ODREĐIVANJE TEŽINA KRITERIJUMA PRIMENOM RANGIRANJA

Milić R. Milićević, *Marjan* A. Milenkov
Univerzitet odbrane u Beogradu, Vojna akademija,
Centar za istraživanja u oblasti logistike odbrane, Beograd

DOI: 10.5937/vojtehg62-3878
OBLAST: računarstvo i informatika:
teorija odlučivanja i kvantitativne metode
VRSTA ČLANKA: pregledni članak

Summary:

U radu su prikazani mogući načini određivanja težina kriterijuma na osnovu ranga kriterijuma. Prikazane su metode: linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera, inverznih težina, centroida rangova, sume rangova, raspodele verovatnoća rangova i geometrijskih težina. Kada u procesu rangiranja učestvuje više eksperata prikazana je mogućnost objedinjavanja rangova (težina) kriterijuma primenom izabranih matematičkih metoda, metoda teorije društvenog izbora i medijane Kemenija. Na jednom numeričkom primeru prikazana je primena izabranih metoda uz komentar dobijenih rezultata.

Osnovni cilj rada jeste prikaz mogućih načina određivanja težina kriterijuma na osnovu ranga kriterijuma koji su odredili jedan ili više eksperata, korišćenjem više literaturnih izvora informacija.

Ključne reči: *težine, rangiranje, medijana, kriterijum.*

Uvod

U višekriterijumskoj optimizaciji često se javlja problem određivanja težina kriterijuma po kojima se vrši optimizacija. Pristupi rešavanju problema određivanja težina kriterijuma uobičajeno se dele na objektivne i subjektivne. Jedan od subjektivnih često korišćenih pristupa određivanja težina kriterijuma jeste pristup zasnovan na rangiranju kriterijuma. Rangiranje kriterijuma, a zatim pretvaranje rangova u težine kriterijuma ime određene prednosti. Osnovna prednost ovog načina određivanja težina kriterijuma jeste da je donosiocu odluke veoma često mnogo

e-mail: milic.milicevic@mod.gov.rs

lakše da, umesto dodeljivanja numeričkih vrednosti težinama kriterijuma, izvrši njihovo rangiranje.

Pri određivanju pojedinačnih težina kriterijuma pretpostavlja se postojanje univerzalne međuzavisnosti između ranga kriterijuma i prosečne težine kriterijuma. Pored toga, podrazumeva se da se ta međuzavisnost može iskoristiti za kombinovanje pojedinačnih rangova u skup objedinjenih (agregiranih, grupnih) težina kriterijuma kada je rangiranje kriterijuma izvršilo više eksperata.

U (Roberts, Goodwin, 2002, pp.291-303) dat je pregled studija u kojima se razmatraju prednosti i nedostaci pojedinih metoda određivanja težina kriterijuma. Skoro svi autori (čija je literatura korišćena) slažu se da su vrednosti težina kriterijuma znatno uslovljene metodama njihovog određivanja. Takođe, ne postoji saglasnost o najboljoj metodi određivanja težina kriterijuma, a time i o načinu direktnog određivanja „pravog" skupa težina. Autori su, sa druge strane, saglasni da su težine proračunate određenim metodama preciznije od težina dobijenih metodama direktnog dodeljivanja težina na osnovu ekspertovog shvatanja značaja kriterijuma.

Pri proračunu težina kriterijuma na osnovu ranga kriterijuma potrebno je ustanoviti tip funkcije rang-težine. Izabrane funkcije rang-težine, kao i rezultati njihovih primena, biće ukratko prikazani u nastavku rada.

U procesu određivanja težina kriterijuma može učestvovati više eksperata. Tada je potrebno izvršiti objedinjavanje individualnih rangova (ili težina) kriterijuma i formirati jedinstvene grupne težine kriterijuma primenom određenih metoda objedinjavanja rangova (težina) kriterijuma. U radu će biti prikazane izabrane metode objedinjavanja individualnih težina kriterijuma, kao i mogućnost primene metoda putem razrade jednog primera uz kratak komentar rezultata.

Prikaz izabranih metoda za određivanje težina kriterijuma primenom rangiranja

U (Milićević, Župac, 2012, pp.48-70) prikazane su sledeće metode određivanja težina kriterijuma na osnovu njihovog ranga: metoda linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera, metoda inverznih težina, metoda centroida rangova, metoda sume rangova, raspodela verovatnoća rangova i metoda geometrijskih težina. Navedene metode biće ukratko prikazane i u ovom radu radi formiranja potpune predstave o mogućnostima određivanja težina kriterijuma na osnovu ranga kriterijuma.[1]

