KONTROLA TAČNOSTI REZULTATA U SIMULACIJAMA MONTE KARLO

Nikolić V. *Nebojša*, Ministarstvo odbrane Republike Srbije, Sektor za politiku odbrane, Institut za strategijska istraživanja, Beograd

UDC: 519.245/.246

Sažetak:

U radu je demonstrirana primena metode automatizovanog ponavljanja nezavisnih simulacionih eksperimenata sa prikupljanjem statistike slučajnih procesa, u dostizanju i kontroli tačnosti simulacionih rezultata u simulaciji sistema masovnog opsluživanja Monte Karlo. Metoda se zasniva na primeni osnovnih stavova i teorema matematičke statistike i teorije verovatnoće. Tačnost simulacionih rezultata dovedena je u direktnu vezu sa brojem ponavljanja simulacionih eksperimenata.

Ključne reči: *simulacije Monte Karlo, kontrola tačnosti, masovno opsluživanje.*

Uvod

Savremene ratove karakteriše visok nivo intenziteta naprezanja snaga, nelinearnost i asimetričnost dejstava, dinamičnost i relativna kratkotrajnost uz oduvek prisutnu složenost i neizvesnost. Potreba za proučavanjem kompleksne fizionomije savremenog ratovanja nameće niz zahteva istraživačima. Simulacione metode pokazale su se kao veoma pogodne u modelovanju složenih sistema i procesa u kojima postoje faktori stohastičke prirode.

Međutim, simulacione metode imaju i jedan nedostatak; to je problem kontrole tačnosti simulacionih rezultata, što je posebno izraženo u simulaciji stohastičkih sistema i procesa. Preokupirani rešavanjem složenosti modela, istraživači često zanemaruju pitanje obezbeđenja tačnosti izlaznih simulaconih rezultata. Ipak, problem tačnosti simulacija prepoznat je u naučnim krugovima, što je rezultiralo nizom pokušaja njegovog rešavanja. Jedno od prvih otvorenih upozorenja svima koji se bave simulacijom ili koriste njene rezultate, uputio je Gaither B., 1990, glavni urednik časopisa ACM Performance Evaluation Review, u svom članku „Empty empiricism“ 0, u kojem kaže: *„...Nije mi poznata ni jedna druga inženjerska ili naučna oblast u kojoj je dopuštena tolika sloboda u tumačenju rezultata kao u simulaciji“.*

nebojsa.nikolic11@mod.gov.rs

U mnogim radovima iz oblasti simulacija pitanja tačnosti simulacionih rezultata se nedovoljno ili čak uopšte ne razmatraju, a često se ne prikazuje ni potpuni eksperimentalni opis simulacionih eksperimenata. Ova situacija, koja je sama po sebi problem, detaljno je analizirana u radu 0, gde je istaknuto da se u preko 70% publikacija nije vodilo računa o, blago rečeno, problemima tačnosti rezultata simulacije, pa su autori ovo stanje u oblasti simulacije nazvali KRIZOM. Time je potvrđen i navedeni utisak Gaithera, kao i aktuelnost problema tačnosti rezultata dobijenih primenom simulacionih metoda.

Simulacije i matematička statistika

Simulacione metode postale su veoma aktuelne uporedo sa širom primenom računarske tehnike i praktično prate razvoj računara i softvera, što znači da su u stalnoj ekspanziji primene, ali i razvoja. Osnovna veza simulacija Monte Klarlo sa informatičkom oblašću jeste da se „osnovni materijal“ (statistički uzorci) za metodu obezbeđuje informatičkim sredstvima. Zato su ove metode poznate i pod sledećim terminima: računarska simulacija, simulacija stohastičkih događaja, stohastička simulacija, metoda Monte Karlo, simulaciono modelovanje, itd. U skladu sa sveprisutnom informatizacijom, metoda simulacionog modelovanja slučajnih procesa (metoda Monte Karlo) postala je vrlo popularna i široko primenjena u raznim oblastima, a primenjuju je istraživači i praktičari različitih profila i matematičkih znanja. Jednu od najjednostavnijih formulacija statističke prirode eksperimenata na simulacionim modelima izrekao je, početkom osamdesetih godina dvadesetog veka, Cooper R., 0: „Simulacija (simulacioni prolaz) jeste statistički eksperiment“ („*A simulation run is a statistical experiment, ...*“, u poznatoj i često citiranoj knjizi, str. 288).

Krajnji proizvod primene ove metode je simulacioni model u formi programa za računar, čiji je osnovni zadatak da oponaša (simulira) rad i ponašanje proučavanog realnog sistema. Postoje brojni računarski jezici, kako opšti tako i specijalizovani za simulaciju, a stalno se pojavljuju sve bolji i moćniji specijalizovani simulacioni paketi. Međutim, može se pokazati da je ova popularnost i kontraproduktivna, jer je na neki način zaboravljeno, ili bar zanemareno statističko ishodište i statistička priroda ove metode.

Neodvojivi pojam, kad god se govori o statistici, jeste pojam matematičke verovatnoće. Naizgled jednostavan, ali pojam koji se u osnovnim akademskim kursevima određuje kroz bar četiri definicije: klasična, geometrijska, statistička (frekvencijalna) i aksiomatska definicija verovatnoće. Statistička, odnosno frekvencijalna definicija verovatnoće je najprimerenija potrebama problematike u ovom radu.

