ali postoje pokušaji i kod vozila. Ovi postupci naročito su popularni kod stručnjaka u razvijenim zemljama

* Autor je redovni član Inženjerske akademije Jugoslavije, akademik Akademije transporta i Akademije kvaliteta Ruske Federacije.

sveta [11, 13, 17–20, 26]. U našoj zemlji, takođe, postoje rezultati u ovoj oblasti [13, 26], ali se oni odnose prvenstveno na opisivanje dinamike manipulatora. Kako kod nas postoji potreba za analizom dinamike vozila, ovde je razvijen postupak za formalizovano modeliranje upravljivosti vozila, na bazi dograđenog programa iz [13]. Treba naglasiti da se diferencijalne jednačine dobijaju u analitičkom kovarijantnom obliku, i da se mogu koristiti za različite simulacije ponašanja vozila.

U radu su, kao primer, posmatrana dva slučaja kretanja vozila: ravansko i prostorno.

Modeliranje vozila

U literaturi [1, 3, 4, 6, 9, 15, 21, 22] postoji veći broj modela za analizu upravljivosti vozila. Njihova struktura kreće se od jednostavnih (model bicikla) [3, 21, 22], do veoma složenih prostornih modela [1, 9]. Opisivanje složenog prostornog kretanja vozila, kao i sistema većeg broja masa, međusobno povezanih elasto-prigušnim elementima, predstavlja veliki problem. Pri tome se, svakako, mogu učiniti i određene greške, tako da su dobijeni rezultati praktično neupotrebiljivi. Zbog toga se poslednjih godina čine pokušaji da se proces generisanja diferencijalnih jednačina automatizuje. U tom smislu razvijen je veći broj programskih paketa, kao na primer: NUBEM, SYM, CAMS, AUTOLEV, NEWEUL, AUTODYN, MEDINA, SIMPACK, DYMAC, DYSAMP, MESA VERDE, ADAMS, PLEXUS, AUTOSIM i dr.

Većina nabrojanih programa automatski postavlja diferencijalne jednačine kretanja dinamičkih sistema i numerički ih rešava. Neki od njih uzimaju u obzir i

probleme elastodinamike. Vredi napomenuti da su cene pomenutih paketa izuzetno visoke (do 20 000 USA \$), te su vrlo nedostupni.

Dati programi prvenstveno su namenjeni za analizu manipulatora, a samo neki od njih za simulaciju dinamike vozila [17–19]. Imajući u vidu ove činjenice napori su usmereni na dogradnju programa iz [13], koji je namenjen prvenstveno modeliranju manipulatora, u analitičkom obliku. Ovaj programski paket dobijen je korišćenjem Lagranžeovih diferencijalnih jednačina druge vrste [13] i simboličke matematike [27], a dogradnja se sastojala u proširenju mogućnosti definisanja generalisanih sila, radi stvaranja mogućnosti za rešavanje problema neholonomnih sistema. Time je na drugačiji način obuhvaćen uticaj težine na parametre kretanja dinamičkih sistema. Uz to je uvedena i mogućnost modeliranja nelinearnih opruga i amortizera, što u [13] nije bio slučaj.

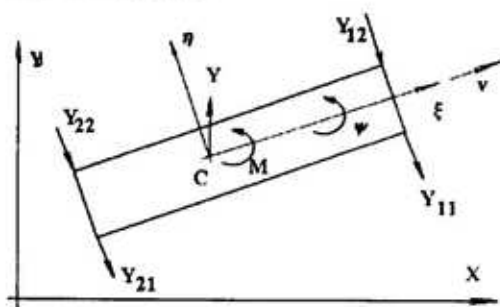
Za analizu upravljivosti vozila, u ovom radu je učinjen pokušaj da se zahvaljujući izmenama, kao i primeni određenih formalizama, program primeni za generisanje diferencijalnih jednačina kretanja vozila (upravljivost). Pri tome treba imati u vidu da je program postavljen tako da sva kretanja krutog tela opisuje u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. To dovodi do određenih problema, jer se većina modela koji se koriste pri analizi upravljivosti vozila definišu u odnosu na pokretni koordinatni sistem [6, 21, 22]. Problem se može prevazići daljom dogradnjom programa iz [13], što nije ocenjeno celishodnim. Naime, u ovom radu prvenstveno se želelo pokazati da se program razvijen za opisivanje dinamike manipulatora može koristiti za analitičko opisivanje modela za analizu

upravljalivosti vozila. Zbog toga će se modeli vozila definisati u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, što nije tako često u praksi [4].

