

## STRUČNI ČLANCI PROFESSIONAL PAPERS

### STOHAŠTIČKI MODEL PROGNOZE POTRAŽNJE REZERVNIH DELOVA

Milojević S. *Ivan*, Guberinić V. *Rade*,  
Vojska Srbije, Garda, Beograd

OBLAST: matematika  
VRSTA ČLANKA: stručni članak

#### Sažetak:

*U ovom radu dat je stohastički model prognoze potražnje rezervnih delova. Model koji je dat izabran je po sledećim kriterijumima: da može biti primenjen, prema nameni prognoze potražnje rezervnih delova i da se ne nalazi u osnovnoj udžbeničkoj literaturi. Da bi se mogli izdvojiti, doraditi i razviti, novi modeli i metode prognoze potražnje rezervnih delova, nužno je sagledati sve ono što na neki način utiče na potražnju. Izdvojeni su uticajni faktori na potražnju rezervnih delova, ali ciljno, izdvojeni su oni faktori koji utiču na prognozu potražnje. Takođe su izdvojeni i drugi faktori, pre svega oni koji impulsno utiču na potražnju rezervnih delova. Dat je stohastički model koji je ovde u radu i eksperimentalno potvrđen. To je model koji može u sadašnjem vremenu biti primenjen.*

*Key words: potražnja rezervnih delova, model prognoze, vremenske serije, krive rasta, upravljanje potražnjom.*

#### Uvod

Potražnja predmeta snabdevanja (sredstava) predstavlja iskazivanje potreba potrošača u jedinici mere u željenom vremenu i predstavlja jedan od najznačajnijih parametara u problemima upravljanja zalihama. Zadovoljenje potražnje u sistemu snabdevanja osnovni je zadatak. Potražnja se u praksi iskazuje preko trebovanja ili zahteva. S obzirom na uslove u kojima se razmatra upravljanje zalihama, potražnja može biti:

- deterministička ili stohastička,
- stacionarna ili nestacionarna,

- kontinuirana ili diskretna,
- zadovoljena ili nezadovoljena.

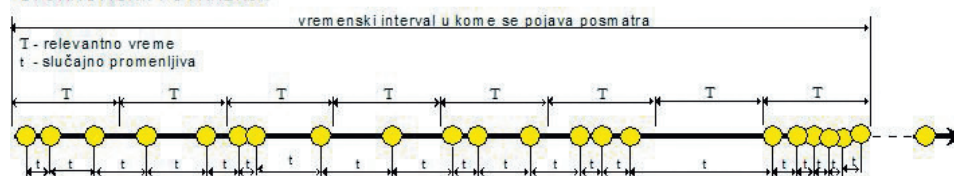
Ako je potražnja poznata za celokupno vreme planiranja (potpuna informacija), govori se o determinističkoj potražnji i o determinističkom sistemu snabdevanja. U najjednostavnijem slučaju je pri tome potražnja u jedinici vremena konstantna. Kad se nivo potražnje u toku vremena i menja, ali po tačno utvrđenom i unapred poznatom zakonu, tada se i ta potražnja razvrstava u ovu grupu.

Takvo svojstvo potražnja ima veoma retko. U većini slučajeva biće produkt nekog procesa, npr. održavanja TMS-a, čije se delovanje ne može unapred pretpostaviti zbog niza uticajnih faktora koji na taj proces deluju i zbog kojih dolazi do slučajnih promena u potražnji. Sistem snabdevanja u tom slučaju mora delovati uz potpunu informaciju, odnosno uz određeni stepen neizvesnosti. Ako se pri tome potražnja može definisati nekim od zakona iz teorije verovatnoće, tada govorimo o stohastičkoj potražnji i o stohastičkom sistemu snabdevanja.

Kojim će zakonom iz teorije verovatnoće biti najpovoljnije opisati potražnju, zavisi od ostalih elemenata sistema snabdevanja. Jednom će biti dovoljno da se zna sa kojom verovatnoćom i koje su količine sredstava potrebne u nekom vremenskom periodu. U drugom slučaju može biti potrebno da se potražnja opiše vremenskim intervalom između dva zahteva i potrebnim količinama po zahtevu, pri čemu vremenski interval, kao i potrebne količine mogu biti slučajne veličine i sl. Osnovni prikaz dat je na slikama 1 i 2.

Potražnju je moguće opisati matematičkim očekivanjem, matematičkim očekivanjem i standardnim odstupanjem, raspodelom verovatnoća ili kao slučajni proces. Mogućnosti su jedno, ali najčešće se javlja potreba za najkomplicovanijim opisom, odnosno složenim slučajnim procesom jer se u vremenu menja i intenzitet potražnje i raspodela verovatnoća po posmatranim vremenskim intervalima.

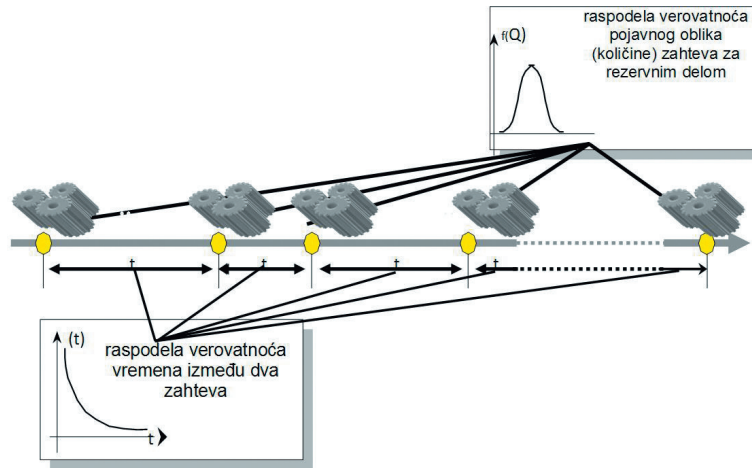
#### STOHAISTIČKA POTRAŽNJA



Slika 1 – Prikaz stohastičkog vremena između dva zahteva

Figure 1 – Stochastic time between two requests

Principijelno može isti zakon iz teorije verovatnoće delovati sve vreme rada sistema. Tada se govori o stacionarnom sistemu snabdevanja. Ako se taj zakon menja u vremenu, onda se govori o nestacionarnom sistemu snabdevanja.