U odnosu na egzaktne (analitičke i numeričke) matematičke metode, glavni nedostatak simulacionih metoda je problematična tačnost rezultata, odnosno nedovoljna spoznaja koliko je maksimalno odstupanje ili greška rezultata i koliki je nivo poverenja za te rezultate. Postoje brojni radovi, uglavnom u stranoj literaturi, koji su posvećeni upravo sagledavanju i otklanjanju nedostataka po pitanju tačnosti simulacionih metoda. U tom smislu problematika primene i razvoja metoda simulacionog modelovanja je vrlo aktuelna. Kao potvrda ovog stava, citiraće se (u slobodnom prevodu) navodi iz dva rada referentnih autora, iz različitih perioda:

A) Početak osamdesetih godina 20. veka, Cooper R., 1981, 0 (str. 288): *„...Verovatno je pošteno reći da opšti pokušaj da se realizuje potencijal visokoefikasnih i informacijama bogatih simulacionih rezultata uz visok stepen kontrole simulacionog modela i ulaznih podataka, još nije ostvaren. To je oblast aktivnih istraživanja, ali još ne posebno produktivna u smislu obezbeđenja korisnih procedura za praktičare. U ovom poglavlju diskutovaće se o nekim statističkim pitanjima (ali, na nesreću, ne mnogo u smislu davanja odgovora): 1) Prvo pitanje je očigledno: Koliko dugo treba da se dosegne statistički ekvilibrijum (stacionarno stanje, primedba NN)? ... 2) Pretpostavimo da je pitanje dosezanja ekvilibrijuma rešeno. Koliko onda dodatnih dolazaka klijenata u sistem treba simulirati da bi simulacioni rezultati bili bliski „pravim“ vrednostima? Drugim rečima, koliko veliki treba da bude uzorak? I da li je bolje uraditi jednu dužu, ili nekoliko kraćih simulacija“.*

B) Godine 2000. Goldsman, Marshall, Seong-Hee i Nelson, 0 (str. 552) konstatuju: *„...Uprkos našem uverenju, ima određeni broj stvari koje još treba odrediti: 1) dugopostojeći problem inicijalizacije (početni, prelazni period simulacije, primedba NN), ... 2) čak i pretpostavljajući da je problem inicijalizacije rešen, još uvek ostaje fundamentalno pitanje o tome kada je dovoljno podataka sakupljeno da bi se imao statistički validan uzorak. ... 3) nijedna od novih procedura izloženih u radu ne obuhvata direktno tehnike za smanjenje varijanse...“*

Modeli koji su bili korišćeni u brojnim istraživanjima o tačnosti simulacionih rezultata, po pravilu su bili modeli sistema masovnog opsluživanja (SMO)! Time je i inače izazovan problem tačnosti simulacionih rezultata postao još teži i izazovniji. Razlog tome je uticaj prelaznog režima rada SMO (detaljnije videti u 0). Robinson S., 0, klasifikuje čak 26 procedura za razmatranje problema početnog perioda simulacije, odnosno prelaznog režima rada sistema.

Ostale metode (analitičke i numeričke) koriste se sa ciljem provere rezultata dobijenih simulacijom. Ovakva provera moguća je samo za jednostavnije modele za koje postoji analitički opis. Osnovna ideja jeste da se iskoriste prednosti simulacionih metoda (sposobnost relativno lakog opisa, kreiranja i razmatranja sistema bilo kog tipa, složenosti i veličine), a njeni nedostaci svedu na najmanju meru.

Ocena kvaliteta efikasne metode

Da bi jedna metoda razmatranja sistema masovnog opsluživanja bila efikasna, mora da zadovolji sve zahteve koje nameće proučavanje realnih SMO, u ovom slučaju SMO iz vojne oblasti. Ti zahtevi su sledeći:

1) bilo koji tip SMO (razne funkcije gustine verovatnoće potoka klijenata);

2) bilo koja složenost SMO (broj i karakter veza; disciplina opsluge; strpljivost, itd.)

3) bilo koja veličina SMO (mreže redova ili višefaznost opsluge);

4) bilo koja opterećenost sistema (manje, jednako ili veće od jedan);

5) bilo koje vreme rada SMO (konačno ili proizvoljno veliko).

Pored nabrojanih aspekata univerzalnosti, efikasna metoda razmatranja realnih SMO mora da bude i:

6) tačna;

7) jednostavna i razumljiva;

8) dostupna po pitanju resursa (jeftina).

Treba istaći da su zahtevi navedeni pod 1), 2), 3) i donekle 5) do sada uglavnom rešeni samom primenom metoda simulacionog modelovanja u domenu opisa i kreiranja složenih simulacionih modela, ali ne i sa dovoljno spoznatom tačnošću i poverenjem u izlazne simulacione rezultate. Drugim rečima, simulaciono modelovanje ima potencijala za opis-izgradnju modela složenih sistema, ali još uvek nema mogućnosti da zadovolji zahteve navedene pod: 4), 6), 7), i 8) i to ne samo za složene sisteme, već i za tzv. najjednostavnije.

Veza tačnosti i broja ponavljanja simulacija

Suština primenjene metode sadržana je u njenom nazivu: *„Automatizovana nezavisna ponavljanja simulacionih eksperimenata, sa prikupljanjem statistike slučajnih procesa“* **(„Automated Independent Replications with Gathering Statistics of Stochastic Processes“– AIRGSSP).** Metoda je izložena 2008. godine u renomiranom međunarodnom naučnom časopisu: *European Journal of Operational Research* 0.

U osnovi AIRGSSP metode jesu najjednostavniji, ali istovremeno i najvažniji zakoni matematičke statistike. Statistička priroda simulacione metode ogleda se u sledećem: „radni materijal“ za primenu metoda matematičke statistike predstavljaju statistički uzorci; statističke uzorke čine elementi, a njih predstavljaju snimljene vrednosti koje prima posmatrana slučajna veličina tokom simulacionih eksperimenata.

Osnovni cilj je da se u funkcionalnu vezu dovede nivo tačnosti simulacionih rezultata sa uslovima izvođenja eksperimenta, odnosno sa brojem ponavljanja simulacije. U literaturi se mogu naći radovi koji direktno ističu ovaj problem kroz ogoljeno pitanje: „How much is enough?“ (Koliko je dovoljno?). Predlog odgovora na ovo pitanje sledi upravo iz razmatranja obezbeđenja tačnosti verovatnoća stanja sistema kao primarne mere performanse.

U kontekstu simulacionog modelovanja Monte Karlo broj ponavljanja nezavisnih simulacionih eksperimenata predstavlja, u stvari, veličinu ili brojnost uzorka za intervalnu ocenu verovatnoća stanja.

DOKAZ izraza za određivanje veličine uzorka, tj. broja ponavljanja simulacionog eksperimenta.

