Sc Goran Prodanović,
kapetan
Vojnogeografski institut,
Beograd

MATEMATIČKA ANALIZA MAGNETSKOG POLJA ZEMLJE

UDC: 537.67

Rezime:

Poznavanje matematičkih transformacija kojima se može predstaviti intenzitet vektora magnetskog polja Zemlje ima veoma veliki značaj. Definisanjem koeficijenata transformacionih funkcija omogućava se predstavljanje raspodele vrednosti polja na određenom prostoru. U ovom radu govori se o magnetskom polju Zemlje, Gausovoj metodi analize magnetskog polja Zemlje, kao i o upotrebi metode najmanjih kvadrata u rešavanju sistema jednačina normalnih vrednosti magnetskog polja Zemlje.

Ključne reči: magnetsko polje Zemlje, Gausov metod analize magnetskog polja Zemlje, metoda najmanjih kvadrata.

MATEMATICAL ANALYSIS OF GEOMAGNETIC FIELD

Summary:

Knowledge of mathematical transformation models that can present value of vector of geomagnetic field is very important. Defining coefficients of transformation functions provides presentation of disposition value of geomagnetic field on defined space. This article presents geomagnetic field, Gauss' method of analysis of geomagnetic field and using least square method to solve system of equations of normal values geomagnetic field.

Key words: Geomagnetic field, Gauss method of analysis of geomagnetic field, least square method.

Uvod

Radi proučavanja geomagnetskih fenomena i rešavanja brojnih zadataka iz oblasti geomagnetizma, veoma je važno naći analitički izraz koji izražava zavisnost magnetskog polja od koordinata tačaka na površini Zemlje. Radi nalaženja ovakvog izraza polazi se od pretpostavke da je Zemlja homogena namagnetisana sfera ili se, na osnovu merenih vrednosti elemenata magnetskog polja, dobijaju izrazi koji ukazuju na raspodelu magnetizacije unutar Zemlje, koja odgovara merenom polju.

Mereno polje na površini Zemlje može se predstaviti kao vektorska suma više različitih magnetskih polja [6]:

$$\vec{T}=\vec{T}_o+\vec{T}_m+\vec{T}_a+\vec{T}_{ex}+\delta\vec{T} \tag{1}$$

gde je:

T_o – polje homogeno namagnetisane Zemlje, koje se može predstaviti i kao polje dipolnog magneta čije se središte nalazi u centru Zemlje (dipolno polje),

T_m – polje izazvano nehomogenostima u dubljim delovima Zemlje (polje kontinenata ili nedipolno polje),

T_a – polje izazvano magnetizacijama u gornjim delovima Zemljine kore (anomalijsko polje),
T_{ex} – polje koje je u uskoj vezi sa spoljnim fenomenima,
δT – polje varijacija.

Glavnim magnetskim poljem naziva se vektorska suma dipolnog i nedipolnog polja.

$$\vec{T}=\vec{T}_o+\vec{T}_m \tag{2}$$

Normalnim magnetskim poljem naziva se vektorski zbir dipolnog, nedipolnog i spoljnjeg polja:

$$\vec{T}=\vec{T}_o+\vec{T}_m+\vec{T}_{ex} \tag{3}$$

Kako je intenzitet spoljnjeg polja veoma mali u poređenju sa glavnim, ono se može zanemariti, te izraz dobija oblik:

$$\vec{T}=\vec{T}_o+\vec{T}_m \tag{4}$$

tako da se pri razmatranju glavno magnetsko polje može smatrati kao normalno i obrnuto.

Anomalijsko polje (T_a) moguće je predstaviti kao zbir polja izazvanog nehomogenostima u raspodeli magnetizacije u srednjim i dubljim delovima Zemljine kore (polje regionalnih anomalija) i polja izazvanog postojanjem magnetičkih stena rudnih ležišta i sl. koje se nalazi blizu Zemljine površine i čiji se uticaj manifestuje na relativno malim područjima (polje lokalnih anomalija).

