

REDUKCIJA GEODETSKIH MERENJA NA REFERENTNI ELIPSOID

Radojčić M. *Stevan*, Vojska Srbije,
Vojnogeografski institut, Beograd

OBLAST: geonauke

Sažetak:

Sve do sredine 20. veka, veličine koje su merene u geodeziji na fizičkoj površi Zemlje nisu sasvim korektno redukovane na računsku površ – površ rotacionog elipsoida, delom zato što je određivanje elemenata potrebnih za računanje popravki bilo gotovo nerešiv problem za geodeziju, a delom i zbog toga što greške koje su zbog toga nastajale nisu imale dominantni uticaj na tačnost merenja. Međutim, od sredine 20. veka preciznost geodetskih instrumenata i metoda postala je toliko velika da su greške redukcije kvarile ostvarenu tačnost. Istovremeno, razvoj geodezije omogućio je da se elementi neophodni za pravilnu redukciju danas određuju gotovo rutinski. Ipak, u Srbiji se ponekad i dalje primenjuje klasičan pristup, što se u savremenim uslovima ne može dopustiti. U radu se daje pregled formula koje se moraju koristiti kada se merenja sa fizičke površi Zemlje projektuju na elipsoid.

Key words: *elipsoid, terestrička geodetska merenja, redukcija.*

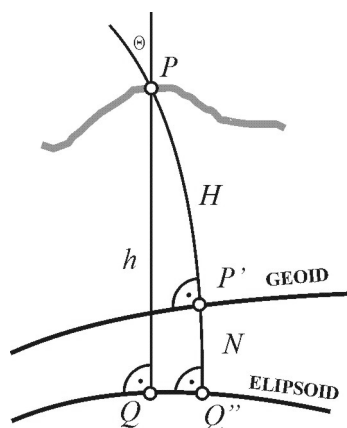
Uvod

Geodetska merenja vrše se na fizičkoj površi Zemlje, u trodimenzionalnom prostoru i u realnom polju sile teže. Stoga je prirodno da se funkcionalna veza između merenih veličina (uglova, dužina, pravaca, azimuta) i nepoznatih parametara (obično koordinata) uspostavi i formuliše pomoću trodimenzionalnog matematičkog modela, tim pre što on ne zahteva posebno složene matematičke operacije i računanja. Takav model u geodeziji razradio je još u 19. veku H. Bruns¹, ali je ostao neprimenljiv u praksi, jer zahteva merenje zenitnih rastojanja koja se, zbog fatalnog uticaja vertikalne refrakcije, ne mogu izmeriti dovoljno tačno [1]. Ovaj problem prevaziđen je razradom dva međusobno slabo uslovljena modela – *dvodimenzionalnog* (koji se odnosi na elipsoid ili ravan projekcije) i *jednodimenzionalnog* (koji se odnosi na srednji nivo mora, geoid ili kvazigeoid).

Međutim, kako se pokazalo, to ipak nije rešilo problem, već je samo odložilo potrebu njegovog rešavanja. Naime, dvodimenzionalni (elipsoidni) mo-

¹ Heinrich Bruns, 1848–1919.

del podrazumeva da se merenja na fizičkoj površi Zemlje projektuju najpre duž pravca sile Zemljine teže (tj. duž vertikale) na geoid (slika 1), a zatim duž normale na elipsoid (tzv. Picetijeva² projekcija) ili da se direktno projektuju na elipsoid pomoću geodetske visine (tzv. Helmertova projekcija³); razlika ove dve projekcije je veoma mala i za primer na slici 1 iznosi maksimalno 30 cm [2]. U prvom slučaju potrebno je poznavati undulaciju geoida N , a u drugom geodetsku (elipsoidnu) visinu h , a određivanje obe veličine je, za razliku od određivanja ortometrijskih visina H , za geodeziju predstavljao složen i do sredine 20. veka gotovo nerešiv zadatak. Da bi se to izbeglo, elipsoid je pozicioniran u telu Zemlje tako da se što bolje prilagodi obliku geoida na određenom području – obično državnoj teritoriji, tzv. *nacionalni (lokalni) geodetski datum*, pa je projektovanje merenih veličina vršeno samo na geoid, a dobijena vrednost, zbog pretpostavljene male razlike geoid–elipsoid (nekoliko metara), tretirana kao da je projektovana na elipsoid.