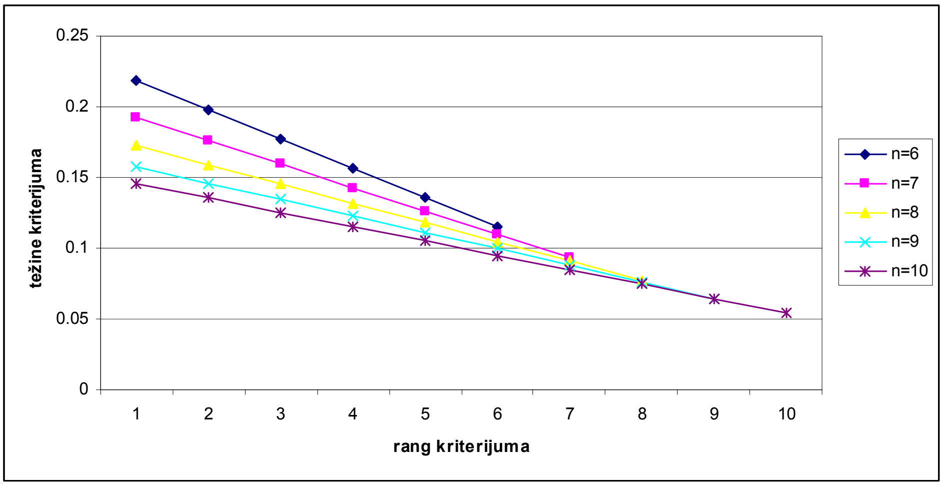
[1] Grafički prikazi odnosa težine i ranga kriterijuma za navedene metode, osim metode geometrijskih težina, urađeni su na osnovu tabelarnih vrednosti težina za n=6 do n=10 kriterijuma prikazanih u literaturi: Roberts, R., Goodwin, P., 2002, Weight approximations in multi-attribute decision models, *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 11, pp.291-303.

Metoda linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera (MLT) jeste empirijski razvijena linearna funkcija rang-težina, čiji nagib zavisi od broja kriterijuma (Alfares, Duffuaa, 2009, pp. 125-133):

$$w_r = 100 - s_n(r-1) \tag{1}$$

gde je: w_r – težina, r – rang, s_n – apsolutna vrednost koeficijenta smera dobijena pomoću metode najmanjih kvadrata, pri čemu je broj kriterijuma jednak *n*. Alfares i Duffuaa su empirijski odredili vrednost: s_n=3.19514+37.75756/*n*.

Vrednosti težina kriterijuma dobijene ovom metodom nalaze se u intervalu od 0 do 100. Aditivnom normalizacijom te vrednosti se svode na interval 0–1. Na slici 1 prikazane su vrednosti težina za n={6,7,8,9,10} kriterijuma. Jasno se uočava linearna zavisnost težina i ranga kriterijuma.



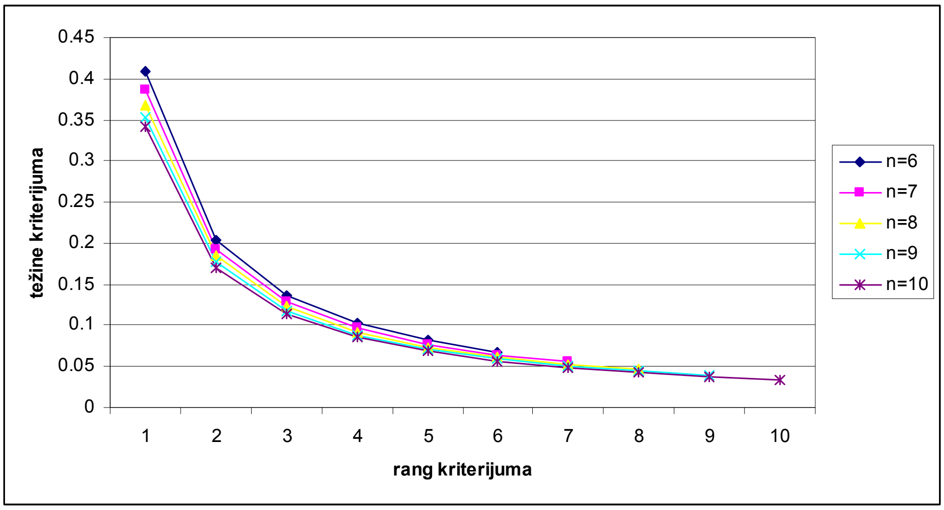
Slika 1 – Graf vrednosti težina za n={6,7,8,9,10} kriterijuma dobijenih MLT
Figure 1 – Graph of the weight values for n={6,7,8,9,10} of the criteria obtained by the LWT

Metoda inverznih težina (MIT) predložena je u (Stillwell, et al., 1981, pp. 62-77):

$$w_r = \frac{\frac{1}{r}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}} \tag{2}$$

gde je: r - rang, j=1,2,...,n kriterijumi.

Graf navedene funkcije prikazan je na slici 2.