Radi verifikacije korišćenog formalizma posmatran je model vozila koji je razvio Rokard, jer je on definisan u odnosu na nepokretni koordinatni sistem.

Rokardov model vozila

Jedan od najstarijih modela za analizu upravljalivosti vozila je Rokardov model [4] koji je ovde prikazan u najužem obliku. Radi dalje analize posmatran je model na slici 1.



Sl. 1 - Rokardov model

Rokard je pretpostavio da se vozilo bez zaokretanja kreće konstantnom brzinom v . Radi opisivanja kretanja vozila uvedena su dva koordinatna sistema: nepokretni XOY i pokretni (vezan za vozilo) $\xi C\eta$. Neka su koordinate težišta vozila C , u odnosu na nepokretni koordinatni sistem x i y . Prema slici 1 koordinate prednjih točkova su:

$$x_{1,2} = x + a \cos(\psi) \pm d \sin \psi, \quad (1)$$

$$y_{1,2} = y + a \sin(\psi) \pm d \cos \psi. \quad (2)$$

Za male uglove može se napisati da je [4]:

$$x_{1,2} = x + a \pm d \psi, \quad (3)$$

$$y_{1,2} = y + a \psi \pm d. \quad (4)$$

Ugao povodenja prednjih točkova može se izračunati iz izraza [4]:

$$\delta_{1,2} = \frac{dy/dt}{dx/dt} - \psi. \quad (5)$$

Pošto je $dx/dt \approx v$, znači da je:

$$\delta_{1,2} = \frac{\dot{y} + a\dot{\psi}}{v} - \psi. \quad (6)$$

Oдавде se može zaključiti da su za mala pomeranja uglovi povodenja prednjih točkova međusobno jednaki. Koordinate zadnjih točkova date su relacijama:

$$x_{3,4} = x - b \cos \psi \pm d \sin \psi, \quad (7)$$

$$y_{3,4} = y - b \sin \psi \pm d \cos \psi. \quad (8)$$

Za mala pomeranja imamo, [4]:

$$x_{3,4} = x - b \pm d \psi, \quad (9)$$

$$y_{3,4} = y - b \psi \pm d. \quad (10)$$

Uglovi povodenja zadnjih točkova su:

$$\delta_{3,4} = \frac{dy/dt}{dx/dt} - \psi, \quad (11)$$

na osnovu čega sledi da je:

$$\delta_{3,4} = \frac{\dot{y} - b\dot{\psi}}{v} - \psi. \quad (12)$$

Rokard je pretpostavio da su uglovi povodenja mali, tako da su bočne sile pneumatika njima proporcionalne. Tada

se dobijaju diferencijalne jednačine kretanja vozila u obliku [4]:

$$m\ddot{y} = c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + Y, \quad (13)$$

$$I_2\ddot{\psi} = ac_1\delta_1 - bc_2\delta_2 + N, \quad (14)$$

gde su Y i N odgovarajuće rezultujuće bočne sile i momenti u odnosu na težište vozila. U slučaju da su one jednake nuli, diferencijalne jednačine dobijaju oblik:

$$m\ddot{y} = c_1\delta_1 + c_2\delta_2, \quad (15)$$

$$I_2\ddot{\psi} = ac_1\delta_1 - bc_2\delta_2. \quad (16)$$

Pri analizama ovih jednačina treba imati u vidu da su one definisane za male uglove i da veličine $c_1\delta_1$ i $c_2\delta_2$ predstavljaju rezultujuće bočne sile pneumatika za prednju i zadnju osovinu. Dobijeni modeli mogu se i dalje proširivati, što nije bio cilj ovog rada, a detaljnije informacije mogu se naći u [4].

Formalizovani model vozila sa tri stepena slobode kretanja

Pri simboličkom modeliranju dinamičkih sistema oni se prikazuju strukturom drveta ili grafovima [11, 13, 17–20, 26]. U [13] dinamički sistem je predstavljen pomoću strukture drveta.