Pri izvođenju dokaza koristiće se sledeći sistem označavanja:

n – veličina (brojnost) uzorka,

p – verovatnoća stanja sistema koja se posmatra,

q – komplement posmatrane verovatnoće stanja (q = 1–p),

ε – maksimalno odstupanje posmatrane verovatnoće, izraženo u procentima,

z_c – koeficijent poverenja za normalnu raspodelu,

f – relativna frekvencija stanja SMO na koje se odnosi posmatrana verovatnoća,

ε_A – apsolutno odstupanje relativne frekvencije od verovatnoće posmatranog stanja,

σ_p – standardna greška ocene verovatnoće p.

Na osnovu naznačenih referentnih izvora, odnosno praktično bilo koje literature iz oblasti matematičke statistike i verovatnoće i to osnovnih kurseva, kao opšte poznati važe sledeći izrazi:

– standardna greška ocene verovatnoće p:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} \tag{1}$$

– intervalna ocena verovatnoće p:

$$p - z_c\sigma_p \le f \le p + z_c\sigma_p \tag{2}$$

Takođe, važe i sledeći izrazi:

– apsolutno odstupanje relativne frekvencije od verovatnoće posmatranog stanja:

$$\varepsilon_A = |p - f| \tag{3}$$

– odnos proporcije:

$$\varepsilon_A : p = \varepsilon : 100 \tag{4}$$

Na ovom mestu treba uočiti sledeće napomene: Prvo, izraz (2) je jedan od oblika poznatog izraza za intervalnu ocenu posmatrane verovatnoće, na osnovu relativne frekvencije posmatranog događaja i poznatih stavova o standardnoj grešci verovatnoće i datom koeficijentu poverenja za Normalnu raspodelu.

Drugo, pri analizi veličine odstupanja vrednosti relativne frekvencije u odnosu na verovatnoću, mnogo je pogodnije koristiti se procentualnim iskazivanjem te razlike. Zbog toga su u analizu uvedeni i izrazi (3) i (4).

U daljem postupku izvršiće se sledeće:

– izraz (2) napisaće se u obliku:

$$|p - f| = z_c \sigma_p \tag{5}$$

– odnosno, koristeći i izraz (3), imamo:

$$\varepsilon_A = z_c \sigma_p \tag{6}$$

– sa druge strane, iz izraza (4) neposredno sledi izraz:

$$\varepsilon_A = \frac{p\varepsilon}{100} \tag{7}$$

Sada dovedemo u vezu izraze (6) i (7), pa se dobija sledeći izraz:

$$z_c \sigma_p = \frac{p\varepsilon}{100} \tag{8}$$

U prethodnom izrazu, (8), zameniti veličinu za σ_p iz izraza (1), pa se dobija sledeća jednakost:

$$z_c \sqrt{\frac{pq}{n}} = \frac{p\varepsilon}{100} \tag{9}$$

Kvadriranjem izraza (9) dobija se:

$$z_c^2 \frac{pq}{n} = \frac{p^2 \varepsilon^2}{100^2} \tag{10}$$

Na kraju, iz elementarnih algebarskih operacija prethodnog izraza sledi:

$$z_c^2 \frac{q}{n} = p\left(\frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \tag{11}$$

Odatle se dobija konačni izraz za određivanje veličine (brojnosti) uzorka u postupku intervalne ocene posmatrane verovatnoće stanja:

$$n = \frac{q}{p}\left(\frac{100}{\varepsilon}\right)^2 z_c^2 \tag{12}$$

Time je dokaz završen. Ovim izrazom data je veza između sledećih veličina:

• verovatnoće stanja SMO,

• veličine-brojnosti uzorka za ocenu verovatnoće stanja,

• koeficijenta statističkog poverenja,
• maksimalno mogućeg odstupanja ocene verovatnoće stanja.

U bilo kom, ali samo u jednom trenutku SMO se može nalaziti samo u jednom stanju. Ako se određeni broj puta simulira čitava situacija, za iste ulazne veličine, i pri tome se beleži da li je SMO u posmatranom stanju ili ne, na taj način može se formirati statistički uzorak za ocenu verovatnoće stanja SMO u posmatranom trenutku.

Za ilustraciju primene ovog izraza biće razmotren sledeći jednostavan numerički primer: kreiran je određeni simulacioni model koji, pored ostalog, kao izlazne rezultate može da daje i frekvenciju pojave posmatranog događaja. Pretpostavimo da je teorijska vrednost verovatnoće izabranog stanja SMO jednaka 0,1.

Postavlja se pitanje – kako obezbediti da izlazni simulacioni rezultati za ocenu te verovatnoće ne odstupaju više od 10% od navedene vrednosti, uz određeni nivo statističkog poverenja, na primer 0,95.

Rešenje zadatka je sledeće:

a) Iz postavke zadatka je poznato:

p = 0,1 – verovatnoća stanja SMO koja se posmatra,

q = 0,9 – komplement posmatrane verovatnoće stanja (q=1-p),

ε = 10% – maksimalno odstupanje posmatrane verovatnoće, izraženo u procentima,

z_c = 1,96 – koeficijent poverenja za normalnu raspodelu, za nivo poverenja 0,95.

b) Primenom izraza (12) dobija se:

$$n = \frac{0.9}{0.1}\left(\frac{100}{10}\right)^2 1.96^2 = 3457 \qquad (13)$$

Dakle, prema uslovima zadatka, potrebno je izvršiti 3457 eksperimenata, da bi se ocenila verovatnoća (0,1) posmatranog događaja (da će SMO biti u posmatranom stanju), uz maksimalno moguću grešku ocene do 10%, uz statistički nivo poverenja 0,95.

Sa aspekta simulacionog modelovanja potrebno je realizovati 3457 nezavisnih simulacionih eksperimenata, kako bi se zadovoljili postavljeni uslovi u ovom primeru. Po realizaciji ovih 3457 eksperimenata može se očekivati, sa statističkim poverenjem od 0,95, da će se SMO naći u posmatranom stanju: 3457*0,1 = 345,7 ≈ 346 puta ±10%; odnosno (uz 10% ≈ 34,6 ≈ 35). Prema tome, apsolutna frekvencija pojave posmatranog stanja SMO u 3457 eksperimenata biće u intervalu od 311 do 381 realizacije. Svaki rezultat u ovom intervalu, u kontekstu uslova postavljenih u zadatku, dobar je.

