

Rezime:

Rad opisuje osnove funkcionisanja adaptivnih filtara. U uvodnim razmatranjima obrađene su osnove matematičke obrade diskretnih signala i z-transformacije kod adaptivnih filtara. Izložen je Wienerov problem filtracije. Predstavljeni su CCL petlja i Widrow-Hoffov LMS algoritam i razmotrena brzina konvergencije adaptivnih filtara. Praktično je realizovana CCL petlja sa osvrtom na brzinu konvergencije.

Ključne reči: adaptivni filter, diskretni signal, CCL petlja.

ADAPTIVE DIGITAL FILTERS

Summary:

The paper describes the basis of adaptive filter functioning. The first considerations deal with the mathematical processing of discrete signals and the Z-transform in adaptive filters. The Wiener's filter processing problem was exposed. The Correlation Canceler Loop (CCL) was presented as well as the Widrow-Hoffs adaptive Least Mean Squares (LMS) step-by-step procedure. The convergence rate of adaptive filters was considered as well. The CCL simulations were obtained pointing out the convergence rate.

Key words: adaptive filter, discrete signal, Correlation Canceler Loop.

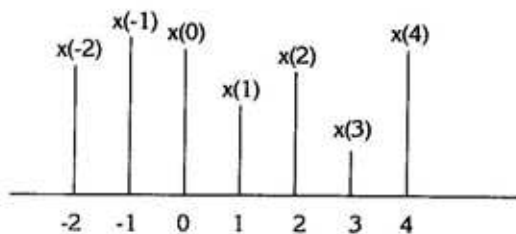
Uvod

Radi realizacije željenog ponašanja objekta upravljanja, u sistemima automatskog upravljanja vrši se obrada različitih signala, kako referentnih, tako i neželjenih signala – šumova i smetnji. Generalno uzevši, može se reći da je signal realizacija nekog procesa, odnosno funkcija jedne ili više nezavisno-promenljivih veličina koje sadrže karakteristike i stanja sistema, odnosno pojave koje reprezentuju.

U skladu sa tim odakle potiče nezavisno promenljiva, odnosno funkcija koja se posmatra, signali se mogu razvrstati u nekoliko velikih grupa:

- analogni signali,
- diskretni signali,
- digitalni signali,
- digitalni signali u kontinualnom (realnom) vremenu.

Signali koji su razmatrani u ovom radu pripadaju grupi diskretnih signala. To su, u stvari, nizovi realnih brojeva, gde se svakom celom broju iz odabranog



Sl. 1 – Grafička interpretacija diskretnog signala

segmenta diskretizacije pridružuje odgovarajući realni broj funkcije argumenta.

Grafički prikaz diskretnog signala, prikazan je na slici 1.

Kao što se kod kontinualnih sistema upravljanja njihovo dinamičko ponašanje opisuje diferencijalnim jednačinama, tako se kod diskretnih sistema koriste diferentne jednačine pri opisu stanja sistema.

Opšti oblik diferentne jednačine diskretnog sistema, reda M , može se predstaviti jednačinom:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i), \quad n > 0. \quad (1)$$

Ovakvim opisom diskretnih sistema, preko diferentnih jednačina, moguće je odrediti prenosnu funkciju, njene polove i nule, kao i način realizacije sistema.

Diferentna jednačina (1) može se predstaviti u opštijem obliku:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = f(n), \quad n > 0, \quad (2)$$

pri čemu je:

$$f(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i).$$

Ovde se niz $y(n)$ naziva rešenjem diferentne jednačine.

Rešenje diferentne jednačine, a time i ponašanje diskretnog sistema, može se dobiti primenom rekurentnih formula ili z-transformacijom, kao i metodom analognom rešavanju diferencijalnih jednačina.

Z-transformacija predstavlja jednu od najvažnijih metoda u postupku analize i sinteze linearnih diskretnih signala. Kako su povučene neke paralele upoređenja između kontinualnih i diskretnih sistema, treba istaći da z-transformacija kod diskretnih sistema ima isti značaj kao *Laplaceova* transformacija za kontinualne sisteme. Iako se sada, u skladu sa dominantnom primenom računara, pri analizi i sintezi sistema standardno koristi i metoda prostora stanja, z-transformacija je, ipak, još uvek u nekim oblastima efikasna i korisna, što se naročito odnosi na sintezu filtera.

Diskretizacija kontinualnog kauzalnog signala $f(t)$, može se uraditi korišćenjem jediničnog impulsa, $i(t)$:

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3)$$

tako da se dobija niz (povorka) odbiraka koja je data izrazom:

$$f^*(t) = f(t)i(t). \quad (4)$$

Jednačina (4) može se napisati i u sledećem obliku:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \quad (5)$$

odakle se dobija kompleksni lik povorke odbiraka:

$$F^*(s) = \text{Laplace}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \quad (6)$$

U ovom radu izložen je problem filtracije signala i neki aspekti realizacije ovog problema, sa posebnim osvrtom i težištem na adaptivnim filtrima i njihovoj implementaciji.