Slika 2 – Prikaz stohastičke potražnje  
Figure 2 – Stochastic demand

## Stohastički model prognoze

### Osnovi analize vremenskih serija

Statistička promena mnogih pojava u vremenu opisuje se vremenskim serijama. Nivoi vremenskih serija:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \quad (1)$$

formiraju se pod uticajem skupa dugotrajnih i kratkotrajnih faktora kao i od niza slučajnih uticaja. Zbog promene ovih uticaja, pojavljuju se i varijacije nivoa vremenske serije kojom se prikazuju promene pojava u vremenu. Samo u veoma retkim slučajevima sreću se stacionarne serije, to jest serije kod kojih je dinamika izmene takva da se srednje karakteristike ne menjaju u vremenu.

Nivo vremenske (dinamičke) serije tradicionalno se razmatra kao složena pojava sastavljena od četiri komponente:

- osnovne tendencije razvoja pojave,
- cikličnih uticaja (dugotrajni, „vekovni“),
- sezonskih uticaja,
- slučajnih kolebanja.

Pod osnovnom tendencijom razvoja pojave pogodno je podrazumevati dugotrajnu evoluciju pojave. Funkcija koja u obliku jednačine izražava trajektoriju izmene te osnovne tendencije pojave naziva se trend. Često se pod trendom podrazumeva regresija u vremenu, to jest, često se

metodom najmanjih kvadrata određuju koeficijenti predložene funkcije. Za grubo određivanje koeficijenata predložene funkcije koriste se i metoda tri zbira i metoda tri tačke.

U nastavku će biti ukratko razrađene neke od metoda analize vremenskih serija, kao i savremena koncepcija ekstrapolacije i prognoze vremenske serije.

### Izravnavanje vremenske serije

U svakoj vremenskoj seriji prisutna su u manjoj ili većoj meri različita kolebanja. Ta kolebanja originalnih podataka (nivoa vremenske serije) mogu ponekad da otežaju uočavanje osnovne tendencije razvoja posmatrane pojave. Da bi se jasnije uočila osnovna tendencija razvoja, potrebno je u izvesnoj meri smanjiti ta kolebanja. Postupak smanjivanja tih kolebanja naziva se izravnavanje vremenske serije.

Postoji više metoda izravnavanja vremenske serije:

- pokretne sredine,
- adaptivne pokretne sredine,
- eksponencijalne srednje vrednosti dinamičke serije.

Metoda pokretnih sredina jedna je od najjednostavnijih metoda osrednjavanja nivoa vremenske serije.

Za svakih  $m$  uzastopnih nivoa vremenske serije

$$y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n \quad (2)$$

( $m < n$ ) izračunava se nivo (aritmetička sredina tih  $m$  nivoa), kojim se izravnava (jednostavno zamenjuje) originalni nivo koji se nalazi u sredini  $m$  izabranih nivoa. Pogodno je da  $m$  bude neparan broj.

Primer

Ako imamo vremensku seriju

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10} \quad (3)$$

onda se pokretnim sredinama formiranim od po tri nivoa ( $m = 3$ ) dobijaju osrednjene vrednosti vremenske serije. Prvi osrednjeni nivo vremenske serije je  $\bar{y}_2$ , koji odgovara nivou  $y_2$ .

Dakle, imamo

$$\bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \bar{y}_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}, \bar{y}_4 = \frac{y_3 + y_4 + y_5}{3}, \dots$$

$$\bar{y}_9 = \frac{y_8 + y_9 + y_{10}}{3}. \quad (4)$$

U poređenju sa originalnom vremenskom serijom  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ , osrednjena vremenska serija

$$\bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4, \dots, \bar{y}_9 \quad (5)$$

ima manja kolebanja i pokazuje bolju osnovnu tendenciju razvoja pojave. Jasno je da se prilikom ovog izravnavanja ne mogu odrediti odgovarajuće srednje vrednosti za početni i krajnji nivo.

Kada se osrednjavanje izvodi pomoću aritmetičkih sredina od pet nivoa ( $m=5$ ), onda se dva početna i dva poslednja nivoa ne mogu zameniti dobijenim aritmetičkim sredinama. Uopšte, ako  $m$  nivoa učestvuje pri izračunavanju pokretnih sredina i ako je  $m=2p+1$ , onda se po  $p$  početnih i  $p$  poslednjih nivoa ne mogu zameniti aritmetičkim sredinama, to jest oni se ne mogu osrednjiti. Nemogućnost da se izravnaju početni i krajnji nivoi kada se koriste pokretne sredine predstavlja nedostatak ove metode.

Ako dobijene aritmetičke sredine  $\bar{y}_t$  i dalje pokazuju znatnu varijaciju, proces osrednjavanja može da se ponovi, to jest, onda se mogu osrednjavati aritmetičke sredine. Nove aritmetičke sredine pokazuju manju varijaciju i bolje prikazuju osnovnu tendenciju promene posmatrane pojave.

Kod metode adaptivnih pokretnih sredina dobijena srednja vrednost ne zamenjuje centralni član intervala osrednjavanja, već zamenjuje poslednji član.

Metodom eksponencijalne srednje vrednosti dinamičke serije uzima se u obzir „starenje“ podataka, odnosno stariji podaci imaju manji uticaj.