Ako se zanemari polje varijacija, a imajući u vidu definiciju normalnog polja, merena vrednost magnetskog polja Zemlje može se prikazati kao vektorski zbir normalnog i anomalijskog polja:

$$\vec{T}=\vec{T}_n+\vec{T}_a \tag{5}$$

Ako se, na osnovu magnetskih merenja, u određenom slučaju želi odrediti samo lokalna anomalija, onda se pod normalnim poljem mora podrazumevati vektorski zbir normalnog polja (T_n) i polja regionalne anomalije. Ako se želi odrediti nedipolno polje, onda se pod pojmom normalnog polja podrazumeva samo dipolno polje. Na osnovu navedenog, pod pojmom normalnog polja može se smatrati polje različitih struktura, u zavisnosti od toga kakav se deo anomalijskog polja želi izdvojiti iz merenih vrednosti magnetskog polja Zemlje.

Gausov metod analize magnetskog polja Zemlje

Brojni problemi u geologiji, geodeziji, astronomiji i drugim prirodnim naukama zahtevali su razvoj različitih matematičkih modela i metoda za njihovo rešavanje. Proučavajući magnetsko polje Zemlje, Gaus je došao do izraza za normalne vrednosti magnetskog polja. Kako unutar Zemlje postoje različito raspoređene magnetizacije, nameće se potreba razvijanja složenih matematičkih metoda. Kao takva, Gausova metoda sferne harmonijske analize ima neprocenjiv značaj. U svojim proučavanjima magnetskog polja Zemlje, Gaus polazi od pretpostavke дa je izvor polja unutar Zemlje i da takvo polje zadovoljava Laplasovu jednačinu [2]:

$$\vec{T}=-\ \mathrm{grad}\ U \tag{6}$$

gde je U potencijal magnetskog polja.

Ako se usvoji da Zemlja ima namagnetisanje J, koje u bilo kojoj tački na Zemljinoj površini ima proizvoljnu veličinu i pravac (slika), tada se magnetski potencijal U predstavlja kao zapreminski i izražava u obliku reda:

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=\Theta}^{n}\frac{1}{r^{n+1}}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right] \quad (7)$$

$$p_n^m\cos\Theta$$

Pri n = 0 magnetski potencijal je $U=\frac{1}{r}\int\limits_{v} dm$ i predstavlja sumu svih elementarnih magnetskih masa koja je u svakom telu jednaka nuli. Zato red (7) dobija oblik:

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\left[a_n^m\cos\ m\lambda+b_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}\sin\ m\lambda\right] \quad (8)$$

$$p_n^m\cos\Theta$$

Ako se početak koordinatnog sistema (slika) prenese u centar i uvedu oznake $a_n^m=R^{n+2}\ g_n^m$, $b_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}=R^{n+2}\ h_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}$, gde je R radijus sfere, dobija se:

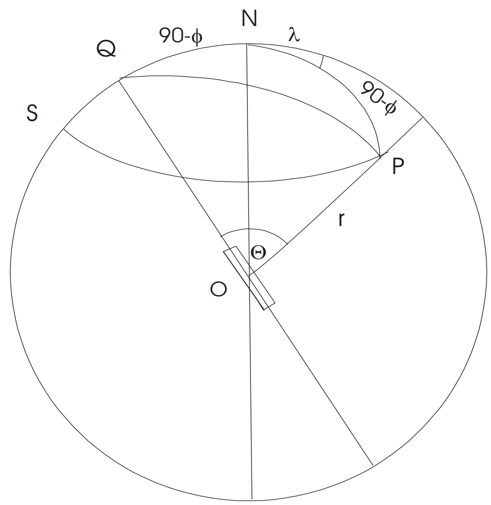
$$U=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{R}{r})^{\mathrm{n}+1}\sum_{m=0}^{n}\left[g_n^m\ \ \cos(m\lambda+h_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}\sin m\lambda\right]$$

$$p_n^m\cos\Theta \quad (9)$$

Za tačku koja se nalazi na površini sfere r = R potencijal će biti:

$$U=R\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{n}\left[g_n^m\ \cos\ m\lambda+h_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}\ \sin\ m\lambda\right]$$