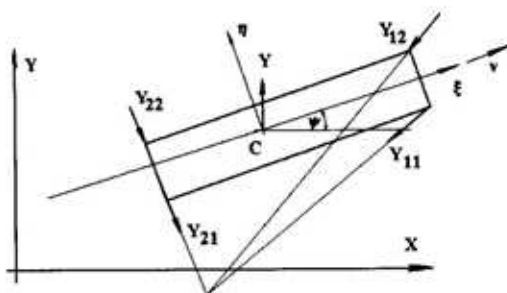
Posmatraće se nešto širi model (u osnovi sličan Rokardovom) sa slike 2, koji ima tri stepena slobode kretanja. Imajući u vidu da svaki segment u strukturi drveta dopušta jedan stepen slobode kretanja [8], vozilo u formalizovanom obliku ima tri segmenta, kao što je prikazano na slici 3.

Generalisane koordinate x , y ($q[1]$ i $q[2]$) opisuju segmente 1 i 2 sa translatornim zglobovima a i b , a koordinatu ψ

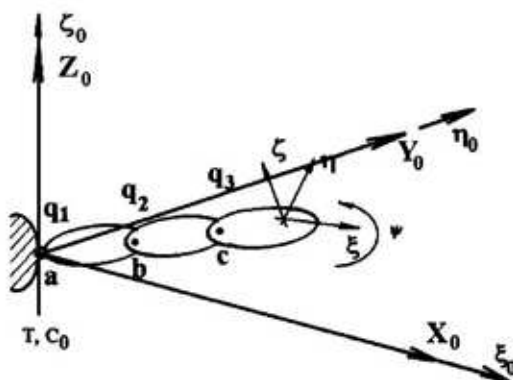
($q[3]$) segment 3 sa rotacionim zglobovom c . Masa vozila M i moment inercije J_z pridodati su segmentu 3. Ovom segmentu pridodate su i sve bočne sile (Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} i Y_{22}), kao i težina G , čije su projekcije i koordinate napadnih tačaka fiksirane u lokalnom koordinatnom sistemu $\xi C\eta$. Radi ilustracije pripremljena je datoteka za unos podataka u skladu sa [13], a koja je prikazana u tabeli 1.

Aktiviranjem dograđenog programa iz [13] u simboličkoj matematici [27], posle nekoliko minuta rada računara Pentium 90 MHz, dobijene su diferencijalne jednačine u kovarijantnom obliku, prikazane u tabeli 2.

Analizom dobijenih jednačina može se utvrditi da su one, po svom karakteru, slične onima iz modela Rokarda. Razlike su se javile zbog toga što u ovom radu



Sl. 2 – Prošireni Rokardov model



Sl. 3 – Struktura drveta za Rokardov model

Tabela 1

| | |
|----------------------------|---|
| brojka= 3 | m[2]=0 |
| l= {0, 1, 2} | m[3]=M |
| ksl= {1, 1, 0} | J[1]= {(0,0,0), (0,0,0), (0,0,0)} |
| e[1]= {1, 0, 0} | J[2]= {(0,0,0), (0,0,0), (0,0,0)} |
| e[2]= {0, 1, 0} | J[3]= {(Jx, 0, 0), (0, Jy, 0), (0, 0, Jz)} |
| e[3]= {0, 0, 1} | brojsila= 5 |
| ro[0, 1]= {0, 0, 0} | sila[1]= {3, (a, d, 0), (-Y11 Sin[q], Y11 Cos[q], 0)} |
| ro[1, 2]= {0, 0, 0} | sila[2]= {3, (a, -d, 0), (-Y12 Sin[q], Y12 Cos[q], 0)} |
| ro[2, 3]= {0, 0, 0} | sila[3]= {3, (-b, d, 0), (0, Y21, 0)} |
| ro[1]= {0, 0, 0} | sila[4]= {3, (-b, -d, 0), (0, Y22, 0)} |
| ro[2]= {0, 0, 0} | sila[5]= {3, (0, 0, 0), (0, 0, -G)} |
| ro[3]= {0, 0, 0} | brojopr= 0 |
| m[1]=0 | Null; |

Tabela 2

$$\begin{aligned}
 Out(10) = & (-50.0 + M qdd[1]) + (Y11 + Y12) \sin[q] == 0, \\
 & -Y21 - Y22 - (Y11 + Y12) \cos[q] - 50.0 + M qdd[2] == 0, \\
 & -1.0 - 1.(-b Y21) - 1.(-b Y22) - \\
 & 1.(a Y11 \cos[q] + d Y11 \sin[q]) - 1.(a Y12 \cos[q] - d Y12 \sin[q]) + Jz qdd[3] == \\
 & 0)
 \end{aligned}$$

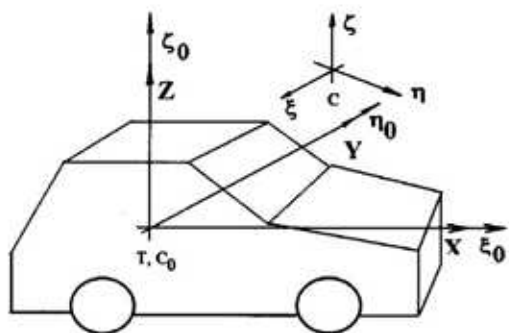
nisu pretpostavljena mala pomeranja. Na osnovu toga može se zaključiti da se program iz [13] može koristiti za generisanje diferencijalnih jednačina za analizu upravljivosti vozila.