Postavka problema filtracije

Wienerov problem filtracije grafički je prikazan na slici 2.

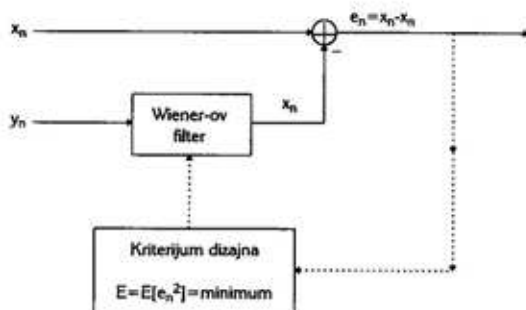
Opšte rešenje problema ne sadrži apriorna ograničenja u odnosu na Wienerov filtar. Uopšteno posmatrano, potreban je konačan broj težina kako bi se postigla najniža greška proračuna. Međutim, u adaptivnim primenama unapred se mora insistirati na konačnom broju težina filtra, što je, takođe, važno i zbog pojedinačne adaptacije algoritma ka svakoj težini. Očigledno, beskonačan broj težina u filtru ne može se adaptirati.

Pretpostavlja se da je optimalni Wienerov filtar onaj sa $M+1$ težinom:

$$h = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix} \rightarrow H(z) = h_0 + h_1 \frac{1}{z} + \dots + h_M \frac{1}{z^M} \quad (7)$$

Filtar obrađuje signal y_n tako da proračunava:

$$\hat{x}_n = \sum_{m=0}^M h_m y_{n-m} = h_0 y_n + h_1 y_{n-1} + h_2 y_{n-2} + \dots + h_M y_{n-M} \quad (8)$$



Sl. 2 – Wienerov problem filtracije

Težine h_m odabrane su po optimalnom kriterijumu minimalne greške najmanjih kvadrata, odnosno:

$$\varepsilon = E[e_n^2] = \min; \quad e = x_n - \hat{x}_n \quad (9)$$

Kriterijum minimizacije vodi ka jednačinama koje određuju optimalne težine, pa se može pisati:

$$E[e_n x_{n-m}] = 0, \quad 0 \leq m \leq M, \quad (10)$$

ili, ekvivalentno:

$$E[e_n y(n)] = 0 \quad (11)$$

To daje normalne jednačine:

$$E[(x_n - \hat{x}_n)y(n)] = E[(x_n - h^T y(n))y(n)] = 0$$

$$E[y(n)y(n)^T]h = E[x_n y(n)] \quad (12)$$

ili, drugačije napisano:

$$Rh = r, \quad R = E[y(n)y(n)^T], \quad r = E[x_n y(n)] \quad (13)$$

Optimalne težine tada su date izrazom:

$$h = R^{-1}r, \quad (14)$$

a odgovarajuća minimalna vrednost estimacione greške računa se prema izrazu:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E[e_n^2] = E[e_n(x_n - h^T y(n))] = E[e_n x_n] \\ \varepsilon &= E[x_n^2] - h^T E[y(n)x_n] = E[x_n^2] - r^T R^{-1}r \end{aligned} \quad (15)$$

Normalne, a posebno ortogonalne jednačine imaju uobičajenu interpretaciju otklanjanja korelacije. Signal x_n može se izraziti sledećom jednačinom:

$$x_n = e_n - \hat{x}_n = e_n + h^T y(n). \quad (16)$$

Dati signal sastoji se od dva dela. Prvi deo, s obzirom na ortogonalnost jednačina, u potpunosti je nekorelisan sa $y(n)$, dok drugi deo jeste u korelaciji sa $y(n)$.

U stvari, filter od x_n otklanja sve što je u korelaciji sa sekundarnim ulazom, $y(n)$, a ono što ostaje (e_n), inače nije u korelaciji sa $y(n)$. Tako se Wienerov filter nalazi u ulozi otklanjanja korelacije i, ukoliko su primarni signal x_n i sekundarni signal $y(n)$ u bilo kakvoj korelaciji, filter će ukloniti sve pomenute korelacije iz izlaznog signala e_n .