Ukoliko bi se želela pouzdanija ocena sa, na primer, poverenjem 0,99 (koeficijent poverenja je onda 2,58), i sa još manjom maksimalnom greškom, od na primer 5%, tada je potreban uzorak brojnosti:

$$n = \frac{0.9}{0.1}\left(\frac{100}{5}\right)^2 2.58^2 = 23963 \qquad (14)$$

Odnosno, potrebno je izvršiti 23 963 nezavisnih simulacionih eksperimenata. Na osnovu poslednjeg uočljivo je veliko povećanje brojnosti uzorka potrebnog za tek nešto tačniju i nešto pouzdaniju ocenu. Ako je i verovatnoća koja se posmatra još manja, što je čest slučaj u razmatranju SMO sa velikim brojem stanja, brojnost potrebnog uzorka se dodatno povećava.

Saglasnost simulacionih sa teorijskim rezultatima

Suštinska vrednost jednog simulacionog modela, pa i njegova svrsishodnost, jeste kvalitet i upotrebljivost simulacionih rezultata dobijenih na osnovu eksperimenata na simulacionom modelu. Drugim rečima, ovi rezultati moraju imati određeni kredibilitet, odnosno na osnovu nekih faktora treba im verovati. Ti faktori mogu biti različitog karaktera.

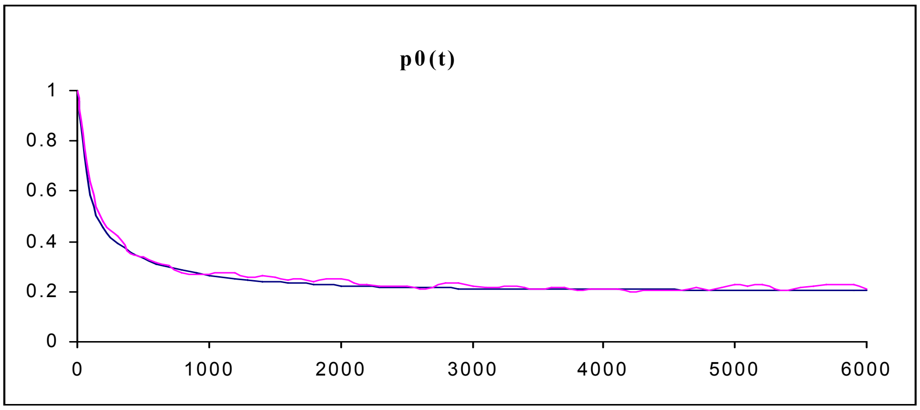
Praktično i teorijski posmatrano, najsnažniji način obezbeđenja kredibiliteta nekog simulacionog modela jeste u slučaju kada postoji odgovarajući opis posmatranog problema analitičkim metodama (matematičke formule), pri čemu je taj opis moguće dalje razviti i rešiti bilo analitičkim metodama ili primenom numeričkih metoda. Ako su simulacioni rezultati u saglasnosti sa rezultatima dobijenim analitičkim ili numeričkim metodama može se reći da je taj simulacioni model dobar. Što je veći nivo te saglasnosti, utoliko je taj simulacioni model bolji.

Ako se, pri tome, nivo saglasnosti simulacionih rezultata sa analitičkim (ili rezultatima dobijenim numeričkim metodama) može i zakonomerno kontrolisati, onda je logično zaključiti da je simulacioni model dobar. Na taj način se kvalitet simulacionih rezultata ozbiljno približava odnosu koji važi na relaciji: rezultati na osnovu primene analitičkih izraza i rezultati na osnovu primene numeričkih metoda. Drugim rečima, izvesno odstupanje simulacionih rezultata od teorijskih postoji, ali se ono može statistički tačno odrediti i po želji ili potrebi tačno kontrolisati.

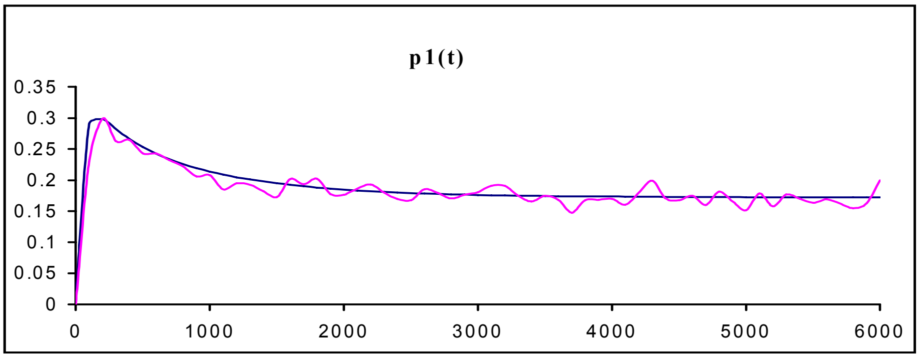
Provera simulacionog modela poređenjem sa analitičkim rezultatima moguća je samo za nekoliko najjednostavijih modela masovnog opsluživanja za koje je moguće izvesti praktično primenljive analitičke izraze ne samo za stacionarni, već i za prelazni period rada. Takav je, na primer, slučaj modela M/M/1/0, zatim M/M/1/1, i sl. Reč je, dakle, o onim SMO koji imaju ili malo mogućih stanja sistema, pa tako i malo jednačina stanja ili su njihove jednačine stanja takve da ih je moguće relativno lako rešiti određenim algebarskim ili drugim postupcima.

Skup rešivih modela SMO moguće je dosta proširiti primenom numeričkih metoda. Međutim, i ovde postoje granice: već za sisteme sa nekoliko desetina jednačina postupak rešavanja i manipulacije sa takvim modelima postaje otežan.

Na grafovima 1 i 2, radi ilustracije prethodnih stavova, prikazana su rešenja za dve verovatnoće stanja *($p_0(t)$ i $p_1(t)$)* sistema masovnog opsluživanja (uzetog kao primer iz 0): tipa M/M/1/7, koji: radi ograničeno vreme (6000 vremenskih jedinica), uz prosečno vreme opsluge klijenata od 100 vremenskih jedinica, prosečnim vremenom između dolaska dva klijenta od 120 vremenskih jedinica i sa početnim stanjem „u sistemu nema klijenata“. Matematički opis ovog SMO prikazan je izrazima (15, 16 i 17).