$$p_n^m\cos\Theta \quad (10)$$



Gausova analiza magnetskog polja Zemlje

Magnetski potencijal koji se stvara na površini sfere, izazvan magnetskim masama koje su raspoređene unutar sfere, izražava se u obliku dvostruke sume sa beskonačnim brojem komponenti. Svaka komponenta predstavlja sfernu funkciju:

$$P_n^m(\cos\ \Theta)_{\sin\ \mathrm{m}}^{\cos\ \mathrm{m}} \qquad \text{od} \quad \Theta, \lambda \qquad (11)$$

sa konstantnim koeficijentima g_n^m, h_n^m dok su Θ kolatituda i λ longituda uglovne koordinate tačke na sferi.

Broj članova tipa g_n^m, h_n^m može biti beskonačan, uz uslov da je m manje od n i da za m = 0, svi članovi reda tipa h postaju jednaki 0. Tada broj članova N tipa g_n^m, h_n^m može da se izrazi relacijom:

$$N = n\ (n + 2) \qquad (12)$$

Ako se izvrši diferenciranje izraza (9) po osama koordinatnog sistema, čija je x osa orijentisana u ravni geografskog meridijana, z osa u pravcu vertikale, a y osa upravna na njih, dobiće se severna X, vertikalna Z i istočna Y komponenta, a preko njih i svi drugi elementi magnetskog polja Zemlje:

$$
\begin{aligned}
X &= -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \Theta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n}\left[g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin\, m\lambda\right]\frac{d(p_n^m \cos\Theta)}{d\Theta} \\
Y &= \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial U}{\partial \lambda} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n}\left[m g_n^m \cos m\lambda - m h_n^m \sin m\lambda\right] \frac{p_n^m \cos\Theta}{\sin\Theta} \\
Z &= \frac{\partial U}{\partial r} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n}\left[(n+1) g_n^m \cos m\lambda + (n+1) h_n^m \sin m\lambda\right] p_n^m \cos\Theta
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Rešenjem sistema jednačina (13) normalno magnetsko polje jedne izabrane teritorije može se predstaviti izrazom [6]:

$$
E(\Delta\varphi, \Delta\lambda) = a_1 + a_2\Delta\varphi + a_3\Delta\lambda + a_4\Delta\varphi^2 + a_5\Delta\lambda^2 + a_6\Delta\varphi\Delta\lambda \tag{14}
$$

gde je:
E(Δφ, Δλ) – vrednost normalnog magnetskog polja na tački čije su geografske koordinate,
φ_1 i λ_1 – geografska dužina i širina mesta,
φ_0 i λ_0 – geografska dužina i širina tačke u odnosu na koju se svode merenja,
$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ – razlika geografskih širina,
$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ – razlika geografskih dužina,
a_i – koeficijenti.

Uobičajeno je da se razlike geografskih širina i dužina računaju u odnosu na koordinate geomagnetske opservatorije koja se nalazi u sredini teritorije za koju se računaju koeficijenti a_i normalnog polja. Međutim, ukoliko se analizira lokalno područje, onda se za nultu tačku mogu uzeti koordinate jedne od središnjih tačaka na kojoj je obavljeno merenje.

Na osnovu izraza (14) za svaku tačku se obrazuje jednačina, a rešavanjem dobijenog sistema jednačina metodom najmanjih kvadrata dobijaju se normalne vrednosti magnetskog polja.

Metoda najmanjih kvadrata

Jedna od najčešće primenjivanih metoda u geologiji, geodeziji, astronomiji i drugim prirodnim naukama jeste metoda najmanjih kvadrata ili metoda najmanje sume kvadrata. Vođene su beskrajne polemike da li je ovu metodu prvi primenio Gaus ili Ležandr.