Teškoća sa ovim rešenjem jeste što statističke veličine R i r moraju biti poznate ili bar unapred procenjene, što se može učiniti metodama blok-procesiranja ili adaptivnog procesiranja. Osnovne prednosti blok-procesiranja jesu da je ono zasnovano na jednom, fiksnom uzorku

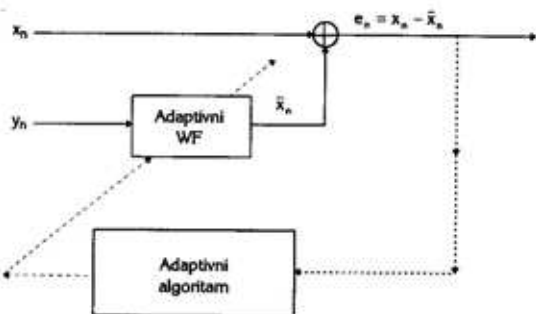
podataka i da njihova dužina mora biti vrlo kratka. Zbog toga su ovakve metode najpogodnije u aplikacijama sa ograničenom dostupnošću podataka, kao, na primer, u parametarskoj spektralnoj estimaciji zasnovanoj na jednom bloku podataka.

Međutim, dostupnost podataka nije najznačajnija. U promenljivom okruženju, čak i sa više prikupljenih podataka, možda neće biti ispravno koristiti ih, zbog toga što stacionarnost tada ne bi bila valjana za duži blok podataka. Ipak, i u ovakvim slučajevima se još uvek mogu koristiti metode blok-procesiranja, ali se optimalni filteri moraju iznova dizajnirati sa promenom okruženja, tako da filter uvek odgovara podacima koje obrađuje.

S druge strane, u nekim aplikacijama se ne zna koliko često treba redefinisati filtere, pa se koristi adaptivna implementacija koja obezbeđuje redefinisavanje optimalnog procesora na automatski način, tako da oni neprekidno „prate“ okruženje.

Kao primeri mogu se navesti problemi sa prijemom signala na radarima i antenama, uz prisustvo ometanja, zatim otklanjanje šuma i eha, linearno predviđanje i spektralna estimacija, kao i sistem – identifikacija i kontrola.

Postoji više različitih adaptivnih algoritama, kao što su: *Widrow-Hoffov* algoritam najmanjih srednjekvadratnih vrednosti (*Least Mean Square – LMS*), klasičan rekurentni algoritam najmanjih kvadrata (*Recursive Least Squares – RLS*), zatim brzi RLS algoritam, kao i adaptivni rešetkasti algoritam. Na slici 3 prikazana je tipična adaptivna implementacija Wienerovog filtera.



Sl. 3 – Adaptivni Wienerov filter

Adaptivni algoritam neprekidno nadgleda izlazni signal greške e_n i pokušava da minimizira izlaznu snagu, $E[e_n^2]$, ili ekvivalentno pokušava da ukloni korelaciju između e_n i sekundarnog ulaza y_n . Za svako n pri filtraciji se koriste trenutne vrednosti težina. Izračunati izlaz e_n , koristi se, zatim, u adaptivnom delu algoritma radi izmene težina u smeru njihovih optimalnih vrednosti. Vremenom, sa obradom ulaznog signala, x_n , kao i signala y_n , filter lagano „uči“ statistiku ovih ulaza, pa tako i težine idu ka optimalnim vrednostima koje su date Wienerovim rešenjem kroz jednačinu (14).

gencije, došlo do promene statistike, filter bi odgovorio ponovnim podešavanjem svojih težina novim optimalnim vrednostima, i tako redom. Drugim rečima, adaptivni filter će pratiti nestacionarne promene ulazne statistike, sve dok se te promene dešavaju dovoljno sporo za filter, tako da on konvergira između tih promena.

Za svaku adaptivnu implementaciju postoje tri bitne osobine o kojima treba voditi računa, a to su:

- učenje ili brzina konvergencije algoritma,
- složenost proračuna algoritma,
- numerička preciznost i stabilnost algoritma.

Brzina konvergencije je bitna s obzirom na to da određuje maksimalni ritam promena nestacionarnih ulaza koje se korisno mogu pratiti filtrom. Složenost proračuna odnosi se na broj operacija koje su neophodne pri ažuriranju stanja filtra od jednog do sledećeg trenutka.

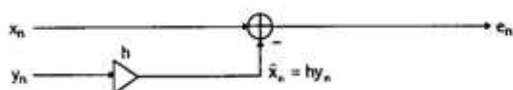
Tabela 1

Algoritam	Brzina	Složenost	Stabilnost
Najmanje srednjekvadratne vrednosti (LMS)	spor	jednostavan	stabilan
Najmanji kvadrati, rekurentni, klasični (RLS)	brz	složen	stabilan
Najmanji kvadrati, rekurentni, brzi (brzi RLS)	brz	jednostavan	nestabilan
Rešetkasti	brz	jednostavan	stabilan

Jasno je da ulazna statistika mora ostati nepromenjena, bar onoliko dugo koliko je filtru potrebno za „učenje“, kao i za konvergenciju ka svojoj optimalnoj konfiguraciji. Ukoliko bi, nakon konver-

U tabeli 1 prikazana je raznolikost kriterijuma upotrebe pomenutih algoritama u odnosu na navedene osobine.