Slika 1 – Projekcije Helmerta i Picetija
Figure 1 – Projections of Helmert and Pizzetti

Većina geodetskih datuma, definisanih do sredine 20. veka, određena je metodom jedne (fundamentalne) tačke triangulacije – lociranoj obično u centralnom delu nacionalne teritorije – u kojoj je postavljen uslov da se elipsoid i geoid dodiruju. Sa udaljenjem od fundamentalne tačke razlika dve površi raste ne samo u funkciji rastojanja, već i u zavisnosti od gustine i rasporeda mase u unutrašnjosti Zemlje, odnosno anomalija polja sile Zemljine teže. Ta činjenica, zajedno sa greškama orijentacije elipsoida (odnosno greškama astronomskih merenja na fundamentalnoj tački), uzrokovala je, po pravilu, puno veće razlike geoid–elipsoid nego što se teorijski pretpostavljalo. To se moglo to-

² Paolo Pizzetti, 1860–1918.

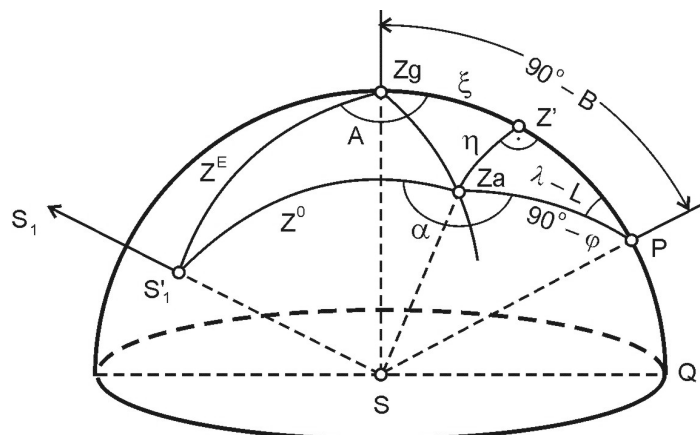
³ Friedrich Robert Helmert, 1843–1917.

lerisati sve dok preciznost geodetskih merenja nije uvećana do te mere da je zanemarivanje odnosa geoid-elipsoid kvarilo ostvarenu tačnost i postalo prepreka daljem usavršavanju geodetskih instrumenata i metoda. Istovremeno, sa razvojem satelitske geodezije afirmisali su se globalni datumi koji se, zbog potrebe prilagođavanja geoidu na planetarnom nivou, na lokalnom nivou mogu razlikovati od geoida i više desetina metara. Na primer, na prostoru Srbije geoid nadvišava opšti elipsoid (WGS84, GRS80) za oko 44 metra [3, 4].

Stoga se u savremenim uslovima veličine merene na fizičkoj površi Zemlje moraju pravilno redukovati na elipsoid kao računsku površ, po formulama koje se u radu daju u konačnom obliku (bez izvođenja, koje bi zahtevalo veći prostor).

Redukcija astronomskih azimuta

Pretpostavimo da su za neku tačku S na fizičkoj površi Zemlje (slika 2) poznate geodetske koordinate (B , L) i astronomske koordinate (φ , λ), kao i azimuti ka tački S_1 – geodetski azimut A i astronomski azimut α . Ako konstruišemo jediničnu sferu sa centrom u S , normala na elipsoid u toj tački seći će jediničnu sferu u tački Z_g (geodetski zenit), a vertikala na geoid u tački Z_a (astronomski zenit). Paralela sa osom rotacije Zemlje, povučena u S , prolazi kroz jediničnu sferu u tački P (projekcija pola Zemlje). Sada je luk $Z_g P Q$ projekcija geodetskog, a luk $Z_a P$ projekcija astronomskog meridijana. Oni se seku pod uglom koji je jednak razlici astronomske i geodetske longitude ($\lambda - L$). Veličine ξ i η predstavljaju tzv. *komponente skretanja vertikale*, odnosno projekcije ugla koji zaklapaju normala na elipsoid i normala na geoid (vertikala) u ravan meridijana (ξ) i u poprečnu ravan (η).



Slika 2 – Redukcija astronomskih azimuta
Figure 2 – Reduction of the astronomic azimuths

Ako sa S_1 označimo projekciju vizurne tačke S_1 na jediničnu sferu, možemo definisati elemente koji se mere: α – astronomski azimut i z^0 – prividni zenitni ugao, kao i njima saglasne elemente na elipsoidu: A – geodetski azimut i z^E – zenitni ugao redukovano na normalu na elipsoid.