Neka je izvršeno niz nezavisnih merenja $l_1, l_2, \ldots l_n$. Verovatnoće da će se u tim merenjima pojaviti greške $v_1, v_2, \ldots v_n$ izražavaju se izrazima [3]:

$$
\begin{aligned}
P(v_1) &= \frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_1^2 v_1^2}\, dv_1 \\
P(v_2) &= \frac{h_2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_2^2 v_2^2}\, dv_2 \\
&- - - - - - - - - - - - \\
P(v_n) &= \frac{h_n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_n^2 v_n^2}\, dv_n
\end{aligned}
\tag{15}
$$

gde je h veličina proporcionalna težini merenja p. Kako su ova merenja nezavisna, verovatnoća P da će se u datom nizu pojaviti baš greška $v_1, v_2, \ldots v_n$ glasi:

$$
P(v_1, v_2, \ldots v_n) = P(v_1)\, P(v_2) \ldots P(v_n) \tag{16}
$$

Ako se izraz (15) uvrsti u izraz (16) dobija se:

$$P(v_1, v_2, ...v_n) = \frac{h_1\ h_2\ ...\ h_n}{\sqrt{\pi}} \tag{17}$$
$$e^{-h_1^2 v_1^2} e^{-h_2^2 v_2^2} ... e^{-h_n^2 v_n^2}$$

Da bi ova verovatnoća bila maksimalna, odnosno da bi L_1, L_2, ... L_n bile najverovatnije vrednosti, treba da bude:

$$\frac{h_1\ h_2\ ...\ h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + ... + h_n^2 v_n^2)} = \max \tag{18}$$

Da bi ovaj izraz bio maksimalan dovoljno je da bude:

$$h_1^2 v_1^2\ h_2^2 v_2^2\ ...\ h_n^2 v_n^2 = \min \tag{19}$$

Veličina h je karakteristika svakog merenja ponaosob i proporcionalna je težini tog merenja p, pa se može pisati:

$$p_1^2 v_1^2\ p_2^2 v_2^2\ ...\ p_n^2 v_n^2 = \sum p v^2 = \min \tag{20}$$

gde su p_1, p_2,... p_n težine merenja l_1, l_2,... l_n. Ako su merenja istih težina tj. $p_1 = p_2 = ... p_n$, onda će maksimalnu verovatnoću imati ona vrednost L za koju odstupanja:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 - l_1 \\ v_2 &= L_2 - l_2 \\ &\text{--------------} \\ v_1 &= L_1 - l_1 \end{aligned} \tag{21}$$

zadovoljavaju uslov:

$$v_1^2 + v_2^2 + ...v_n^2 = \sum v^2 = \min \tag{22}$$

Ova metoda se bez teškoća može primenjivati kada su jednačine date u linearnom obliku, a ukoliko nisu treba ih svesti na linearni oblik, što je moguće ako je poznata bar približna vrednost nepoznatih veličina.

Ako postoje merenja l_1, l_2,... l_n, neka su L_1, L_2, ... L_n njihove najverovatnije vrednosti, a v_1, v_2,... v_n odstupanja. Najverovatnije vrednosti mogu se izraziti sledećim jednačinama [3]:

$$\begin{aligned} L_1 &= F_1(x, y, ..., u) = l_1 + v_1 \\ L_2 &= F_2(x, y, ..., u) = l_2 + v_2 \\ &\text{----------------------------------} \\ L_n &= F_n(x, y, ..., u) = l_n + v_n \end{aligned} \tag{23}$$

Ako se za promenljive uzmu približne vrednosti dobijene na ma koji način, ali koje su bliske vrednostima x_0, y_0, ... , u_0 biće:

$$L_i = F_i(x_0 + dx, y_0 + dy, + ... +, u_0 + du) \tag{24}$$

Razvojem u red, zanemarujući stepene višeg reda od prvog, dobiće se:

$$L_i = F_{oi}(x_0, y_0, + ... +, u_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \mathrm{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \mathrm{dy} + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 \mathrm{du} \tag{25}$$