Treba napomenuti da je očito da, uprkos vrsti algoritama koji su ponuđeni,



Sl. 4 – Jednostavan filter sa jednim težinskim koeficijentom

nijedan adaptivni filter ne može dati bolje rešenje nego što to čini teorijsko Wienerovo rešenje. Zato treba, pre svega, najpre teoretski odrediti valjanost optimalnog filtra pre nego što se krene na aplikativno korišćenje.

Petlja uklanjanja korelacije (Correlation Canceller Loop – CCL)

Radi ilustracije osnovnog principa rada adaptivnih filtera razmatran je najjednostavniji mogući filter sa samo jednim težinskim koeficijentom na slici 4.

Težinski koeficijent h , mora biti optimalno odabran, tako da daje najbolju moguću estimaciju signala u obliku:

$$\hat{x}_n = h y_n. \quad (17)$$

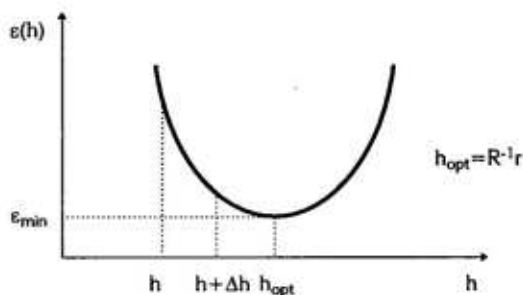
Estimaciona greška izražena je na sledeći način:

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) &= E[e_n^2] = E[(x_n - h y_n)^2] = \\ &= E[x_n^2] - 2h E[x_n y_n] + E[y_n^2] \end{aligned}$$

$$\varepsilon(h) = E[x_n^2] - 2hr + h^2 R \quad (18)$$

Uslov minimizacije definisan je izrazom:

$$\frac{\partial \varepsilon(h)}{\partial h} = 2E\left[e_n \frac{\partial e_n}{\partial h}\right] = -2E[e_n y_n] = -2r + 2Rh = 0 \quad (19)$$



Sl. 5 – Greška filtra – ε

Jednačina se rešava iterativno, koristeći gradijentno-opadajuću metodu.

Zavisnost greške ε , od parametra filtra h , jeste parabola prikazana na slici 5.

Kao što se može videti sa slike, apsolutni minimum se pojavljuje za optimalnu vrednost h_{opt} .

U adaptivnoj verziji, parametar filtra h jeste vremenski zavisan $h(n)$, i popravlja se iz jednog trenutka ka sledećem prema izrazu:

$$h(n+1) = h(n) + \Delta h(n), \quad (20)$$

pri čemu je $\Delta h(n)$ korekcionni izraz koji mora biti pravilno odabran radi obezbeđivanja konvergencije vremenski promenljive težine $h(n)$, ka svojoj optimalnoj vrednosti, odnosno:

$$h(n) \rightarrow h = R^{-1}r, \text{ za } n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Sada je operacija filtracije data u još uvek linearnoj, ali i vremenski neinvarijantnoj formi:

$$\hat{x} = h(n)y_n. \quad (22)$$

Izračunavanje estimacije za sledeći trenutak trebalo bi obaviti sa novom težinom, odnosno:

$$\hat{x}_{n+1} = h(n+1)y_{n+1}, \quad \text{itd.} \quad (23)$$

Najjednostavniji način odabira korekcionog izraza $\Delta h(n)$, jeste gradijentno-opadajući metod. Suština ove metode je u tome da se zahteva pomeranje osobina indeksa bliže minimumu nego u prethodnom trenutku, za promenu od h u $h+\Delta h$. Tako Δh mora zadovoljiti sledeći uslov:

$$\varepsilon(h + \Delta h) \leq \varepsilon \quad (24)$$

Uz ovakav zahtev ponavljanje postupka vodiće ka sve izraženijem smanjenju vrednosti za ε , sve dok se ne dostigne njena najmanja vrednost.

Pretpostavljajući da je Δh dovoljno malo, navedeno se može proširiti na sledeći izraz:

$$\varepsilon(h) + \Delta h \frac{\partial \varepsilon(h)}{\partial h} \leq \varepsilon(h). \quad (25)$$

Ako se Δh odabere kao negativni gradijent $-\mu(\partial \varepsilon / \partial h)$, tada će nejednakost (25) zasigurno biti zadovoljena. Dakle, izraženo matematički, za:

$$\Delta h = -\mu \frac{\partial \varepsilon(h)}{\partial h}, \quad (26)$$

biće:

$$\varepsilon(h) + \Delta h \frac{\partial \varepsilon(h)}{\partial h} = \varepsilon(h) - \mu \left| \frac{\partial \varepsilon(h)}{\partial h} \right|^2 \leq \varepsilon(h). \quad (27)$$

Adaptivni parametar μ mora biti dovoljno mali da opravda zadržavanje samo prvog člana reda u Taylorovom razvoju.