Model vozila sa šest stepeni slobode kretanja

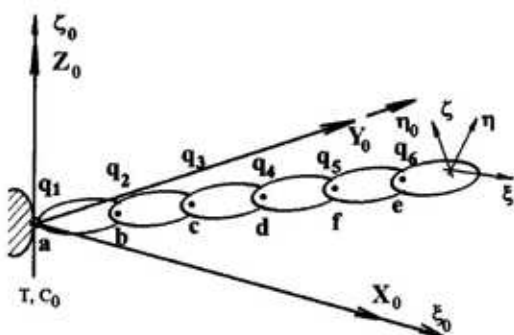
Posmatran je složeniji slučaj prostornog kretanja vozila. Da bi se definisao prostorni položaj vozila, neophodno je uvesti odgovarajuće koordinatne sisteme.

Uvođenje koordinatnih sistema

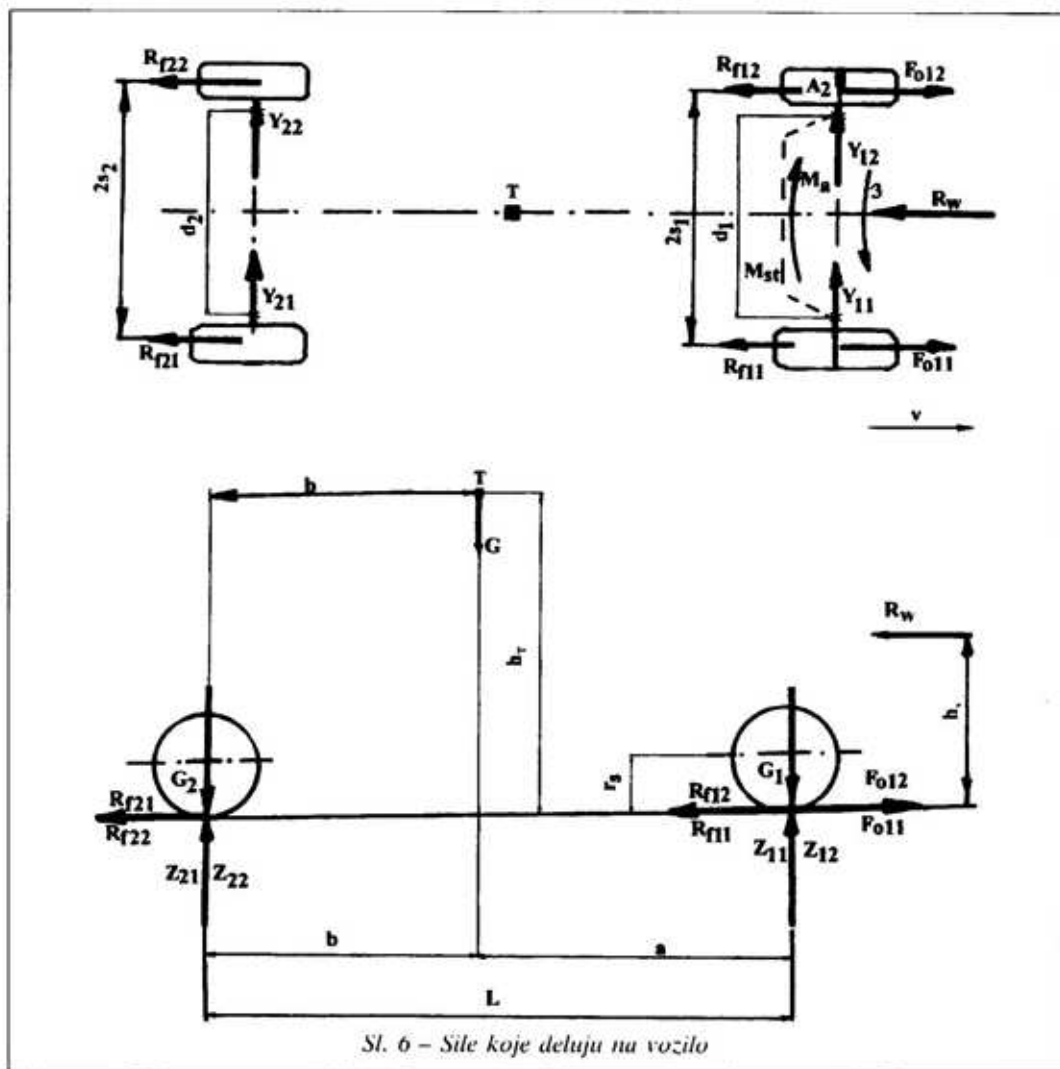
Posmatran je opšti slučaj prostornog kretanja vozila koje će se aproksimirati krutim telom konačnih dimenzija. Pri tome važi pretpostavka da se ono kreće po putu sa makroreljefom koji je karakterisan krivinama, uzdužnim i poprečnim nagibima kolovoza. Pošto ovde nije cilj proučavanje vibracija vozila, uticaj mikroreljefa puta na kretanje vozila biće zanemareno. Za opisivanje kretanja vozila u datim uslovima, potrebno je uvesti