Ako se prethodni izraz uvrsti u jednačinu (23) i zameni $F_{0i} - l_i = f_i$; $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = a_i$; $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = b_i$; ... $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 = c_i$, a za dx,dy, ... , du se stavi da su jednaki x, y, ... , u, dobiće se jednačine odstupanja u linearnom obliku:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + ... + c_1 u + f_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + ... + c_2 u + f_2 \\ &\text{-----------------------------------} \\ v_n &= a_n x + b_n y + ... + c_n u + f_n \end{aligned} \tag{26}$$

gde su najverovatnije vrednosti odstupanja koje figurišu u uslovu $\sum v^2 = \min$. Da bi se iz jednačina odstupanja izračunali x, y, ... , u, potrebno je date jednačine svesti na sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih. Uobičajeno je da se taj sistem linearnih jednačina zove normalne jednačine. Iz jednačina (26) suma kvadrata odstupanja $\sum v^2$ biće [3]:

$$\begin{aligned}\sum v^2 = {} & (a_1x + b_1y + ... + c_1u + f_1)^2 + \\ & + (a_2x + b_2y + ... + c_2u + f_2)^2 + \\ & + ... + \\ & + (a_nx + b_ny + ... + c_nu + f_n)^2\end{aligned} \tag{27}$$

Prethodna funkcija od n nepoznatih imaće minimum kada svi parcijalni izvodi po nepoznatim budu jednaki nuli, što znači da će biti onoliko jednačina koliko i nepoznatih:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \sum v^2}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial \sum v^2}{\partial y} = 0 \\ &.................. \\ &\frac{\partial \sum v^2}{\partial u} = 0\end{aligned} \tag{28}$$

Kako su jednačine odstupanja linearne, to će i jednačine (28) biti linearne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sum v^2}{\partial x} = {} & 2a_1(a_1x + b_1y + ... + c_1u + f_1) + \\ & + 2a_2(a_2x + b_2y + ... + c_2u + f_2) + \\ & + ... + \\ & + 2a_n(a_nx + b_ny + ... + c_nu + f_n)\end{aligned} \tag{29}$$

Parcijalnim izvođenjem po x, y,...u, dobija se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sum v^2}{\partial x} = {} & 2x(a_1a_1 + a_2a_2 + ... + a_na_n) + \\ & + 2y(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) + \\ & + ... + \\ & + 2u(a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n) + \\ & + 2(a_1f_1 + a_2f_2 + ... + a_nf_n)\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sum v^2}{\partial y} = {} & 2x(b_1a_1 + b_2a_2 + ... + b_na_n) + \\ & + 2y(b_1b_1 + b_2b_2 + ... + b_nb_n) + \\ & + ... + \\ & + 2u(b_1c_1 + b_2c_2 + ... + b_nc_n) + \\ & + 2(b_1f_1 + b_2f_2 + ... + b_nf_n)\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sum v^2}{\partial u} = {} & 2x(c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_na_n) + \\ & + 2y(c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_nb_n) + \\ & + ... + \\ & + 2u(c_1c_1 + c_2c_2 + ... + c_nc_n) + \\ & + 2(c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_nf_n)\end{aligned} \tag{32}$$

Prethodni izrazi pišu se u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}&a_1a_1 + a_2a_2 + ... + a_na_n = [aa] = \sum [aa] \\ &a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = [ab] = \sum [ab] \\ &.. \\ &a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n = [ac] = \sum [ac]\end{aligned} \tag{33}$$

Ako se gornji izraz zameni u jednačini (28) može se napisati:

$$\begin{aligned}&[aa]x + [ab]y + ... + [ac]u + [af] = 0 \\ &[ab]x + [bb]y + ... + [bc]u + [bf] = 0 \\ &.. \\ &[ac]x + [bc]y + ... + [cc]u + [cf] = 0\end{aligned} \tag{34}$$

što predstavlja izraz za normalne jednačine.

Dalji postupak svodi se na računanje nepoznatih veličina Gausovom metodom eliminacije, pomoću determinanti i dr.

Navedeni postupci računanja nepoznatih veličina su komplikovani, zahtevaju mnogo vremena, pa je danas široko rasprostranjen matrični postupak koji uprošćava proces računanja i prilagodljiv je računarskoj tehnici.