Graf 1 – Verovatnoća stanja $p_0(t)$ dobijena simulacijom i numeričkim metodama



Graf 2 – Verovatnoća stanja $p_1(t)$ dobijena simulacijom i numeričkim metodama

Na osnovu grafičkog prikaza može se uočiti dobro slaganje simulacionih rezultata sa rezultatima dobijenim primenom numeričkih metoda. Dodatno, moguća je provera nekim od statističkih testova, na primer χ2-testa.

Rešenja za ostale verovatnoće stanja ovog SMO dobijaju se na isti način, a svi rezultati su prikazani u 0. Ovaj SMO ima 9 mogućih stanja, što znači da je potpuno opisan sistemom od 9 Erlangovih jednačina. To su sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\
\dot{p}_1(t) &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + \mu p_2(t) \\
\dot{p}_2(t) &= \lambda p_1(t) - (\lambda + \mu) p_2(t) + \mu p_3(t) \\
\dot{p}_3(t) &= \lambda p_2(t) - (\lambda + \mu) p_3(t) + \mu p_4(t) \\
\dot{p}_4(t) &= \lambda p_3(t) - (\lambda + \mu) p_4(t) + \mu p_5(t) \\
\dot{p}_5(t) &= \lambda p_4(t) - (\lambda + \mu) p_5(t) + \mu p_6(t) \\
\dot{p}_6(t) &= \lambda p_5(t) - (\lambda + \mu) p_6(t) + \mu p_7(t) \\
\dot{p}_7(t) &= \lambda p_6(t) - (\lambda + \mu) p_7(t) + \mu p_8(t) \\
\dot{p}_8(t) &= \lambda p_7(t) - \mu p_8(t)
\end{aligned} \tag{15}$$

Važi i normirajući kriterijum (suma svih verovatnoća stanja sistema, u bilo kom trenutku, jednaka je jedinici):

$$\sum_{i=0}^{8} p_i(t) = 1 \tag{16}$$

Takođe, važe i sledeći početni uslovi:

$$\begin{aligned}
&p_0(0) = 1 \\
&p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = \ldots = p_8(0) = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Takav, relativno mali sistem jednačina, moguće je rešiti primenom numeričkih metoda. Radi toga, moguće je korišćenje nekog računarskog paketa za primenu numeričkih metoda (na primer: paket MATLAB) i dobiti rešenja za sve verovatnoće stanja kao funkcije vremena, u tabelarnoj i grafičkoj formi. Praktično je, dakle, rešen sistem diferencijalnih jednačina prvog reda sa konstantnim koeficijentima, primenom numeričkih metoda („glatke“ krive na grafovima 1 i 2). Kao što je poznato, ovaj postupak se skraćeno naziva numerička integracija.

Sa druge strane, približno ista rešenja datog sistema diferencijalnih jednačina stanja SMO moguće je dobiti i primenom simulacione metode nazvane „automatizovana nezavisna ponavljanja simulacionih eksperimenata, sa prikupljanjem statistike slučajnih procesa“ ili, u originalu: „Automated Independent Replications with Gathering Statistics of Stochastic Processes“ (AIRGSSP).

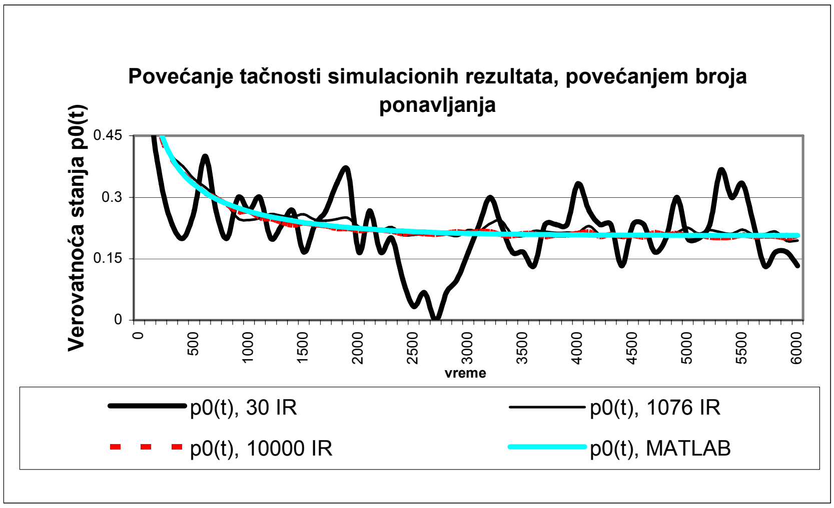
Mada nije dovoljno poznato, ovaj postupak se, po analogiji sa numeričkom integracijom sistema diferencijalnih jednačina, može skraćeno nazvati „statistička integracija“ ili integracija Monte Karlo 0. Jasno, na grafovima 1 i 2, „glatke“ krive predstavljaju rešenja dobijena primenom numeričkih metoda, a „oscilatorne“ krive predstavljaju simulacione rezultate.

Simulacioni rezultati u ovom primeru baziraju se na uzorku veličine 1076 elemenata, odnosno izvršeno je toliko nezavisnih simulacionih eksperimenata (svaki eksperimenat je istog vremenskog trajanja – 6000 vremenskih jedinica). Ova veličina uzorka (1076) obezbeđuje maksimalnu grešku do 15,3% uz nivo poverenja 0,9973, za ocenu stacionarne vrednosti verovatnoće stanja $p_0(t)$. Odnosno, ako se želi veća tačnost, tj. manja greška, treba povećati veličinu uzorka (tj. broj ponavljanja simulacije). Na primer, za 10 000 ponavljanja, uz isti nivo poverenja, treba očekivati odstupanje simulacionih rezultata do maksimalno 5,9%, za uslove u ovom zadatku.