Sl. 4 – Medusobni položaj nepokretnog (globalnog) i pokretnog (lokalnog) koordinatnog sistema



Sl. 5 – Simboličko predstavljanje vozila strukturom drveta



6 nezavisnih generalisanih koordinata. Radi toga usvaja se nepokretni koordinatni sistem Txyz (globalni koordinatni sistem), čiji se koordinatni početak u početnom trenutku poklapa sa težištem vozila, a ravan Txy je horizontalna. Uvodi se i pokretni (lokalni) koordinatni sistem $C_0\xi_0\eta_0\zeta_0$ koji se u početnom trenutku poklapa sa globalnim koordinatnim sistemom.

Zbog kretanja vozila, težište T će se naći posle vremena t u položaju C definisanom nezavisnim generalisanim koordinatama $q[1]$, $q[2]$ i $q[3]$ u odnosu na globalni koordinatni sistem. Usled prostornog kretanja vozila, a i zbog bočnog nagiba $q[4]$, podužnog nagiba puta $q[5]$ i zaokretanja vozila $q[6]$ lokalni koordinatni sistem zauzeće položaj $C\xi\eta\zeta$. Očigledno je da je sada prostorni položaj vozila potpuno definisan. Radi ilustracije, međusobni položaj uvedenih koordinatnih sistema prikazan je na slici 4.

Generalisane koordinate $q[1]$, $q[2]$ i $q[3]$ opisuju segmente 1, 2 i 3 sa translacionim zglobovima a, b i c, a koordinate $q[4]$, $q[5]$ i $q[6]$ segmente 4, 5 i 6 sa rotacionim zglobovima d, e i f. Masa vozila M biće pridodata segmentu 6, dok će segmenti 1 do 5 formalno imati nulte mase i nulte dimenzije.

Na isti način definisani su i tenzori momenata inercije, pri čemu se pretpostavlja da ose ξ , η i ζ predstavljaju glavne ose inercije vozila, pa su centrifugalni momenti inercije jednaki nuli.

Treba napomenuti da su momenti inercije, sile i njihove napadne tačke definisani u lokalnom koordinatnom sistemu (slika 6). Radi ilustracije, pripremljena je datoteka za unos podataka, koja je prikazana u tabeli 3.