Jednačine odstupanja (26) mogu se predstaviti u matričnom obliku na sledeći način [1]:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & c_2 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_n & b_n & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ . \\ . \\ . \\ \mathrm{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{f}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mathrm{f}_\mathrm{n} \end{bmatrix} \tag{35}$$

ili kraće,

$$v = Ax + f \tag{36}$$

gde je:

A – matrica koeficijenata jednačina odstupanja,

x – vektor traženih vrednosti,

f – vektor slobodnih članova,

v – vektor popravaka.

Kako je uslov najmanjih kvadrata $\sum pvv = \min \ = \ \sum pv^2 = \min$, to će u matričnom obliku glasiti:

$$v^t pv = \min \tag{37}$$

gde je p matrica težina:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

Diferenciranjem izraza (37) i izjednačavanjem sa nulom dobija se:

$$dv^t pv + v^t p\, dv = 0 \tag{38}$$

ili kada se transponuje prvi član:

$$v^t p\, dv + v^t p\, \mathrm{dv} = 0 \tag{39}$$

odnosno:

$$v^t p\, dv = 0 \tag{40}$$

Diferenciranjem jednačine (36) dobija se:

$$dv = A\, dx \tag{41}$$

i ako se ovaj izraz uvrsti u jednačinu (40) može se pisati:

$$v^t pA\, dx = 0$$

odnosno:

$$v^t pA = 0 \tag{42}$$

ili transponovano:

$$A^t vp = 0 \tag{43}$$

kada se izraz (26) uvrsti u prethodni dobiće se normalna jednačina u matričnom obliku:

$$A^t p(Ax + f) = 0 \qquad (44)$$

odnosno:

$$A^t pAx + A^t pf = 0$$

ili kraće:

$$Nx + n = 0 \qquad (45)$$

gde je:

$N = A^t pA$ – matrica koeficijenata normalnih jednačina,

$n = A^t pf$ – vektor slobodnih članova normalnih jednačina.

Iz jednačine (45) može se odrediti vektor traženih veličina po sledećoj formuli:

$$x = -N^{-1} n \qquad (46)$$

Kada se izračunaju tražene veličine, može se pristupiti određivanju popravaka v po izrazu (36).

Kontrola računanja izvodi se po sledećoj formuli:

$$v^t v = f^t f + n^t x \qquad (47)$$

Numerički primer

Treba izračunati normalne vrednosti deklinacija na tačkama sa poznatim geografskim koordinatama i magnetskom deklinacijom.

Koordinate tačke u odnosu na koju se svode vrednosti deklinacija su:

$$\varphi = 44° 39' 04'' \quad \lambda = 20° 44' 03''$$

Tabela 1

Koordinate tačaka sa vrednostima magnetske deklinacije

Tačka	λ	φ	D
1.	20° 06′ 20″	44° 57′ 38″	02° 15′ 30″
2.	20° 11′ 43″	45° 03′ 06″	02° 09′ 24″
3.	20° 09′ 37″	44° 55′ 26″	02° 15′ 12″
4.	20° 14′ 55″	45° 01′ 04″	02° 15′ 06″
5.	20° 14′ 24″	44° 57′ 06″	02° 28′ 18″
6.	20° 16′ 47″	44° 55′ 40″	02° 28′ 36″
7.	20° 14′ 21″	44° 52′ 45″	02° 22′ 18″
8.	20° 20′ 03″	44° 58′ 21″	02° 14′ 36″
9.	20° 17′ 30″	44° 51′ 29″	02° 31′ 06″
10.	20° 24′ 11″	44° 55′ 37″	02° 21′ 18″

Merenja su istih težina $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1$.

Na osnovu podataka iz tabele jednačine popravaka imaju sledeći oblik:

$$V_1 = a_1 + 0{,}3094a_2 - 0{,}6286a_3 + 0{,}0958a_4 + 0{,}3952a_5 - 0{,}2477a_6 + (-2{,}2583)$$

$$V_2 = a_1 + 0{,}4006a_2 - 0{,}5389a_3 + 0{,}1604a_4 + 0{,}2904a_5 - 0{,}2159a_6 + (-2{,}1567)$$

$$V_3 = a_1 + 0{,}2723a_2 - 0{,}5739a_3 + 0{,}0744a_4 + 0{,}3293a_5 - 0{,}1563a_6 + (-2{,}2533)$$