Navedene metode date su u literaturi [2]. Pored navedenih metoda, u pomenutoj literaturi dat je postupak desezonizacije podataka, ako postoje sezonska kolebanja.

### *Provera hipoteze o postojanju tendencije*

Trend karakteriše osnovnu zakonitost promene određene pojave u vremenu, koja je u znatnoj meri oslobođena slučajnih uticaja. Pre utvrđivanja funkcionalne zavisnosti posmatrane pojave i vremena, neophodno je prethodno utvrditi da li uopšte postoji tendencija menjanja pojave u vremenu ili ne postoji. Potrebno je, znači, izvršiti proveru hipoteze o postojanju tendencije menjanja pojave u vremenu. Postoji više metoda provere hipoteze:

- provera razlike srednjih nivoa,
- metoda Foster-Stjuarta,

a u nastavku će bliže biti prikazana metoda Foster-Stjuarta.

Metoda Foster-Stjuarta, pored toga što je jednostavna, daje i veoma pouzdane rezultate. Ovi autori su svoju metodu zasnovali na veličinama  $u_t$  i  $l_t$  koje su definisane na sledeći način:

$u_t = 1$ , ako je  $y_t > y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1$ , odnosno

$u_t = 0$ , u ostalim slučajevima (6)

To znači da za neki nivo vremenske serije  $y_t$  veličina  $u_t$  uzima vrednost 1, ako je uočeni nivo  $y_t$  veći od svih prethodnih nivoa. Ako je nivo  $y_t$  manji makar od jednog od prethodnih nivoa, veličina  $u_t$  za taj nivo je jednaka nuli.

$l_t = 1$ , ako je  $y_t < y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1$ , odnosno

$l_t = 0$ , u ostalim slučajevima. (7)

Analogno prethodnom, vidimo da je veličina  $l_t$  za neki nivo  $y_t$  jednaka 1 jedino kada je nivo  $y_t$  manji od svih prethodnih nivoa.

Kada se za sve članove vremenske serije izračunaju veličine  $u_t$  i  $l_t$ , pristupa se izračunavanju veličina  $S_t$  i  $d_t$  koje su definisane na sledeći način:

$$S_t = u_t + l_t \quad (8)$$

$$d_t = u_t - l_t$$

Veličina  $S_t$  može uzimati vrednost 0 i vrednost 1. Ova veličina jednaka je nuli u slučaju kada su i  $u_t$  i  $l_t$  jednaki nuli, tj. u slučaju kada posmatrani nivo vremenske serije  $y_t$  nije ni najveći ni najmanji od svih prethodnih nivoa serije. Veličina  $S_t$  jednaka je 1 kada je nivo  $y_t$  najveći ili najmanji od svih prethodnih nivoa. Veličina  $d_t$  može uzimati vrednosti 1, 0 i -1, tj. imamo da je:

$$d_t = -1, \text{ za } y_t < y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1,$$

$$d_t = 1, \text{ za } y_t > y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \quad (9)$$

$$d_t = 0, \text{ u ostalim slučajevima.}$$

Po izračunavanju veličina  $S_t$  i  $d_t$  za sve nivoe vremenske serije, pristupa se njihovom sumiranju, tj. izračunavaju se zbrovi:

$$S = \sum S_t \text{ i } d = \sum d_t \quad (10)$$

U slučaju kada su svi članovi vremenske serije međusobno jednaki imamo da je  $S_t = 0$  za svako  $t$ , pa je i  $S = 0$ . Ukoliko članovi serije monotono rastu ili opadaju, tada je  $S_t = 1$  za svako  $t$ , sem za prvi član, pa je i  $S = n - 1$ , gde je  $n$  broj članova serije. Znači da je:

$$0 \leq S \leq n-1 \quad (11)$$

Sličnim razmišljanjem zaključujemo da je:

$$-(n-1) \leq d \leq n-1 \quad (12)$$

Vidimo da je kod monotono opadajućeg niza tj. kod niza kod kojeg je  $y_1 > y_2 > \dots > y_n$  ispunjeno:

$$d = -(n-1) \quad (13)$$

odnosno da je kod monotono rastućeg niza:

$$d = n-1 \quad (14)$$

Veličina  $d$  jednaka je nuli kada je:

$$\sum d_t = 0, \text{ odnosno } \sum u_t - \sum l_t = 0 \quad (15)$$

Poslednja razlika je jednaka nuli kada je  $\sum u_t = 0$  i  $\sum l_t = 0$ , što znači da nema trenda, ili kada je  $\sum u_t = \sum l_t$ , što je ispunjeno kada u vremenskoj seriji postoje dva trenda sa suprotnim tendencijama. Takođe je  $d = 0$  kada se rast i opadanje naizmenično smenjuju.

Veličine  $S$  i  $d$  imaju asimptomski normalne raspodele, međusobno nezavisne. Pokazatelj  $S$  nam služi da pokaže tendenciju izmene disperzije. Pokazatelj  $d$  služi za uočavanje tendencije u srednjem. Kada se izračunaju pokazatelji  $S$  i  $d$  vrši se testiranje hipoteza o slučajnosti razlika

$$d = 0 \text{ i } S = \mu \quad (16)$$

gde je  $\mu$  matematičko očekivanje veličine  $S$ . Ove hipoteze verifikuju se testom  $t$  Student-a, tj. upoređuju se veličine:

$$t = \frac{d - 0}{\sigma_2} \text{ i } t = \frac{S - \mu}{\sigma_1} \quad (17)$$

sa odgovarajućim tabličnim vrednostima. Veličina  $\sigma_1$  je srednja kvadratna greška veličine  $S$ , a  $\sigma_2$  je srednja kvadratna greška veličine  $d$ . Veličine  $\mu$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , koje zavise od broja članova  $n$  vremenske serije, prikazane su u tabeli 1.