Primenjujući ovu ideju na primeru malog adaptivnog filtra odabira se korekcioni izraz $\Delta h(n)$, u skladu sa jednačinom (26), tako da je:

$$h(n+1) = h(n) + \Delta h(n) = h(n) - \mu \frac{\partial \varepsilon(h(n))}{\partial h}. \quad (28)$$

Ukoliko se u jednačinu (29) ubaci izraz za gradijent ($\partial \varepsilon / \partial h = -2r + 2Rh$), može se dobiti:

$$h(n+1) = h(n) - \mu [-2r + 2Rh(n)] = (1 - 2\mu R)h(n) + 2\mu r. \quad (29)$$

Ova diferentna jednačina može se rešiti u zatvorenoj formi. Na primer, korišćenjem z-transformacije, uz bilo kakve početne uslove $h(0)$, može se dobiti:

$$h(n) = h + (1 - 2\mu R)^n (h(0) - h). \quad (30)$$

U izrazu (30) ispunjen je uslov da je $h=R^{-1}r$, odnosno, to je optimalna vrednost. Bez obzira na početni uslov $h(0)$, težinski koeficijent $h(n)$ će konvergirati ka svojoj optimalnoj vrednosti h , ukoliko se obezbedi takav adaptivni parametar μ , koji će zadovoljiti sledeću nejednakost:

$$|1 - 2\mu R| < 1. \quad (31)$$

S obzirom na to da μ mora biti pozitivno (zbog negativnog gradijenta), proizilazi da se izraz (31) sužava na zadovoljenje uslova:

$$0 < \mu < 1/R. \quad (32)$$

Da bi se odabrao adaptivni parametar μ , mora se posedovati apriorno znanje

o veličini $R=E[y_n^2]$. Ovakav izbor parametra μ garantovaće konvergenciju, dok će brzina konvergencije zavisiti od toga koliko je broj $1-2\mu R$ blizak jedinici. Pri odabiru parametra μ mora se voditi računa da on bude dovoljno mali da garantuje konvergenciju, ali ne i previše mali, jer bi tada konvergencija bila isuviše spora.

Widrow-Hoffov adaptivni algoritam najmanjih kvadrata (Least Mean Squares – LMS)

Prethodno je prikazan iterativni način rešavanja originalnog Wienerovog problema filtracije. Sa praktičnog stovišta ova reformulacija se još uvek ne može izračunati, pošto adaptacija težinskih koeficijenata zahteva apriorno poznavanje korelacije statističkih veličina R i r , datih jednačinom (13).

U Widrow-Hoffovom LMS algoritmu prethodno izloženi adaptivni algoritam zamenjen je onim koji je moguće izračunati. Gradijent koji se pojavljuje u jednačini (28) glasi:

$$h(n+1) = h(n) - \mu \frac{\partial \varepsilon(h(n))}{\partial h} \quad (33)$$

i zamenjen je trenutnim gradijentom. Prema tome, izraz:

$$\frac{\partial \varepsilon(h(n))}{\partial h} = -2E[e_n y_n] = -2r + 2Rh(n) = -2E[x_n y_n] + 2E[y_n^2]h(n) \quad (34)$$

zamenjuje se izrazom:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h} = -2e_n y_n = -2x_n y_n + 2y_n^2 h(n) \quad (35)$$

Tako se dobija algoritam sa podesivim težinskim koeficijentima:

$$h(n+1) = h(n) + 2\mu e_n y_n. \quad (36)$$

Algoritamski predstavljeno, zahtevani proračuni obavljaju se kroz sledeće korake:

- u trenutku n dostupna je težina $h(n)$;
- izračunava se izlaz filtra $\hat{x}_n = h(n)y_n$;
- izračunava se estimaciona greška $e_n = x_n - \hat{x}_n$;
- izračunava se naredni težinski koeficijent filtra, prema izrazu; $h(n+1) = h(n) + 2\mu e_n y_n$;
- prelazi se na sledeći trenutak $n \rightarrow n+1$.