$$V_4 = a_1 + 0{,}3667a_2 - 0{,}4856a_3 + 0{,}1344a_4 + 0{,}2358a_5 - 0{,}1781a_6 + (-2{,}2517)$$

$$V_5 = a_1 + 0{,}3006a_2 - 0{,}4942a_3 + 0{,}0903a_4 + 0{,}2442a_5 - 0{,}1486a_6 + (-2{,}4170)$$

$$V_6 = a_1 + 0{,}2767a_2 - 0{,}4544a_3 + 0{,}0765a_4 + 0{,}2065a_5 - 0{,}1257a_6 + (-2{,}4767)$$

$$V_7 = a_1 + 0{,}2281a_2 - 0{,}4950a_3 + 0{,}0520a_4 + 0{,}2450a_5 - 0{,}1129a_6 + (-2{,}3717)$$

$V_8 = a_1 + 0,4214a_2 – 0,4000a_3 + 0,1033a_4 + +0,1600a_5 – 0,1286a_6 + (–2,2433)$

$V_9 = a_1 + 0,2069a_2 – 0,4425a_3 + 0,0428a_4 + +0,1958a_5 – 0,0916a_6 + (–2,5183)$

$$V_{10} = a_1 + 0,2758a_2 – 0,3311a_3 + 0,0761a_4 + +0,1096a_5 – 0,0913a_6 + (–2,3550) \quad (48)$$

Na osnovu jednačina popravaka dobija se matrica A čiji su elementi konstante koje se nalaze ispred traženih veličina a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Elementi matrice traženih veličina x su:

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3808 \\ -0,8327 \\ -6,2225 \\ -3,8074 \\ -8,2963 \\ -3,5589 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Normalne vrednosti geomagnetske deklinacije na navedenim tačkama prikazane su u tabeli 2.

Tabela 2
Normalne vrednosti geomagnetske deklinacije

Tačka	D	Tačka	D
1.	02° 16′ 22″	6.	02° 25′ 15″
2.	02° 08′ 57″	7.	02° 26′ 32″
3.	02° 15′ 59″	8.	02° 20′ 21″
4.	02° 15′ 47″	9.	02° 30′ 03″
5.	02° 21′ 53″	10.	02° 20′ 15″

Zaključak

Matematička analiza magnetskog polja izvodi se na osnovu postojećih rezultata merenja elemenata i komponenti magnetskog polja Zemlje. Da bi se koristio Gausov metod analize, potrebno je, pored merenih veličina, izvršiti i računanja razlika geografskih širina i dužina.

Ukoliko se želi analizirati polje regionalne anomalije, onda se razlike geografskih širina i dužina računaju u odnosu na geomagnetsku opservatoriju koja se nalazi u središtu teritorije ili ako se vrši analiza polja lokalne anomalije, razlike geografskih širina i dužina računaju se u odnosu na neku od središnjih tačaka.

Formiranjem sistema jednačina, na osnovu izraza za normalne vrednosti magnetskog polja Zemlje, dobija se polazna osnova za primenu metoda najmanjih kvadrata. Matričnom interpretacijom ovog metoda i primenom modela računanja, u geodeziji poznatog kao posredno izravnanje, na vrlo efikasan način dolazi se do traženih vrednosti, odnosno do vrednosti normalnog ili anomalijskog dela magnetskog polja Zemlje.

Literatura:

[1] Mihailović, K.: Geodezija 2, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.
[2] Mihajlović, S.: Spektralna analiza varijacija i magnetskih bura na geomagnetskoj opservatoriji Grocka, magistarski rad, Beograd, 1998.
[3] Muminagić, A.: Račun izravnanja, Beograd, 1965.
[4] Prodanović, G.: Značaj magnetske deklinacije za orijentaciju ljudi i sredstava, specijalistički rad, Beograd, 1998.
[5] Starčević, M., Đorđević, A.: Geološki atlas Srbije, Beograd, 1996.
[6] Stefanović, D.: Geomagnetske metode istraživanja, Beograd, 1978.