Konačno, testiramo hipotezu  $H_0(d = 0)$ , odnosno hipotezu o odsustvu tendencije u srednjem:

ako je  $t = \frac{d - 0}{\sigma_2} > t_{\alpha}^n$ , odbacujemo hipotezu o odsustvu tendencije u srednjem.

Tabela 1 – Vrednosti parametara  $\mu$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  u zavisnosti od broja članova vremenske serije ( $n$ )

Table 1 – The values of parameters  $\mu$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  and depending on the number of members of time series ( $n$ )

N	$\mu$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
10	3,888	1,288	1,964
15	4,636	1,521	2,153
20	5,195	1,677	2,279
25	5,632	1,791	2,373
30	5,990	1,882	2,447
35	6,294	1,956	2,509
40	6,557	2,019	2,561
45	6,790	2,072	2,606
50	6,998	2,121	2,645
55	7,187	2,163	2,681
60	7,360	2,201	2,713
65	7,519	2,236	2,742
70	7,766	2,268	2,769
75	7,803	2,297	2,793
80	7,931	2,324	2,816
85	8,051	2,349	2,837
90	8,165	2,373	2,887
95	8,273	2,395	2,876
100	8,375	2,416	2,894

Zatim, testiramo hipotezu  $H_0(S = 0)$ , odnosno hipotezu o tendenciji izmene disperzije:

ako je  $t = \frac{S - \mu}{\sigma_1} < t_{\alpha}^n$ , prihvatamo hipotezu o tendenciji izmene disperzije.

### *Krive rasta*

Posle provere hipoteze o postojanju tendencije promene određene pojave u vremenu, sledeći korak u metodologiji prognoziranja predstavlja utvrđivanje određene krive rasta koja opisuje zakonitost razvoja pojave u vremenu. Krive rasta dobijaju se analitičkim prikazivanjem (izražavanjem) dinamičkih redova. Postoje dve osnovne etape u procesu izražavanja:

- izbor tipa krive čiji oblik odgovara karakteru promene dinamičkog reda,
- određivanje brojnih vrednosti (ocenjivanje) parametara krive.



Krivom rasta dobijaju se tzv. teorijske vrednosti nivoa dinamičkog reda, tj. nivoi koji bi se dobili ako bi se dinamika pojave potpuno poklapala sa krivom. Pitanje izbora tipa krive osnovno je pitanje pri izravnavanju dinamičkog reda. Kako od izbora određene krive rasta zavise brojne vrednosti parametara krive, odnosno u krajnjem slučaju celokupna prognoza date pojave, izboru tipa krive mora se posvetiti dužna pažnja, jer su greške pri izboru tipa krive najkrupnije greške u metodologiji prognoziranja.

Najjednostavnija metoda izbora tipa krive rasta je vizuelna metoda, ali je istovremeno u složenijim slučajevima i najnepouzdanija.

Zato se za izbor odgovarajuće krive rasta u opštem slučaju preporučuje metoda zasnovana na karakteristikama priraštaja. Ova metoda ima tri etape izbora krive rasta:

1. izravnavanje serije (reda) pokretnim sredinama,
2. određivanje srednjih priraštaja  $\bar{u}_t$ ,
3. određivanje niza izvedenih osobina priraštaja.

Po dobijanju srednjih priraštaja  $\bar{u}_t$  pristupa se izračunavanju sledećih veličina:

$$\bar{u}_t, \bar{u}_t^{(2)}, \frac{\bar{u}_t}{y_t}, \log \bar{u}_t, \log \frac{\bar{u}_t}{y_t}, \log \frac{\bar{u}_t}{y_t^2} \quad (18)$$

Zavisno od ponašanja pojedinih veličina, vrši se izbor krive rasta koja najviše odgovara datim podacima, a prema tabeli 2.

Tabela 2 – Preporuka za izbor krive rasta na osnovu karaktera izmene pokazatelja baziranih na srednjem priraštaju

Table 2 – Recommendation for the selection of growth curves based on the character-based indicators of changes in average growth rate

Pokazatelj	Karakter izmene pokazatelja u vremenu	Tip krive rasta	
$\bar{u}_t$	približno jednaki	prava	$y_t = a_0 + a_1 t$
$\bar{u}_t$	linearno se menjaju	parabola	$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
$\bar{u}_t^{(2)}$	linearno se menjaju	parabola	$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
$\frac{\bar{u}_t}{y_t}$	linearno se menjaju	eksponencijalna	$y_t = ab^t$
$\frac{\bar{u}_t}{y_t^2}$	linearno se menjaju	logaritamska parabola	$y_t = ab^t c^{t^2}$

$\log \bar{u}_t$	linearno se menjaju	modifikovana eksponencijalna	$y_t = k + ab^t$
$\log \frac{\bar{u}_t}{y_t}$	linearno se menjaju	kriva Gomperca	$y_t = ka^{b^t}$
$\log \frac{\bar{u}_t}{y_t^2}$	linearno se menjaju	logistička kriva	$y_t = \frac{k}{1 + be^{-at}}$

### Ekstrapolacija trenda

Najrasprostranjenija metoda prognoze je ekstrapolacija trenda. Suština ekstrapolacije trenda predstavlja produženje tendencije iz prošlosti u budućnosti. Jednostavnost postupka ekstrapolacije trenda, s jedne, i odsustvo drugih informacija, s druge strane, osnovni su razlozi izvođenja prognoze postupkom ekstrapolacije trenda.

Ekstrapolacija trenda zasniva se na sledećim pretpostavkama:

- razvoj pojave može sa dovoljno osnovu da se okarakteriše kao evolucionarna trajektorija, odnosno trend,
- opšti uslovi koji su uticali na razvoj trenda u prošlosti neće pretrpeti bitne izmene u budućnosti.