Može se zapaziti i sledeće:

1. Izlazna greška e_n , putem povratne veze, koristi se za kontrolu adaptacije težinskih koeficijenata filtra.

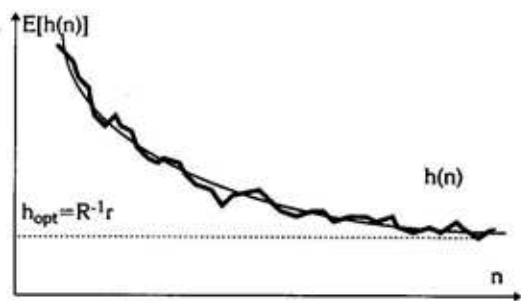
2. Filtar „pokušava“ da ukloni korelaciju sekundarnog signala od izlaza e_n , što se lako uočava kroz činjenicu da, ukoliko težina $h(n)$ manje-više dostigne svoju optimalnu vrednost, tada je $h(n+1) \approx h(n)$, pa je, slično, i adaptivna jednačina data izrazom $e_n y_n \approx 0$.

3. U praksi težina $h(n)$ nikada ne dosegne teoretsku optimalnu vrednost: $h=R^{-1}r$. Umesto toga, težina se stabilizuje oko ove vrednosti i neprekidno varira oko nje.

4. Aproksimacija učinjena na početku razmatranja LMS algoritma poznata je kao stohastička aproksimacija i znatno usložava matematičke aspekte problema.

Diferentna jednačina:

$$h(n+1) = h(n) + 2\mu e_n y_n = h(n) + 2\mu(x_n - h(n)y_n)y_n \quad (37)$$



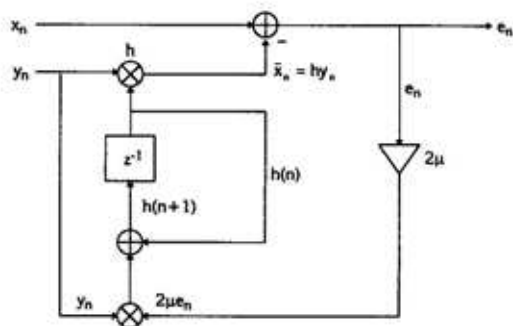
Sl. 6 – Konvergencija krive $h(n)$ i $E[h(n)]$

čini težinu $h(n)$ zavisnom od slučajne promenljive y_n , i to izrazito nelinearno, što znatno otežava rad, čak i sa osrednjem ponašanjem $h(n)$.

5. Pri razmatranju osrednjenog ponašanja težine $h(n)$ koriste se sledeće tipične aproksimacije:

$$\begin{aligned} E[h(n+1)] &= E[h(n)] + 2\mu E[x_n y_n] - 2\mu E[h(n) y_n^2] \\ E[h(n+1)] &= E[h(n)] + 2\mu E[x_n y_n] - 2\mu E[h(n)] E[y_n^2] \\ E[h(n+1)] &= E[h(n)] + 2\mu r - 2\mu E[h(n)] R \end{aligned} \quad (38)$$

Ovde je, u poslednjem izrazu, očekivanje $E[h(n)]$ izvučeno kao činilac, s



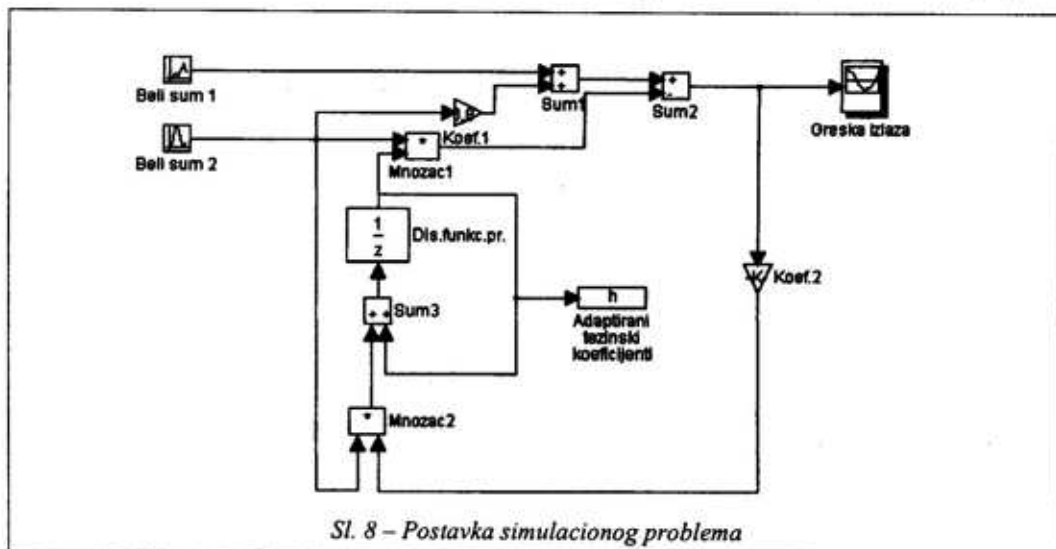
Sl. 7 – Realizacija CCL petlje

obzirom na nezavisnost $h(n)$ od y_n . Sa ovom aproksimacijom, srednje očekivanje $E[h(n)]$ zadovoljava diferentnu jednačinu.