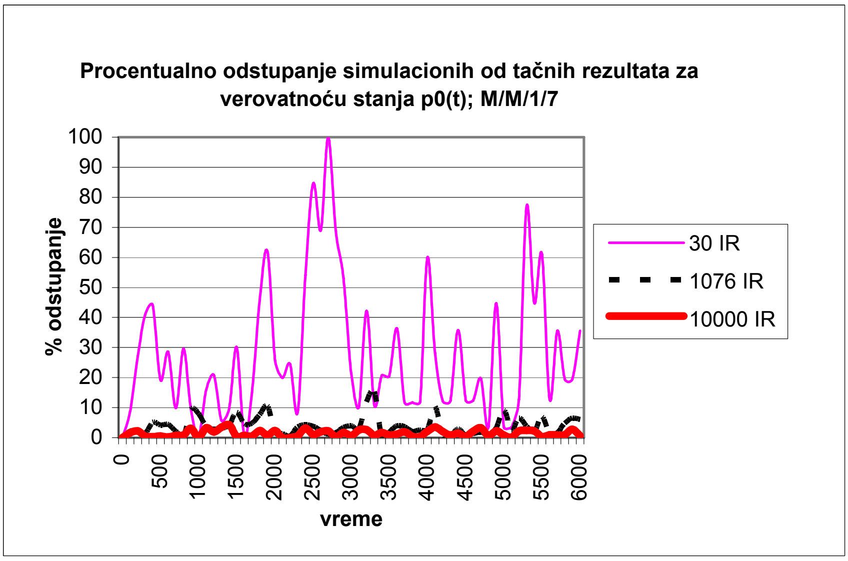
Demonstracija kontrole tačnosti

Na grafu 3 konkretno se demonstrira rezultat primene izloženog načina obezbeđenja tačnosti simulacionih rezultata. Radi preglednosti, prikazana je samo jedna verovatnoća stanja: $p_0(t)$, za SMO tipa M/M/1/7, za uslove rada: $\lambda = 1/120$; $\mu = 1/100$. Uporedo sa rešenjem dobijenim numeričkim metodama prikazana su tri simulaciona rešenja za tri različita broja ponavljanja simulacija (IR – Independent Replications):

- 30 nezavisnih ponavljanja (IR) simulacionog eksperimenta;
- 1076 nezavisnih ponavljanja (IR) simulacionog eksperimenta, i
- 10 000 nezavisnih ponavljanja (IR) simulacionog eksperimenta.



Graf 3 – Povećanje tačnosti simulacionih rezultata sa povećanjem broja ponavljanja



Graf 4 – Odstupanja simulacionih rezultata za različiti broj ponavljanja (IR)

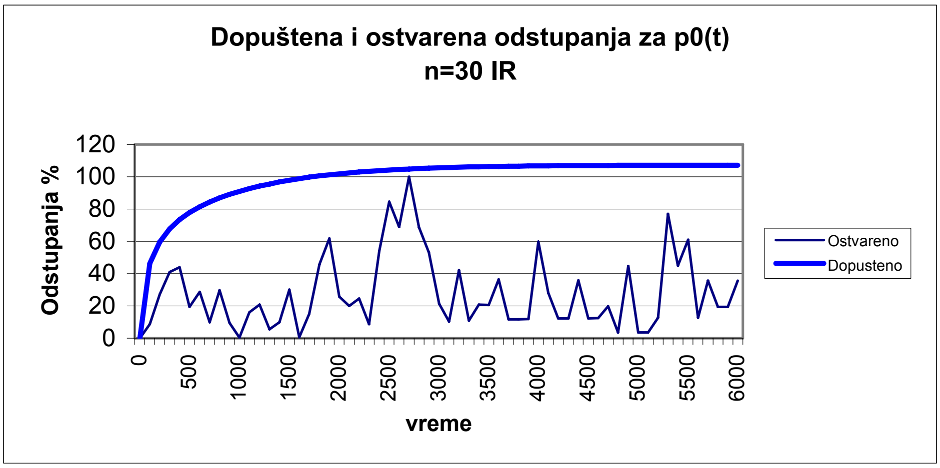
Sa grafa 3, a još bolje sa grafa 4 0 jasno se vidi da su odstupanja najveća za rezultate dobijene sa 30 ponavljanja simulacije (ovaj broj je izabran kao klasična granica između malih i velikih uzoraka). Vizuelno se uočavaju mnogo manja odstupanja rezultata za 1076 ponavljanja nego u prethodnom slučaju.

Odstupanja simulacionih rezultata za 10 000 simulacija su toliko mala da se vizuelno jedva primećuju. Naravno, ovi rezultati mogu se prikazati i tabelarno, kao i konkretne vrednosti odstupanja simulacionih rezultata u odnosu na rezultate dobijene primenom tačnih metoda. Primenom izraza (12) te razlike je moguće kvantifikovati za izabrani nivo poverenja.

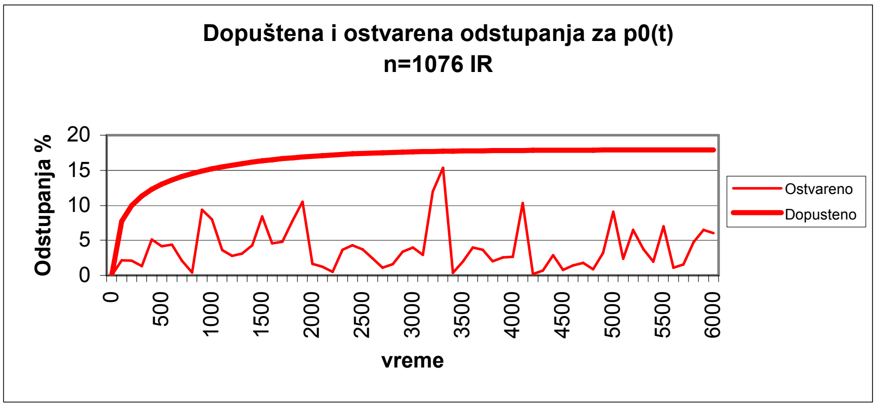
Odstupanja simulacionih rezultata u funkciji vremena

Za zadate uslove računa se maksimalno moguće odstupanje simulacionih rezultata za verovatnoću stanja koja se proučava. Drugim rečima, treba očekivati da simulacioni rezultati budu u okviru proračunatih granica odstupanja. Odnosno, svaki simulacioni rezultat u tako definisanom opsegu je dobar.