Određivanje prognostičkih vrednosti određene pojave pomoću ekstrapolacije trenda je u suštini formalni postupak. Važnije je odrediti interval poverenja prognoze. Ekstrapolacija trenda daje, uslovno rečeno, tačkastu vrednost prognoze. Verovatnoća da će posmatrana pojava u budućnosti uzeti jednu konkretnu vrednost je bliska nuli. Zato se često pribegava određivanju intervala vrednosti u kome će se sa određenom verovatnoćom nalaziti u budućnosti vrednosti posmatrane pojave.

Samo određivanje vrednosti je po funkciji koja opisuje tendenciju razvoja pojave, odnosno funkciji trenda.

Ekstrapolacija trenda često daje veoma dobre rezultate, ali postoje i primeri kada su učinjene velike greške u prognozi. U suštini, radi se poštovanju opštih pretpostavki za primenu metode ekstrapolacije trenda. Takođe, značajan je uticaj intervala preticanja. Što je veći interval preticanja, to je manja pouzdanost prognoze.

### *Analiza potražnje rezervnih delova za terensko motorno vozilo Pinzgauer po količinama*

Početni podaci neophodni za analizu prikupljeni su u jednom priručnom magacinu radionice iz sastava čete za TOd mašinskih sredstava. Kao uzorak za analizu odabrana su četiri rezervna dela za terensko motorno

vozilo marke „Pinzgauer“ sa njihovim trenutno raspoloživim količinama, a zatim su iz kartona skladišne evidencije prikupljeni podaci o njihovim neutrošenim količinama na kraju svake godine u periodu od 1988. do 2005. godine. Na taj način dobijena je tabela sa ukupnom količinom tih rezervnih delova na kraju svake godine u periodu od 1988. do 2005. godine.

Kako su podaci vezani za ravnomerno podeljen vremenski period, njih ćemo u nastavku pokušati sagledati kao vremensku seriju. Za početak ćemo podatke predstaviti grafički na slici 3.

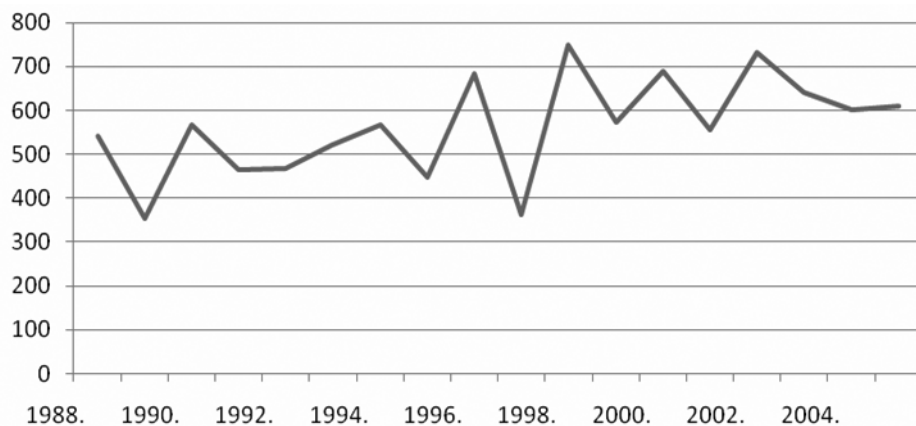
Iz grafičkog prikaza jasno je uočljivo da postoje značajna kolebanja originalnih podataka koja su posledica različitih uticaja u posmatranom periodu, posebno imajući u vidu veliku raznolikost ekonomskih uslova u kojima je funkcionisao sistem snabdevanja rezervnim delovima, kao i značajne razlike u intenzitetu eksploatacije tehničkih sredstava u posmatranom periodu.

Da bi se jasnije uočila osnovna tendencija razvoja posmatrane pojave, potrebno je u izvesnoj meri smanjiti postojeća kolebanja primenom nekog od preporučenih postupaka izravnavanja nivoa vremenske serije. Primenjujući metodu pokretnih sredina za  $m=3$ ,  $m=5$  i  $m=7$  uzastopnih nivoa dobijamo tabelu 4.

Tabela 3 – Količina neutrošenih r/d u periodu od 1988–2005. godine

Table 3 – Amount of unspent/ p in the period from 1988 to 2005

Godina	Količina r/d [ kom ]
	541
	354
	566
	466
	467
	521
	566
	448
	683
	363
	750
	572
	690
	555
	733
	641
	600
	609

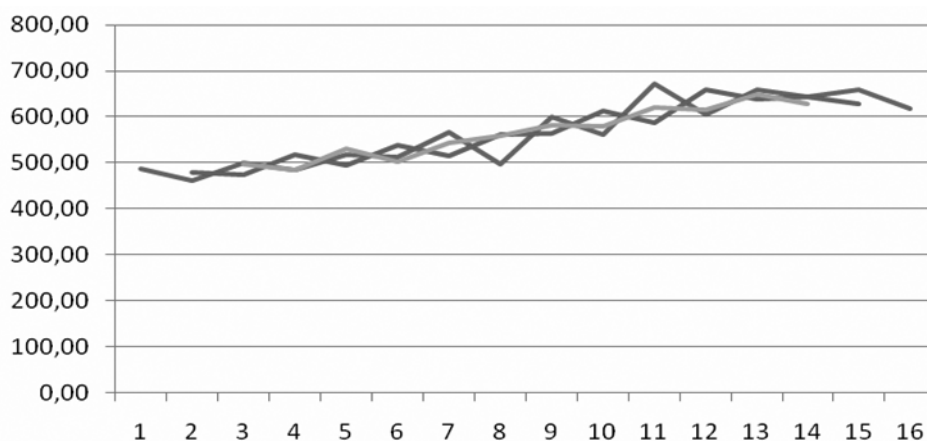


Slika 3 – Grafički prikaz ukupne količine r/d  
 Figure 3 – Graphic representation of the total amount of s / p