Aktiviranjem dograđenog programa iz [13] u simboličkoj matematici [27],

```

broj_tela = 6
i = (0, 1, 2, 3, 4, 5)
ksi = (1, 1, 1, 0, 0, 0)
e[1] = (1, 0, 0)
e[2] = (0, 1, 0)
e[3] = (0, 0, 1)
e[4] = (1, 0, 0)
e[5] = (0, 1, 0)
e[6] = (0, 0, 1)
ro[0, 1] = (0, 0, 0)
ro[1, 2] = (0, 0, 0)
ro[2, 3] = (0, 0, 0)
ro[3, 4] = (0, 0, 0)
ro[4, 5] = (0, 0, 0)
ro[5, 6] = (0, 0, 0)
ro[1] = (0, 0, 0)
ro[2] = (0, 0, 0)
ro[3] = (0, 0, 0)
ro[4] = (0, 0, 0)
ro[5] = (0, 0, 0)
ro[6] = (0, 0, 0)
m[1] = 0
m[2] = 0
m[3] = 0
m[4] = 0
m[5] = 0
m[6] = M
J[1] = ((0, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0))
J[2] = ((0, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0))
J[3] = ((0, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0))
J[4] = ((0, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0))
J[5] = ((0, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0))
J[6] = (J[1, 0, 0], (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 3))
broj_sila = 12
sila[1] = (6, (a, s1, -ht), (-Rf11, 0, 0))
sila[2] = (6, (a, s1, -ht), (-Rf12, 0, 0))
sila[3] = (6, (-b, s2, -ht), (-Rf21, 0, 0))
sila[4] = (6, (-b, s2, -ht), (-Rf22, 0, 0))
sila[5] = (6, (a, 0, hv-hc), (-Rv, 0, 0))
sila[6] = (6, (a, s1, -ht), (Fo11, 0, 0))
sila[7] = (6, (a, s1, -ht), (Fo12, 0, 0))
sila[8] = (6, (a, s1, -ht), (0, -Y11, 0))
sila[9] = (6, (a, s1, -ht), (0, -Y12, 0))
sila[10] = (6, (-b, s2, -ht), (0, -Y21, 0))
sila[11] = (6, (-b, s2, -ht), (0, -Y22, 0))
sila[12] = (6, (0, 0, 0), (G Cos[q[4]] Cos[q[6]] Sin[q[5]]
-G Sin[q[4]] Sin[q[6]] -G Cos[q[6]] Sin[q[4]]
-G Cos[q[4]] Sin[q[5]] Sin[q[6]], -G Cos[q[4]] Cos[q[5]]))
broj_ogruga = 0
Null

```

dobijene su diferencijalne jednačine u kovarijantnom obliku prikazanom u tabeli 4.

Analizom dobijenih jednačina utvrđeno je da su one međusobno spregnute i da u njima figurišu neholonomne veze. Radi njihovog rešavanja moraju biti tran-