Redukcija astronomskog azimuta, odnosno njegovo svođenje na geodetski azimut, vrši se, u prvom koraku, prema [5]:

$$A = \alpha - (\lambda - L) \sin \varphi + (\eta \cos A - \xi \sin A) \cot z^0 \quad (1)$$

Merenje azimuta obično se vrši između tačaka sa malom razlikom visina. Drugim rečima, $z^0 \rightarrow 90^\circ$, pa je $\cot z^0 \approx 0$, na osnovu čega se, sa zadovoljavajućim stepenom aproksimacije, može pisati:

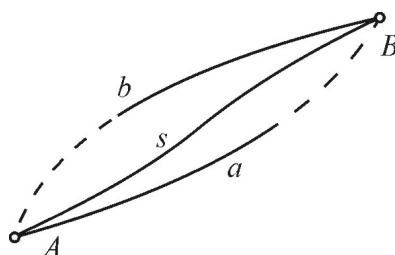
$$A \approx \alpha - (\lambda - L) \sin \varphi = \alpha - \eta \tan \varphi \quad (2)$$

Tada dobijamo tzv. *Laplasovu jednačinu*⁴ koja se obično koristi u triangulaciji viših redova i azimut koji se naziva Laplasov azimut.

U drugom koraku astronomski azimut treba redukovati kao i svaki drugi opažani pravac, popravkama koje se daju u narednom poglavlju.

Redukcija pravaca i horizontalnih uglova

Opažani pravac se na elipsoid redukuje pomoću tri popravke. Prva je tzv. *popravka za zamenu normalnih preseka geodetskom linijom*. Naime, pravac koji se sa tačke A opaža ka tački B (slika 3) nalazi se u *normalnoj ravni*, tj. ravni koja sadrži normalu u tački A i prolazi kroz tačku B . U opštem slučaju, presek te ravni sa elipsoidom (*normalan presek*, na slici 3 označen sa a) ne podudara se sa presekom elipsoida i ravni koja sadrži normalu u tački B i tačku A (b). Normalni preseki podudaraju se samo kada su obe tačke na istom meridijanu ili na istoj paraleli.



Slika 3 – Normalni preseki i geodetska linija
Figure 3 – Normal sections and the geodesic line

⁴ Pierre–Simone Laplace, 1749–1827.

Stoga se, u opštem slučaju, opažani pravac mora zameniti najkraćim rastojanjem između dve tačke na elipsoidu – geodetskom linijom (s), po formuli:

$$c_1 = -\rho'' \frac{S^2 e^2}{12a^2} \cos^2 B_m \sin 2A, \quad (3)$$

gde je:

$\rho'' = 206.264,8$ (vrednost radijana u seksagezimalnim sekundama),

S – dužina geodetske linije između A i B ,

B_m – srednja vrednost latituda tačaka A i B ,

a, e – elementi elipsoida, mala poluosa i prvi ekscentricitet i

A – azimut sa stanice na vizuru.

Popravka c_1 dobija se u sekundama kada je S u kilometrima.

Druga popravka opažanog pravca je tzv. *popravka za vizuru vizurne tačke*. Naime, u primerima na slici 3 stanica će se projektovati na površ elipsoida duž normale koja pripada normalnoj ravni. Pošto normala vizurne tačke, u opštem slučaju, ne pripada istoj ravni, vizurna tačka će se projektovati na elipsoid u tačku čija udaljenost od normalnog preseka zavisi od visine vizurne tačke od površi elipsoida. To se uzima u obzir popravkom c_2 :

$$c_2 = \rho'' \frac{he^2}{2a} \cos^2 B_m \sin 2A \quad (4)$$

Popravka c_2 dobija se u sekundama kada se a i e izraze u kilometrima.

Treća popravka koju treba dodati opažanom pravcu koji se redukuje na površ elipsoida je c_3 , tzv. *popravka za skretanje vertikala*. Računa se prema:

$$c_3 = (\eta \cos A - \xi \sin aA) \frac{\Delta h}{S} = (\eta \cos A - \xi \sin aA) \cot z^0 \quad (5)$$

Popravka c_3 dobija se u sekundama kada se visinska razlika stanice i vizurne tačke Δh i njihovo rastojanje S izraze u kilometrima, a komponente skretanja vertikale ξ i η u sekundama.

Prema tome, redukcija pravaca sa fizičke površi Zemlje na elipsoid vrši se tako što se opažani pravac popravi za vrednost $\delta = c_1 + c_2 + c_3$. Ova popravka se dodaje i Laplasovom azimutu.

Redukcija merenog horizontalnog ugla vrši se tako što se računaju razlike popravaka pravaca $\delta_2 - \delta_1$, gde je δ_2 – desni pravac, a δ_1 – levi pravac ugla.