Tabela 4 – Osrednjene vrednosti nivoa vremenske serije dobijene metodom pokretnih sredina  
 Table 4 – Averaged values of time series levels obtained by the moving average method

Godina	Ukupna količina r/d [ kom ]	Pokretne sredine		
		m=3	m=5	m=7
1988.	541	-	-	-
1989.	354	487.00	-	-
1990.	566	462.00	478.80	-
1991.	466	499.67	474.80	497.29
1992.	467	484.67	517.20	484.00
1993.	521	518.00	493.60	531.00
1994.	566	511.67	537.00	502.00
1995.	448	565.67	516.20	542.57
1996.	683	498.00	562.00	557.57
1997.	363	598.67	563.20	581.71
1998.	750	561.67	611.60	580.14
1999.	572	670.67	586.00	620.86
2000.	690	605.67	660.00	614.86
2001.	555	659.33	638.20	648.71
2002.	733	643.00	643.80	628.57
2003.	641	658.00	627.60	-
2004.	600	616.67	-	-
2005.	609	-	-	-

Zatim dobijene podatke prikazujemo grafički:



Slika 4 – Grafički prikaz osrednjenih nivoa vremenske serije  
Figure 4 – Graphical representation of time series averaged levels

Posmatrajući grafički prikaz, uočavamo da se već za  $m=5$  uzastopnih nivoa dobijaju osrednjene vrednosti vremenske serije sa dovoljno umanjenim kolebanjima.

Na taj način dobili smo vremensku seriju kojom u nastavku analize zamenjujemo originalnu:

Tabela 5 – Osrednjene vrednosti nivoa vremenske serije za  $m = 5$   
Table 5 – Averaged level values of time series for  $m = 5$

Godina	Količina r/d [ kom ]
	478.80
	474.80
	517.20
	493.60
	537.00
	516.20
	562.00
	563.20
	611.60
	586.00
	660.00
	638.20
	643.80
	627.60

Naredni korak je provera hipoteze o postojanju tendencije menjanja pojave u vremenu.

Zbog jednostavnosti i pouzdanosti, odlučili smo se za metodu Fostera–Stjuarta.

U skladu sa pomenutom tačkom određujemo veličine  $u_t$  i  $l_t$ , a zatim izračunavamo veličine  $S_t$  i  $d_t$ . Na taj način formiramo tabelu 6.

Zatim pristupamo verifikaciji sledećih hipoteza testom  $t$  Student-a:

–  $H_0(d = 0)$ , tj. hipoteza o odsustvu tendencije u srednjem i

–  $H_0(S = 0)$ , tj. hipoteza o tendenciji izmene disperzije.

Tabela 6 – Vrednosti veličina  $u_t$ ,  $l_t$ ,  $S_t$  i  $d_t$  po metodi Fostera – Stjuarta

Table 6 – Values of size  $u_t$ ,  $l_t$ ,  $S_t$  and  $d_t$  by the Foster - Stuart method

Godina	Cena r/d [ din ]	$u_t$	$l_t$	$S_t$	$d_t$
1990.	478.80	0	0	0	0
1991.	474.80	0	1	1	-1
1992.	517.20	1	0	1	1
1993.	493.60	0	0	0	0
1994.	537.00	1	0	1	1
1995.	516.20	0	0	0	0
1996.	562.00	1	0	1	1
1997.	563.20	1	0	1	1
1998.	611.60	1	0	1	1
1999.	586.00	0	0	0	0
2000.	660.00	1	0	1	1
2001.	638.20	0	0	0	0
2002.	643.80	0	0	0	0
2003.	627.60	0	0	0	0
			$\Sigma$	$S=7$	$d=5$

Iz table 6. interpolacijom za  $n = 14$  određujemo parametre  $\mu$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , a zatim izračunavamo veličine:

$$t = \frac{d - 0}{\sigma_2} = \frac{5 - 0}{2,115} = \frac{5}{2,115} = 2.364 \quad (19)$$

i

$$t = \frac{S - \mu}{\sigma_1} = \frac{7 - 4,486}{1,474} = 1.7056 \quad (20)$$

da bismo ih usporedili sa tabličnom vrednošću statistike  $t$  Student-a koja iznosi

$$t_{\alpha}^n = t_{0,10}^{14} = 1,761 \quad (21)$$

Pošto je

$$t = \frac{d - 0}{\sigma_2} = \frac{5 - 0}{2,115} = \frac{5}{2,115} = 2.364 > t_{\alpha}^n = t_{0,10}^{14} = 1,761, \quad (22)$$

odbacujemo hipotezu o odsustvu tendencije.

A kako je

$$t = \frac{S - \mu}{\sigma_1} = \frac{7 - 4,486}{1,474} = 1,7056 < t_{\alpha}^n = t_{0,10}^{14} = 1,761, \quad (23)$$

prihvatamo hipotezu o tendenciji izmene disperzije.

Posmatrajući izgled krive osrednjenih nivoa za  $m=5$  možemo pretpostaviti da se promena nivoa vremenske serije ponaša u skladu sa polinomom ili prvog ili drugog stepena. Za osnovnu tendenciju, dakle, pretpostavljamo linearne funkcije i parabole. Proračun odgovarajućih zbrova dat je u tabeli 7.