$$\begin{aligned}
Out_{(2\text{e}7)} = & \{-Fo11 - Fo12 + Rf11 + Rf12 + Rf21 + Rf22 + Rv - \\
& 8O.0 - O.(-ht Y11) - O.(-ht Y12) - O.(-ht Y21) - O.(-ht Y22) + \\
& Mqdd[1] - G \cos[q[4]] \cos[q[6]] \sin[q[5]] + G \sin[q[4]] \sin[q[6]] == 0, \\
Y11 + Y12 + Y21 + Y22 - 5O.0 - O.(-Fo11 ht) - O.(-Fo12 ht) - \\
& O.(ht Rf11) - O.(ht Rf12) - O.(ht Rf21) - O.(ht Rf22) - O.((ht - hv) Rv) + \\
& Mqdd[2] + G \cos[q[6]] \sin[q[4]] + G \cos[q[4]] \sin[q[5]] \sin[q[6]] == 0, \\
G \cos[q[4]] \cos[q[5]] - 2O.0 - O.(-Fo11 s1) - \\
& O.(Fo12 s1) - O.(Rf11 s1) - O.(-Rf12 s1) - O.(Rf21 s2) - O.(-Rf22 s2) - \\
& O.(-a Y11) - O.(-a Y12) - O.(b Y21) - O.(b Y22) + Mqdd[3] == 0, \\
-8I.0 - 1.(-ht Y11) - 1.(-ht Y12) - 1.(-ht Y21) - \\
& 1.(-ht Y22) + J3 qdd[4] + J2 \cos[q[5]]^2 qdd[4] - J3 \cos[q[5]]^2 qdd[4] + \\
& J1 \cos[q[5]]^2 \cos[q[6]]^2 qdd[4] - J2 \cos[q[5]]^2 \cos[q[6]]^2 qdd[4] + \\
& J3 qdd[6] \sin[q[5]] + (J1 - J2) \cos[q[5]] \cos[q[6]] qdd[5] \sin[q[6]] == 0, \\
-1.0 - 1.((ht - hv) Rv \cos[q[4]]) - \\
& 1.(-a Y11 \sin[q[4]]) - 1.(-a Y12 \sin[q[4]]) - 1.(b Y21 \sin[q[4]]) - \\
& 1.(b Y22 \sin[q[4]]) - 1.(-Fo11 (ht \cos[q[4]] + s1 \sin[q[4]])) - \\
& 1.(-Fo12 ht \cos[q[4]] + Fo12 s1 \sin[q[4]]) - \\
& 1.(ht Rf11 \cos[q[4]] + Rf11 s1 \sin[q[4]]) - \\
& 1.(ht Rf12 \cos[q[4]] - Rf12 s1 \sin[q[4]]) - \\
& 1.(ht Rf21 \cos[q[4]] + Rf21 s2 \sin[q[4]]) - \\
& 1.(ht Rf22 \cos[q[4]] - Rf22 s2 \sin[q[4]]) + \\
& J1 qdd[5] + (-J1 + J2) \cos[q[6]]^2 qdd[5] + \\
& \cos[q[5]] qd[4] (J3 qd[6] + (-J2 + J3 + (-J1 + J2) \cos[q[6]]^2) qd[4] \sin[q[5]]) + \\
& (J1 - J2) \cos[q[6]] (\cos[q[5]] qdd[4] - qd[4] qd[5] \sin[q[5]]) \sin[q[6]] == 0, \\
-1.0 - 1.((ht + hv) Rv \cos[q[5]] \sin[q[4]]) - \\
& 1.(Rf11 \cos[q[5]] (s1 \cos[q[4]] - ht \sin[q[4]])) - \\
& 1.(Rf21 \cos[q[5]] (s2 \cos[q[4]] - ht \sin[q[4]])) - \\
& 1.(Fo11 \cos[q[5]] (-s1 \cos[q[4]] + ht \sin[q[4]])) - \\
& 1.(Fo12 \cos[q[5]] (s1 \cos[q[4]] + ht \sin[q[4]])) - \\
& 1.(-Rf12 \cos[q[5]] (s1 \cos[q[4]] + ht \sin[q[4]])) - \\
& 1.(-Rf22 \cos[q[5]] (s2 \cos[q[4]] + ht \sin[q[4]])) - \\
& 1.(Y21 (b \cos[q[4]] \cos[q[5]] - ht \sin[q[5]])) - \\
& 1.(Y22 (b \cos[q[4]] \cos[q[5]] - ht \sin[q[5]])) - \\
& 1.(-Y11 (a \cos[q[4]] \cos[q[5]] + ht \sin[q[5]])) - \\
& 1.(-Y12 (a \cos[q[4]] \cos[q[5]] + ht \sin[q[5]])) + J3 qdd[6] + \\
& J3 qdd[4] \sin[q[5]] + (J1 - J2) (\cos[q[5]] \cos[2q[6]] qd[4] qd[5] - \\
& \cos[q[6]] (\cos[q[5]]^2 qd[4]^2 - qd[5]^2) \sin[q[6]]) == \\
& 0)
\end{aligned}$$

sformisane i uvedena u razmatranje i dodatna ograničenja neholonomnih veza (npr. bočne sile, sila otpora kotrljanja i sl.). Kako je cilj rada bio da se ukaže na mogućnost generisanja diferencijalnih jednačina kretanja vozila (upravljalivost), imajući u vidu da su postupci definisanja neholonomnih veza poznati iz [1, 4, 6, 14], ocenjuje se da je njihovo uvođenje u ovaj model neizbežno. Diferencijalne jednačine pokazuju da se dograđeni program iz [13] može koristiti za generisanje diferencijalnih jednačina za opisivanje upravljivosti vozila. Treba naglasiti da se u modeliranje može uključiti i upravljanje vozilom. Postupak bi se sastojao u tome da se u izraze za bočne sile $Y_{i,j}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) uključi ugao zaokretanja točka upravljača δ . Pošto cilj ovog rada nije bila dalja analiza upravljivosti uz pomoć razvijenog modela, već samo definisanje postupka za automatizovano formalizovano modeliranje, to ovde neće biti učinjeno, tim pre što su ovi postupci poznati iz literature [4, 6, 9, 17, 20, 21, 22].

Treba naglasiti da neki modeli [22, 24] u obzir uzimaju tzv. „plivanje“ koje je definisano pravcem trenutne brzine težišta u odnosu na podužnu osu simetrije vozila (zbog bočne elastičnosti pneumatika tokom zaokretanja). Ovaj slučaj nije analiziran zbog činjenice da se pomenuti fenomen može uključiti u analizu dodatnim kinematskim vezama ili uvođenjem jednog stepena slobode kretanja (novog segmenta nultih parametara inercije), čija bi se kinematika detaljnije definisala iz uslova zaokretanja vozila [8].