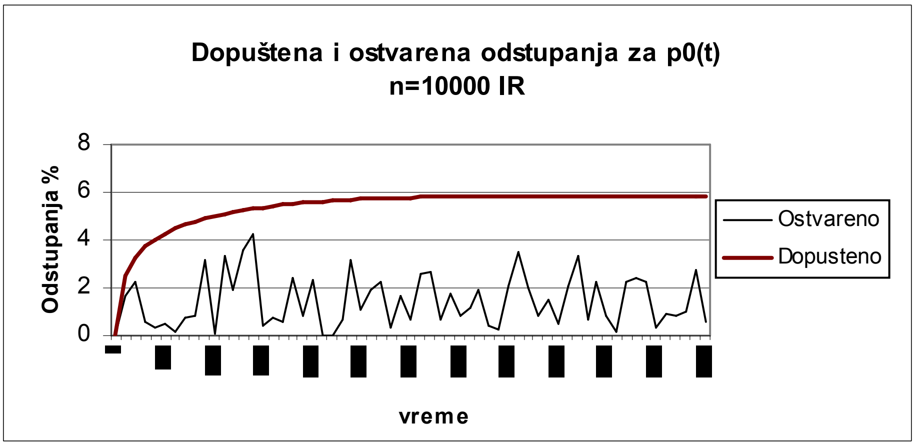
Sledi grafički prikaz tri skupa rezultata (za 30, 1076 i 10 000 nezavisnih ponavljanja simulacije – IR), za SMO tipa M/M/1/7. Sa grafova 5, 6 i 7 očigledno je da su odstupanja simulacionih rezultata manja od dopuštenih za date uslove. Tabela 1 daje prikaz numeričkih vrednosti ovih rezultata.



Graf 5 – Dopuštena i ostvarena odstupanja simulacionih rezultata za $p_0(t)$, za 30 IR



Graf 6 – Dopuštena i ostvarena odstupanja simulacionih rezultata za $p_0(t)$, za 1076 IR



Graf 7 – Dopuštena i ostvarena odstupanja simulacionih rezultata za $p_0(t)$, za 10 000 IR

Tabela 1

Numeričke vrednosti dopuštenih i ostvarenih odstupanja simulacionih rezultata

tip SMO: M/M/1/7 , T_λ=120 , T_μ=100 , vreme rada: 6000 vremenskih jedinica							
Koeficijent poverenja: z_c=3 (odgovara nivou poverenja od 0,9973)							
Veličina uzorka:		n_1=30		n_2=1076		n_3=10000	
vreme	tačne vrednosti verovatnoće stanja	Ostvareno	Dopušteno	Ostvareno	Dopušteno	Ostvareno	Dopušteno
t	$p_0(t)$	$\varepsilon^{sim,}$[%]	ε [%]	$\varepsilon^{sim,}$ [%]	ε [%]	$\varepsilon^{sim,}$ [%]	ε [%]
0	1	0	0	0	0	0	0
200	0,457	27,1	59,7	2,1	10,0	2,2	3,3
400	0,3567	43,9	73,6	5,1	12,3	0,3	4,0

600	0,3111	28,6	81,5	4,4	13,6	0,2	4,5
800	0,284	29,6	87,0	0,4	14,5	0,9	4,8
1000	0,2658	0,3	91,0	8,0	15,2	0,1	5,0
1200	0,2525	20,8	94,2	2,8	15,7	1,9	5,2
1400	0,2426	9,9	96,8	4,3	16,2	4,2	5,3
1600	0,2349	0,7	98,9	4,5	16,5	0,8	5,4
1800	0,2289	45,6	100,5	7,7	16,8	2,4	5,5
2000	0,2242	25,7	101,9	1,7	17,0	2,3	5,6
2200	0,2206	24,4	103,0	0,5	17,2	0,0	5,6
2400	0,2177	54,1	103,8	4,3	17,3	3,2	5,7
2600	0,2154	69,0	104,5	2,4	17,5	1,9	5,7
2800	0,2136	68,8	105,1	1,6	17,5	0,4	5,8
3000	0,2121	21,4	105,6	3,9	17,6	0,7	5,8
3200	0,211	42,2	105,9	12,0	17,7	2,7	5,8
3400	0,2101	20,7	106,2	0,4	17,7	1,8	5,8
3600	0,2094	36,3	106,4	4,0	17,8	1,2	5,8
3800	0,2088	11,7	106,6	2,0	17,8	0,4	5,8
4000	0,2084	59,9	106,7	2,7	17,8	2,1	5,8
4200	0,208	12,2	106,9	0,2	17,8	2,0	5,9
4400	0,2078	35,8	106,9	2,9	17,9	1,5	5,9
4600	0,2076	12,4	107,0	1,4	17,9	2,1	5,9
4800	0,2074	3,6	107,1	0,9	17,9	0,7	5,9
5000	0,2072	3,5	107,1	9,1	17,9	0,9	5,9
5200	0,2071	12,7	107,2	6,5	17,9	2,3	5,9
5400	0,2071	44,9	107,2	2,0	17,9	2,3	5,9
5600	0,207	12,7	107,2	1,1	17,9	1,0	5,9
5800	0,2069	19,4	107,2	4,8	17,9	1,0	5,9
6000	0,2069	35,6	107,2	6,0	17,9	0,6	5,9
		%	%	%	%	%	%
maksimalno		100,0	107,2	15,3	17,9	4,2	5,9
prosečno		27,8	98,1	3,9	16,4	1,4	5,4
		Ostvareno	Dopušteno	Ostvareno	Dopušteno	Ostvareno	Dopušteno

Zaključak

Jedan od centralnih problema u simulaciji jeste problem tačnosti simulacionih rezultata. Mada određeni rezultati po ovom pitanju postoje, problem je otvoren za nova istraživanja. U radu je izložen postupak ostvarivanja kontrole nad tačnošću izlaznih rezultata u slučaju simulacije sistema masovnog opsluživanja Monte Karlo.