Tabela 7 - Potrebni brojni pokazatelji za određivanje jednačine prave

Table 7 - Required parameters for determining the numerical equation

Godina	T	Količina r/d [kom]- $y_t$	$ty_t$	$\hat{y}_t$	$t^2$
1988.	1	541	541	462.91	1
1989.	2	354	708	474.62	4
1990.	3	566	1698	486.33	9
1991.	4	466	1864	498.04	16
1992.	5	467	2335	509.75	25
1993.	6	521	3126	521.46	36
1994.	7	566	3962	533.17	49
1995.	8	448	3584	544.88	64
1996.	9	683	6147	556.59	81
1997.	10	363	3630	568.3	100
1998.	11	750	8250	580.01	121
1999.	12	572	6864	591.72	144
2000.	13	690	8970	603.43	169
2001.	14	555	7770	615.14	196
2002.	15	733	10995	626.85	225
2003.	16	641	10256	638.56	256
2004.	17	600	10200	650.27	289
2005.	18	609	10962	661.98	324
	$\sum t = 171$	$\sum y_t = 10125$	$\sum ty_t = 101862$	$\sum \hat{y}_t = 10124$	$\sum t^2 = 2109$

Primenjujući metodu najmanjih kvadrata, ocenjujemo parametre polinoma:

$$a = 451.2 \quad (24)$$

$$b = 11.71$$

Sada je prava dobila oblik:

$$y = 451.2 + 11.71t \quad (25)$$

Dakle, dobili smo jednačinu prave (trenda) sa ocenjenim parametrima. Na taj način vidimo da postoji tendencija povećanja količina r/d za oko 12 komada godišnje.

Na isti način izračunavamo i parametre parabole gde dobijamo respektivno sledeće vrednosti:

$$a = 496,16$$

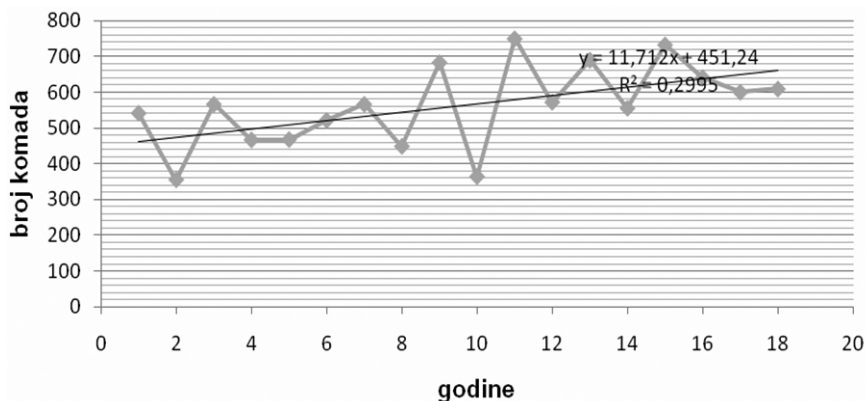
$$b = 48,29 \quad (26)$$

$$c = 0,57$$

Dakle:

$$\hat{y}_t = 496,16 + 48,49t + 0,59t^2 \quad (27)$$

Uvođenje kvadratnog člana pokazalo se praktično nepotrebnim, jer se tačnost opisa time ne uvećava (koeficijent kvadratnog člana je mnogo manji u odnosu na koeficijent linearnog člana).



Slika 5 – Uporedni grafički prikaz posmatrane vremenske serije i aproksimirajuće prave  
Figure 5 – Comparative graphical representation of the monitored time series and the approximating straight line

Iz grafičkog prikaza vidi se da odabrana prava sa ocenjenim parametrima ne odstupa u velikoj meri od posmatrane vremenske serije u periodu od 1988. do 2005. godine (sa izuzetkom 1998. i 1999), što nas navedi na zaključak da je pravilno izabrana kao polinom prvog stepena i da opisuje zakonitost razvoja pojave u vremenu.



## Zaključak

Prognoza potražnje rezervnih delova stalno se vrši u svim skladištima, radionicama i na svim nivoima. Bez prognoze potražnje nije moguće vršiti bilo kakvo planiranje ni odlučivanje. Prognoza potražnje predstavlja ulazni podatak za određivanje nivoa zaliha, veličine narudžbe, ciklusa naručivanja itd. Postavlja se samo pitanje kolika je pouzdanost i preciznost prognoze i kakvi su efekti. Prognoziranje „po osećaju“ ne treba odbaciti, ako ne postoji ništa bolje, ali se u tom slučaju mora prihvatiti da postoji mnogo promašaja koji izazivaju bespotrebno nagomilavanje nekih rezervnih delova, a istovremeno i hroničnu nestašicu drugih rezervnih delova. Sve to značajno povećava troškove, a ne omogućava zadovoljavajuću snabdevenost rezervnim delovima.

Osnovni problem primene prikazanog modela jeste da svaki rezervni deo ima svoj intenzitet otkaza, odnosno da je za svaki deo potrebno provesti kompletni postupak. Ako je broj sastavnih delova prosečno složenog sredstva kao što je već navedeno oko 5000, a uz postojanje velikog broja sredstava, provođenje postupka prognoze ekstrapolacijom trenda praktično bi zahtevalo najsavremenije informatičke tehnologije. Međutim, analizom se pokazuje da u većini slučajeva 80–90% sastavnih delova sredstva ima duži vek trajanja od samog sredstva, odnosno da u toku životnog veka sredstva ovi sastavni delovi uopšte ne otkazuju, a da 10-15% sastavnih delova ima samo retke slučajne otkaze, (postoptimalna analiza Normativa rezervnih delova), odnosno da ne pokazuju bilo kakve znake tendencije, odnosno otkazi su slučajni.

Ostaje da se ovaj postupak primeni na 2–4% sastavnih delova po sredstvu, što već ne predstavlja neki poseban problem uz automatizaciju postupka. Odrediti koji su to rezervni delovi na koje treba primeniti postupak ekstrapolacije trenda moguće je pomoću ovog modela. Provođenjem postupka po drugom modelu za postojeće podatke dobija se prognoza. Za one rezervne delove za koje je prognoza u dužem vremenskom periodu bliska nuli nema potrebe vršiti prognozu ekstrapolacijom trenda, odnosno nema potrebe vršiti prognozu uopšte.