Analize su pokazale da se program može koristiti i u slučaju da se uvedu elasto-prigušni elementi, ali u tom slučaju vreme realizacije je mnogo duže. Pri

tome stečeno iskustvo pokazuje da se javlja i ograničenje vezano za performanse računara.

Zaključak

Na osnovu prethodnih analiza može se zaključiti da se program iz [13], uz odgovarajuće izmene, može koristiti za automatsko generisanje diferencijalnih jednačina kretanja vozila. Pored toga, razvijeni formalizovani postupak i mogućnost uvođenja neholonomnih veza omogućavaju analizu upravljivosti vozila.

Formalizovano modeliranje i simbolička matematika pokazuju slabosti u slučajevima uvođenja većeg broja elasto-prigušnih elemenata u model.

Literatura:

- [1] Čučuz, N., Rusov, L.: Dinamika motornih vozila, Privredni pregled, Beograd, 1973.
- [2] Čudakov, E. A.: Izabranie Trudi 1-2, AN SSSR, 1961.
- [3] Demić, M.: Teorija kretanja motornih vozila, Tehnički fakultet u Čačku, 1999.
- [4] Ellis, J. R.: Vehicle Dynamics, Bussines Books, London, 1973.
- [5] Ghazizadeh, A., Fahim, A., El Gindy, M.: Neural network representation of a vehicle model, Neuro-Vehicle (NV), Int. Journal of Vehicle Design, vol. 17, No 1., 1996.
- [6] Gillespie, T.: Fundamentals of Vehicle Dynamics, SAE, 1990.
- [7] Golubović, D.: Development methodology of nonlinear models for qualitative estimate vehicle stability control, MVM, No3, 1992.
- [8] Golubović, D.: Dinamika sistema – stabilnost upravljanja automobila, monografija, TF Čačak, 1990.
- [9] Hačaturov, A. A. et al: Dinamika sistemi: daroga-avtomobil – šina-voditelj, Mašinstrojenije, Moskva, 1970.
- [10] Long, R. R.: Engineering Science Mechanics, Prentice – Hall, 1963.
- [11] Keeskemety, A. i dr.: Symbolic Processing of Multiloop Mechanism Dynamics Using closed Form Kinematics Solutions, Multibody System Dynamics, No. 1, 1997.
- [12] Min, S. K. et al.: Multibody Dynamics Response Optimization with ALM and Approximate Line Search, Multibody System Dynamics, No. 1, 1997.
- [13] Marković, S.: Automatsko formiranje diferencijalnih jednačina kretanja sistema krutih tela u analitičkom obliku, Magistarski rad, Mašinski fakultet Beograd, 1992.
- [14] Mitschke, M.: Dynamik der Kraftfahrzeuge, Springer, 1973.
- [15] Milliken, W., Milliken D.: Race Car Dynamics, SAE, 1995.

- [16] Pacejka, H. B. (editor): Tyre models for vehicle dynamics model analysis, Proceedings of 1st International Colloquium on Tyre model of Vehicle Dynamics analysis, Delft, 1991.
- [17] Sayers, M. W.: Symbolic Computer Method to Automatically Formulate Vehicle Simulation Codes, Ph. D., The University of Michigan, 1990.
- [18] Sayers, M. W.: A Symbolic Vector-Dyadic Multibody Formalism For Tree Topology Systems, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 14, No 6, 1991.
- [19] Sayers, M. W.: A Symbolic Computer Language for Multibody systems, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 14., No 6, 1991.
- [20] Shah, M. et al.: Symbolic Method for Modelling Rail Vehicle Systems, Int. Journal of Vehicle Design, No 5/1997.
- [21] Simić, D.: Motorna vozila, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [22] Simić, D.: Dinamika motornih vozila – stabilnost upravljanja, Mašinski fakultet, Kragujevac, 1975.
- [23] Simić, D., Golubović, D.: Optimal Safety of Vehicle Control, SAE Technical Paper Series 901733, 1990.
- [24] Simić, D., Golubović, D.: Stabilnost upravljanja automobila sa konstantnim ubrzanjem, NMV'79, Bled, 1979.
- [25] Stavickij, A. I.: Matematičeskaja modeli issledovanija dinamiki i toplivnog ekonomičnosti avtomobilja na evm, Avtomobiljnaja promišljenost, No8, 1968.
- [26] Schiehlen, W.: Multybody Systems, Handbook, Springer, 1990.
- [27] Wolfram, S.: Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Advanced Book Programm, 1991.