Redukcija zenitnih uglova

Zbog uticaja atmosfere refrakcije, na fizičkoj površi Zemlje se, umesto zenitnih uglova z_1 i z_2 (slika 4), mere prividni zenitni uglovi z_1^0 i z_2^0 . Veza između merenih zenitnih uglova i zenitnih uglova koji su redukovani na elipsoid (z_1^E i z_2^E) data je relacijama:

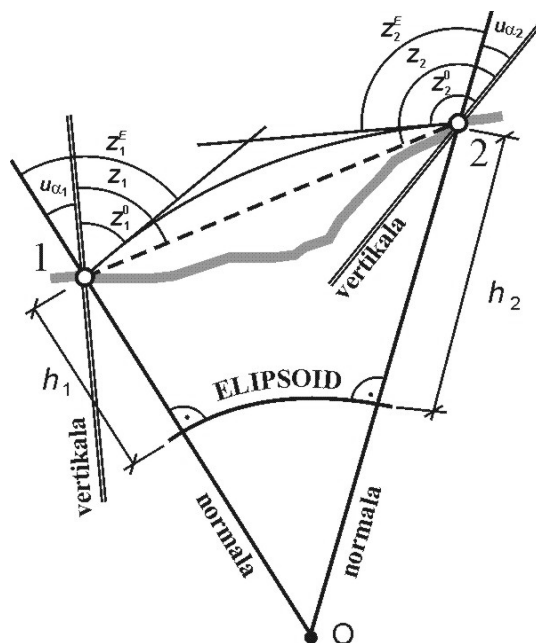
$$\begin{aligned} z_1^E &= z_1^0 + u_{\alpha 1} \\ z_2^E &= z_2^0 + u_{\alpha 2} \end{aligned} \quad (6)$$

gde su $u_{\alpha i}$ komponente skretanja vertikalne tačaka 1 i 2, u pravcu 1–2 pod azimutom α . Pošto je:

$$u_{\alpha} = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \quad (7)$$

sledi da je:

$$\begin{aligned} z_1^E &= z_1^0 + \xi_1 \cos \alpha + \eta_1 \sin \alpha \\ z_2^E &= z_2^0 - \xi_2 \cos \alpha - \eta_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (8)$$



Slika 4 – Redukcija zenitnih uglova
Figure 4 – Reduction of the zenithal angles

Redukcija dužina

Kada se direktno merena dužina između dve tačke na fizičkoj površi Zemlje popravi za uticaj atmosfere, dobija se najkraće (3D) rastojanje između razmatranih tačka, D^0 (slika 5). U prvom koraku treba ga svesti na tetivu D' , prema:

$$D' = \frac{(D^0)^2 - \Delta h^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{h_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{h_2}{R_A}\right)}}, \quad (9)$$

gde je:

Δh – razlika geodetskih (elipsoidnih) visina tačaka 1 i 2,

R_A – radijus Zemlje sračunat na osnovu Ojlerove⁵ formule koja za rotacioni elipsoid glasi:

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}, \quad (10)$$

pri čemu je radijus zakrivljenosti duž meridijana:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}, \quad (11)$$

a radijus zakrivljenosti duž prvog vertikala:

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 B_m)^{1/2}} \quad (12)$$

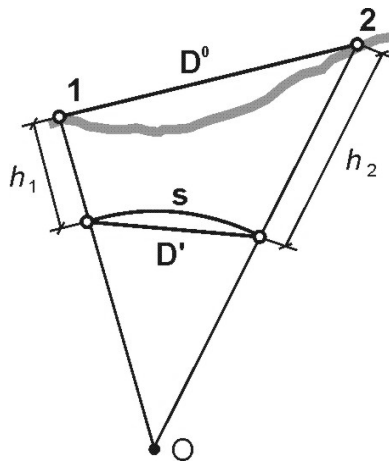
U drugom koraku sa tetive se prelazi na dužinu redukovanu na normalan presek, prema:

$$s = 2R_A \arcsin \frac{D'}{2R_A} \quad (13)$$

U trećem koraku vrši se redukcija dužine sa normalnog preseka (s) na geodetsku liniju (s_G), prema [6]:

$$s_G = s - \frac{e^4}{360a^4} s^5 \cos^4 B_m \sin^2 2A. \quad (14)$$

⁵ Leonhard Euler, 1707–1783.



Slika 5 – Redukcija dužine
Figure 5 – Reduction of the distance

Kod radova u klasičnim geodetskim mrežama, kada rastojanja između tačaka ne prelaze nekoliko desetina kilometara, ova korekcija se može zanemariti.