Radi potpunog obuhvata problema detaljno je prikazan postupak definisanja veze između nivoa odstupanja simulacionih rezultata od teorijskih i broja ponavljanja nezavisnih simulacionih eksperimenata.

Simulacioni model kojim su dobijeni numerički podaci u konkretnom primeru razvijen je prema metodi nazvanoj „automatizovana nezavisna ponavljanja simulacionih eksperimenata, sa prikupljanjem statistike slučajnih procesa"(„Automated Independent Replications with Gathering Statistics of Stochastic Processes", skraćeno AIRGSSP).

Opšti zaključak koji proizilazi iz analize izloženih rezultata jeste da je za postizanje veće tačnosti izlaznih simulacionih rezultata potrebno izvršiti veliki broj nezavisnih simulacionih eksperimenata. Predloženi matematički izraz daje kvantitativnu vezu između tačnosti rezultata, pouzdanosti ocene i broja nezavisnih ponavljanja simulacionog eksperimenta. U daljim pravcima istraživanja moguća je primena izloženih postupaka na složenije tipove i uslove rada sistema masovnog opsluživanja, kao i na druge klase slučajnih procesa.

Literatura

[1] Gaither, B.: „Empty empiricism", ACM Performance Evaluation Review, Vol. 18, No. 2, avg. 1990, str. 2–3.

[2] Pawlikowski, K., Jeong, H. D. J., Ruth Lee, J. S.: „On credibility of simulation studies of telecommunication networks", IEEE Communications Magazine, January 2002, pp. 132–139.

[3] Cooper, B. R.: „Introduction to Queueing Theory", Elsevier North Holland, New York, 1981.

[4] Goldsman, D., Marshall, W., Seong-Hee, K., Nelson, B.: „Ranking and selection for steady-state simulation", Proceedings, Winter Simulation Conference, Decembar 2000, str. 544–553.

[5] Nikolić, N.: „Korisnički aspekt prelaznog režima rada sistema masovnog opsluživanja", Vojnotehnički glasnik, br. 4/2007, str. 429–440, Beograd, ISSN 0042–8469.

[6] Robinson, S.: „Automated analysis of simulation output data", Proceedings, Winter Simulation Conference, Decembar 2005, str. 763–770.

[7] Nikolic, N., „Statistical integration of Erlang's equations", European Journal of Operational Research*, Vol. 187, Issue 3, 16 June 2008, pp. 1487–1493 (www.sciencedirect. com/science/journal/03772217).

[8] Nikolic, N., „Monte Carlo Modeling of Military Queueing Systems – Challenge of the Initial Transience", monografija, Zadužbina Andrejević и Institut za strategijska istraživanja, Beograd, 2008, (www.zandrejevic. org).

ACCURACY CONTROL IN MONTE CARLO SIMULATIONS

Summary:

The paper presents an application of the Automated Independent Replication with Gathering Statistics of the Stochastic Processes Method in achieving and controling the accuraccy of simulation results in

the Monte Carlo queueing simulations. The method is based on the application of the basic theoremes of the theory of probability and mathematical statistics. The accuracy of the simulation results is linked with a number of independent replications of simulation experiments.

Introduction

Simulation methods proved themselves as very effective in modeling of complex physiognomy of modern warfare. However, simulation methods have one malfunction and that is the problem of accuracy control of simulation results. The paper presents the application of the „Automated Independent Replication with Gathering Statistics of Stochastic Processes" method, in achieving and controlling accuracy of simulation results in the Monte Carlo queueing simulations.

Simulations and mathematical statistics

The method is based on the basic theorems of the theory of probability and mathematical statistics. The probability theory and mathematical statistics have their places not only at the end of a simulation study –for output data processing, but at the very beginning as well – during the model development and preparation to generate relevant data. A simulation is, practically, a statistical experiment.

Evaluation of the quality of an efficient method

An efficient simulation method has to be: accurate; simple and understandable; accessible in means of resources (cheap); and of course, it has to cover a full scope of complexity of the structure and working conditions of the system under study.

Link between accuracy and simulation replications

The essence of the method is in its name: „Automated Independent Replication with Gathering Statistics of Stochastic Processes". The method is based on the most important laws of the probability theory, which are grouped as the central limit theorems. The main goal is to functionally connect a level of simulation results accuracy with a number of simulation replications. There are literature papers which directly point out this problem with a question: „How much is enough?". A suggested answer just proceeds through considering the accuracy of system states probabilities as the primary measures of performance. In the context of Monte Carlo simulation modeling, a number of independent simulation replications presents, in fact, a sample size for interval estimation of the state probabilities.

Agreement of simulation and theoretical results

In order to illustrate this new method, a simple numerical example was considered. A type of the model is selected in such a way that exact (theoretical) results are available. The simulation results obtained through the new method are compared with theoretical results.

Good agreement of data sets has confirmed the validity of the proposed approach for accuracy control. In fact, by the use of simulation we got solutions with controlled accuracy for the model which is theoretically presented by the system of differential equations of first order. Furthermore, this system is processed neither by theoretical nor numerical methods, but by the third way: by a new variant of the general Monte Carlo simulation method. From here comes the name of this approach in solving a system of differential equations: Statistical or Monte Carlo integration.

Demonstration of accuracy control

The realization of three experiments with different numbers of independent replications demonstrates that the increase in replication numbers improves the accuracy of output results, while discrepancies are clearly measurable and predictable.

Time-dependent discrepancies of simulation results

The proposed method has capacity to support the dynamic behavior of the system. Dynamic discrepancies of simulation results are presented as time-dependent variables.

Conclusion

It can be concluded that a higher level of accuracy of simulation results calls for a large number of independent replications of simulation experiments. The method gives a quantitative relation among the accuracy of results, the estimation reliability, and the number of independent replications. A future research is possible for more complex models of queueing systems and for other working conditions as well as for other types of stochastic processes.

Key words: *simulation, Monte Carlo, accuracy control, queueing.*

Datum prijema članka: 30. 03. 2009.
Datum dostavljanja ispravki rukopisa: 18. 09. 2009.
Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje: 20. 09. 2009.