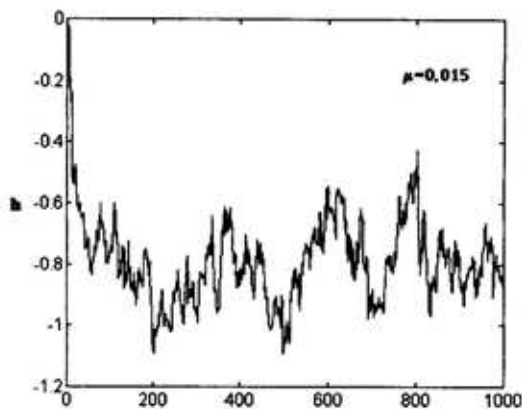
Težina $h(n)$ će varirati oko teoretske očekivane krive konvergencije, dok konvergira ka svojoj optimalnoj vrednosti h_{opt} , kao što je prikazano na slici 6.

Nakon konvergencije adaptivna težina $h(n)$ neprekidno varira oko Wienerovog rešenja – optimalnog h . Mera ovih odstupanja izražena je veličinom $E[(h(n)-h)^2]$.

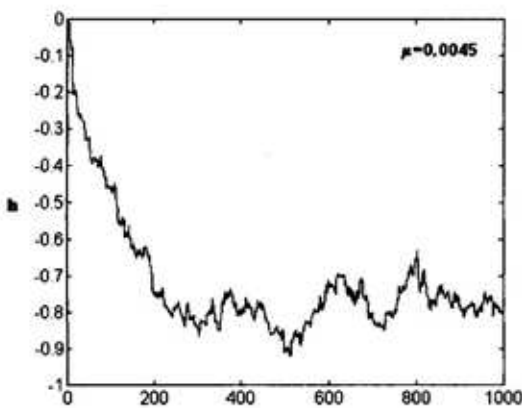
Za postizanje visoke preciznosti konvergiranih težina (mala variranja), za-



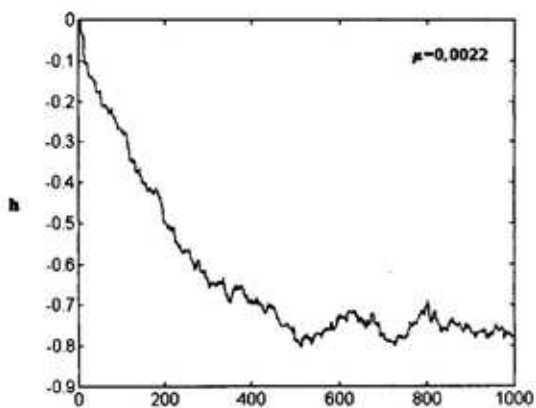
Sl. 8 – Postavka simulacionog problema



Sl. 9 – Prva iteracija težinskog koeficijenta $-h$, za $\mu=0,015$



Sl. 10 – Druga iteracija težinskog koeficijenta $-h$, za $\mu=0,0045$



Sl. 11 – Treća iteracija težinskog koeficijenta $-h$, za $\mu=0,0022$

hteva se što manje μ ali to u isto vreme usporava stepen konvergencije, odnosno smanjuje brzinu konvergencije.

Sledi primer CCL petlje, koja je realizovana kao na slici 7. Kao što se može videti sa slike, filtarski deo je strogo odvojen od kontrolne petlje povratne veze koja obavlja adaptaciju težine filtra. To je najjednostavniji mogući adaptivni filter koji može formirati elementarne blokove mnogo složenijih adaptivnih filtera višeg reda.

Ovakva realizacija CCL petlje, koja se može naći u vojnim telekomunikacionim uređajima, konkretno – u adaptivnim antenama i radarima, izložena je u simulacionom problemu koji je prikazan na slici 8.

Simulacija je rađena u programskom paketu MATLAB for WINDOWS. Na ulaz sistema dovodi se signal $x_n = -0,8y_n + u_n$. Zapaža se deo signala x_n , koji je u korelaciji sa sekundarnim signalom y_n (tj. sa $-0,8 y_n$), kao i drugi deo koji sa y_n nije korelisan (u_n).

Teoretsko rešenje glasi:

$$r = E[x_n y_n] = E[-0,8 y_n y_n] + E[u_n y_n] = -0,8 E[y_n y_n] = -0,8 R. \quad (39)$$

Kako je $h = R^{-1}r$, sledi:

$$h_{opt} = -0,8 \quad (40)$$

Filter će, najpre, ukloniti iz y_n deo signala koji se odnosi na y_n , i kada se doigne optimalna težina, na izlazu će se dobijati samo odgovarajući signal, a to je u_n .