Ponudeni model je primenljiv, a čak je i eksperimentalno primenjen i dobijeni su veoma dobri rezultati. Ne postoje ozbiljniji razlozi da prikazani model ne budu primenjen. Pored prikazanog, postoje i drugi modeli i metode za prognozu potražnje rezervnih delova. Valjanost pojedinih modela uvek može da se oceni. Sigurno je da su neki modeli bolji od drugih u primeni u konkretnim slučajevima, ali je sigurno da je primena bilo kojih verifikovanih metoda i modela bolja od prepuštanja sistema stihijskom funkcionisanju.

### Literatura

[1] Pantelić V., *Snabdevanje tehničkim materijalnim sredstvima*, CVTŠ KoV JNA, Zagreb, 1986.

[2] Vukadinović S., *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike*, Privredni Pregled, Beograd, 1981.

[3] Vukadinović S., Popović J., Teodorović D., *Zbirka rešenih zadataka iz matematičke statistike*, Saobraćajni fakultet, Beograd, 1981.

[4] Borović S., Mišković V., *Model prognoze potražnje rezervnih delova*, Zbornik radova SM-OP-IS'2001, S ŠONID VJ, Beograd, 2001, str. 39–43.

[5] Mišković V., Borović S., *Statistički modeli prognoziranja potražnje rezervnih delova*, Vojnotehnički glasnik/Military Technical Courier, Vol. 50, No. 1, pp. 5–13, Ministarstvo odbrane Republike Srbije, Beograd, 2002.

## STOCHASTIC MODEL OF FORECASTING SPARE PARTS DEMAND

FIELD: Mathematics

ARTICLE TYPE: Professional Paper

### Summary

*If demand is known for the whole planning period (complete information), then this type of demand or a supply system is deterministic. In the simplest cases, the demand per time unit is constant. If demand levels change over time following a precisely determined and pre-known principle, this type of demand is also classified as deterministic.*

*This quality of demand is very rare. In most cases demand is the product of a process, for example TMS maintenance, whose progression cannot be predicted due to a number of factors influencing the process and causing random demand changes. In this case, a supply system must function according to the complete information and with a certain degree of uncertainty. In cases when demand may be defined by some of the laws of the probability theory, we are talking about stochastic demand and a stochastic supply system.*

*Demand can be described by mathematical expectation, mathematical expectation and standard deviation, probability distribution or as a random process. However, there is usually a need for the most complex description, i.e. the complex random process because both intensity of demand and the probability distribution change during the observed intervals.*

*The level of temporal (dynamic) series is traditionally considered as a complex phenomenon consisting of four components:*

- basic tendency of phenomenon development*
- cyclical impact (long-term, "ancient")*
- seasonal effects*
- random fluctuations.*

*The basic tendency of phenomenon development means a long-term evolution of phenomena. A function that expresses the trajectory of changes of the basic tendency of a phenomenon development in the form of the equation is called a trend. Often, the trend involves time regression; i.e. the coefficients of the proposed functions are often determined by the least squares method. To roughly determine the coefficients of the proposed function, the sum of three and three-point methods are also used.*

*After checking the hypothesis of the existence of phenomenon change trends, the next step in the methodology of forecasting is the determination of a specific growth curve that describes the regularity of the development in time. These curves of growth are obtained by the analytical representation (expression) of dynamic lines. There are two basic stages in the process of expression and they are:*

- The choice of the type of curve the shape of which corresponds to the character of the dynamic order variation
- the determination of the number of values (evaluation) of the curve parameters.

The most widespread method of forecasting is the trend extrapolation. The basis of the trend extrapolation is the continuing of past trends in the future. The simplicity of the trend extrapolation process, on the one hand, and the absence of other information on the other hand, are the main reasons why the trend extrapolation is used for forecasting.

The trend extrapolation is founded on the following assumptions:

- The phenomenon development can be presented as an evolutionary trajectory or trend,
- General conditions that influenced the trend development in the past will not undergo substantial changes in the future.

Spare parts demand forecasting is constantly being done in all warehouses, workshops, and at all levels. Without demand forecasting, neither planning nor decision making can be done. Demand forecasting is the input for determining the level of reserve, size of the order, ordering cycles, etc. The question that arises is the one of the reliability and accuracy of a forecast and its effects. Forecasting "by feeling" is not to be dismissed if there is nothing better, but in this case, one must be prepared for forecasting failures that cause unnecessary accumulation of certain spare parts, and also a chronic shortage of other spare parts. All this significantly increases costs and does not provide a satisfactory supply of spare parts.

The main problem of the application of this model is that each spare part has its own failure intensity; therefore, it is necessary to conduct a complete procedure for each part. If the average number of components of a complex asset were about 5000, along with the existence of a large number of resources, the forecasting by the trend extrapolating would practically require the newest information technologies. However, the analysis shows that in most cases 80-90% of component parts have a longer life than the asset itself. In addition, it is shown that during the life of the asset, these components do not fail, and that 10-15% of component parts have only rare failures (post optimal analysis of spare parts normative) or do not show any failing tendency meaning that failures are random.

This procedure remains to be applied to 2-4% of component parts. It does not present a significant problem due to the process automation. This model enables us to determine the parts to which the trend extrapolation procedure should be applied. Forecast is obtained by the use of the second model to existing data. The trend extrapolation forecast or any other kind of forecast does not need to be done for those spare parts for which the long time forecast is close to zero.

Provision of spare parts for the maintenance system considering the range, quantity, time and place is crucial for successful functioning of the maintenance system and ultimately for the accuracy of material resources. On the other hand, stocks of spare parts are costly and required to be reduced. Costs need to be minimized while ensuring the successful functioning of the maintenance system.

Keywords: demand of spare parts, model forecasts, time series, curve of growth, demand management

Datum prijema članka: 22. 12. 2009.

Datum dostavljanja ispravki rukopisa: 11. 10. 2011.

Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje: 12. 10. 2011.