Zaključak

Kada se obrada i prezentovanje rezultata najpreciznijih geodetskih merenja vrši u dvodimenzionalnom prostoru, na površi usvojenog elipsoida, neophodno je izvršiti pravilno projektovanje merenja sa fizičke površi Zemlje na elipsoid. To znači da se merene veličine moraju projektovati ili direktno na elipsoid (Helmertova projekcija) ili najpre na geoid, a zatim na elipsoid (Picetijeva projekcija).

Iako su donedavno merene veličine projektovane na geoid tretirane kao da su ujedno projektovane na elipsoid – uz opravdanje da se kod lokalnih geodetskih datuma elipsoid bira i pozicionira tako da se najbolje prilagođava obliku geoida na jednom delu površi Zemlje (obično teritoriji države), pa su dve površi međusobno bliske – u savremenim uslovima to više nije opravdano. Naime, tačnost sa kojom geodezija danas meri veličine na fizičkoj površi Zemlje može se znatno narušiti ako se ne izvrši korektan prelaz sa geoida na elipsoid, čak i onda kada su dve površi stvarno bliske, a pogotovo ako taj uslov nije ispunjen, kao što je slučaj u Srbiji.

Literatura

[1] Vaniček, P.; Krakiwsky, E. J.: *Geodesy: The Concepts*, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1986.

[2] Heiskanen, W. A.; Moritz, H.: *Physical Geodesy*, W. H. Freeman and Company, San Francisco and London, 1967.

[3] Radojčić, S.: *Analiza referentnih horizontalnih mreža SRJ*, magistarski rad, Univerzitet u Beogradu : Građevinski fakultet – Odsek za geodeziju, Beograd, 2001.

[4] Borisov, M.: „Topografsko-kartografski sistem prema novim vojnim standardima”, *Vojnotehnički glasnik (Military Technical Courier)*, Vol. 53, No. 3-4, pp 315-325, ISSN 0042-8469, UDK 623+355/359, Beograd, 2005.

[5] Dragomir, V.; Ghitau, D.; Mihailescu, M.; Rotaru, M: *Theory of the Earth(s) Shape*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York, 1982.

[6] Torge, W.: *Geodesy*, Walter de Gruyter, Berlin and New York, 2001.

REDUCTION OF GEODETIC OBSERVATIONS TO THE REFERENCE ELLIPSOID

FIELD: Earth Sciences

Summary:

Field observations refer to the vertical of the geoid, because the geodetic instruments are put in the working position in respect to the vertical. It is not appropriate for the calculations on the ellipsoid surface, which request measured elements to be referred to the normal of the reference ellipsoid. This means that the field observations must be reduced from the vertical to the normal, i.e. they must be somehow reduced from the Earth's physical surface to the surface of the reference ellipsoid. There are two methods to do this: Pizzetti's method and Helmert's method. Pizzetti's method projects the measured elements with the aid of the vertical onto the geoid surface and then, with the aid of the normal to the ellipsoid, projects them further onto the surface of the reference ellipsoid. Helmert's (or Bruns- Helmert's) method projects the measured elements directly onto the surface of the reference ellipsoid with the aid of the normal to the ellipsoid.

But, until the middle of the 20th century, none of them were used. This means that the field observations were not properly reduced onto the ellipsoid's surface; they were reduced only to the geoid's surface and then used as if they were reduced to the ellipsoid.

The reasons for that are simple. On the one hand, it was almost impossible to determine the relation between the geoid and the ellipsoid at each desired point on the Earth's physical surface (first of all the geoid undulations N and the components of the deflection of the vertical ξ and η), so it was very difficult to calculate the reductions. On the other hand, the consequences of neglecting the reduction from the geoid to the ellipsoid were too small, compared with the accuracy of the observations in that time.

However, these excuses cannot be accepted nowadays, when there are all conditions to calculate appropriate corrections for reducing geodetic observations from the geoid to the ellipsoid. Furthermore, the proper reduction must be done if we want to preserve the modern geodetic accuracy of field measurements.

This paper presents the formulas for the reduction of all geodetic terrestrial measured elements from the Earth's physical surface to the surface of the reference ellipsoid. The formulas and short explanations are given within the next chapters:

*Reduction of the astronomical azimuths,
Reduction of the directions and horizontal angles,
Reduction of the zenithal angles, and
Reduction of the distances.*

Key words: ellipsoid, terrestrial geodetic measurements, reduction.

Datum prijema članka: 09. 08. 2010.

Datum dostavljanja ispravki rukopisa: 23. 08. 2010.

Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje: 24. 08. 2010.