Treba pomeniti da je u simulacionom primeru prikazano kako adaptivni parametar μ utiče na ponašanje težinskog koeficijenta h i njegovu konvergenciju ka optimalnoj vrednosti $h_{opt} = -0,8$ koja odgovara teoretskom rešenju Wienerovog problema filtracije, što se jasno može videti na slikama 9, 10 i 11.

Brzina konvergencije

Osobine konvergencije LMS algoritama, pa tako i algoritama izloženih u ovom radu, biće razmotrene u skladu sa sledećom jednačinom:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h} = -2E[e_n y(n)], \text{ gde je: } y(n) = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{n-M} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Može se dobiti:

$$h(n+1) = (1 - 2\mu R)h(n) + 2\mu r. \quad (42)$$

Pri tome je matrica R definisana izrazom:

$$R = E[y(n)y(n)^T] \\ R_{ij} = E[y_i(n)y_j(n)] = E[y_{n-1}y_{n-1}] = R_{yy}(i-j), \quad i, j \in [0, M] \quad (43)$$

Rešenje diferentne jednačine težinskih koeficijenata je:

$$h(n) = h + (1 - 2\mu R)n(h(0) - h). \quad (44)$$

Konvergencija zahteva da veličina $1 - 2\mu R$ ima vrednost manju od jedinice, za svaku vrednost promenljive λ koju

može uzeti R . To je garantovano i za maksimalnu vrednost promenljive λ :

$$0 < \mu < 1 / \lambda_{max}. \quad (45)$$

Ukoliko je μ odabrano na polovini intervala (oko $0,5 / \lambda_{max} = 1/2 \lambda_{max}$), tada će stepen konvergencije da zavisi od najsporijeg, konvergirajućeg izraza oblika $(1 - 2\mu R)^n$, što znači da izraz $1 - 2\mu\lambda$ mora biti što bliže jedinici. To je moguće za minimalnu vrednost $\lambda = \lambda_{min}$.

Dakle, za $\mu \approx 1/2 \lambda_{max}$ može se izraziti najsporiji konvergirajući izraz:

$$[1 - 2\mu\lambda_{min}]^n = [1 - \lambda_{min} / \lambda_{max}]^n. \quad (46)$$

Aproksimativni izraz određuje i konstantu efektivnog vremena (u sekundama) za vreme $t = nT$, gde je T period uzorkovanja, prema izrazu:

$$\left[1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right]^n = e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ gde je: } \tau = T \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}. \quad (47)$$

Dakle, odnos $\lambda_{max} / \lambda_{min}$ kontroliše brzinu konvergencije.

Konvergencija je brža što je više ispunjen uslov $\lambda_{max} / \lambda_{min} \approx 1$, i obratno.

Treba istaći da velika brzina konvergencije neće biti moguća za izrazito autokorelativni signal y_n . U takvim situacijama, kada se zahteva velika brzina konvergencije koju LMS algoritam za ovakve signale realno ne može postići, pribegava se kombinaciji sa drugim algoritmima (na primer brzi RLS ili adaptivni rešetkasti algoritam). Treba spomenuti i mogućnosti ubrzavanja konvergencije,

koje počivaju na metodi koja je nalik Newtonovom načinu rešavanja sistema jednačina

$$f(h) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} = 0.$$

Implementacija ove metode traži apriorno poznavanje vrednosti za R , koje nije dostupno.

I pored toga, neki algoritmi, zasnovani na sličnim metodama, imaju znatno veću brzinu konvergencije.

Zaključak

Problem filtracije signala, koji je razmotren u ovom radu, vrlo je važan u mnogim naučno-tehničkim oblastima, kao što su: telekomunikacioni uređaji, rada-

ri, antene, telefonske mreže, uklanjanje „duhova“ (udvojene slike) na TV ekranu, itd.

Od čitavog niza adaptivnih filtera koji se navode u literaturi, pažnja je bila usmerena na jednostavnije primere. Bez obzira na to, predstavljeni filteri mogu se upotrebiti u sistemima koji moraju obezbediti željeno ponašanje objekta upravljanja (regulacije) i što brži odziv, kako na upravljačke signale, tako i na signale smetnje, što otvara mogućnosti primene na borbenim sistemima koji se nalaze u VJ.

Literatura:

- [1] Orfanidis, S.: Optimum signal processing – An introduction, McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
- [2] Stojić, M.: Digitalni sistemi upravljanja, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
- [3] Obradović, M.; Milosavljević, M.: Digitalna obrada signala, Vojnoizdavački i novinski centar, Beograd, 1988.
- [4] Debeljković, D.: Stohastički linearni sistemi automatskog upravljanja, Naučna knjiga, Beograd, 1985.