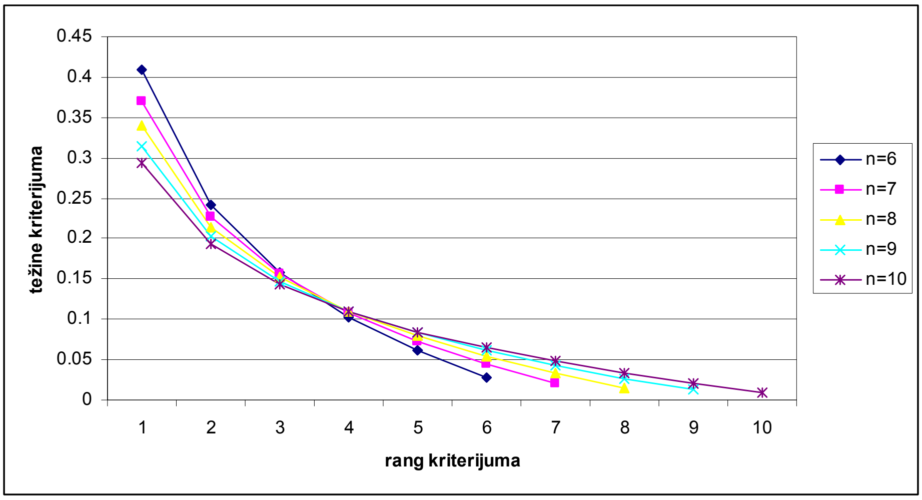


Slika 2 – Graf vrednosti težina za n={6,7,8,9,10} kriterijuma dobijenih MIT
Figure 2 – Graph of the weight values for n={6,7,8,9,10} of the criteria obtained by the RRW

Metoda centroida rangova (MCR) (Solymosi, Dompi, 1985, pp.35-41):

$$w_r = \frac{1}{n}\sum_{j=r}^{n}\frac{1}{j} \tag{3}$$

Grafički prikaz odnosa rangova i težina kriterijuma dobijenih metodom centroida rangova prikazan je na slici 3.

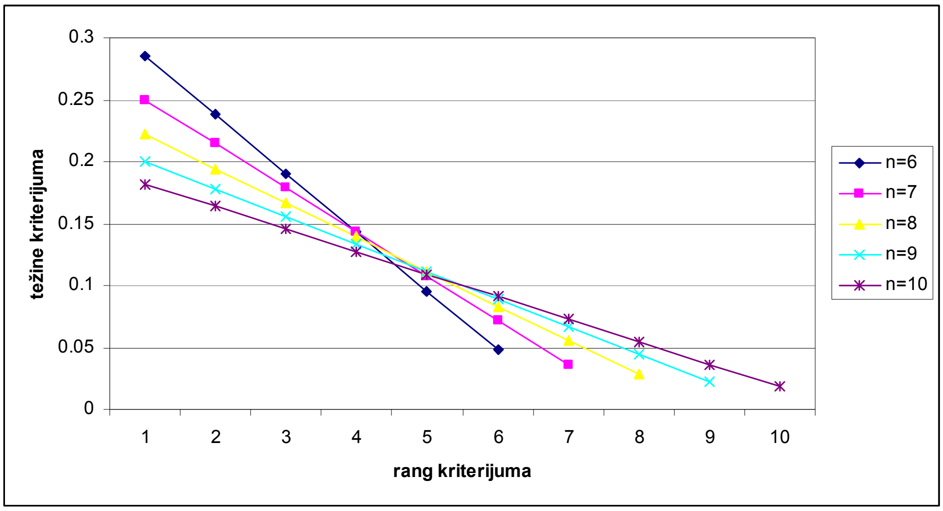


Slika 3 – Graf vrednosti težina za n={6,7,8,9,10} kriterijuma dobijenih MCR
Figure 3 – Graph of the weight values for n={6,7,8,9,10} of the criteria obtained by the ROC

Metoda sume rangova (MSR) jeste linearna funkcija predložena u (Stillwell, et al., 1981, pp. 62-77):

$$w_r = \frac{2(n+1-r)}{n(n+1)} \tag{4}$$

Grafički prikaz odnosa rangova i težina kriterijuma dobijenih metodom sume rangova vidi se na slici 4.



Slika 4 – Graf vrednosti težina za n={6,7,8,9,10} kriterijuma dobijenih MSR
Figure 4 – Graph of the weight values for n={6,7,8,9,10} of the criteria obtained by the RSW

Raspodela verovatnoća rangova (RVR) - polazeći od pretpostavke da rangovi kriterijuma podležu ravnomernoj raspodeli verovatnoća za broj kriterijuma *n*=2 do *n*=10, Roberts i Goodwin (2002) razvili su gustine raspodele verovatnoća normalizovanih težina i, na osnovu njih, izvršili proračun vrednosti težina kriterijuma. Kao primer navode se gustine raspodele verovatnoća normalizovanih težina za broj kriterijuma n=3:

– rang 1:

$$f_{w_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & 1/2 \le x \le 1 \\ 0 & 0 \le x < 1/2 \end{cases} \tag{5}$$

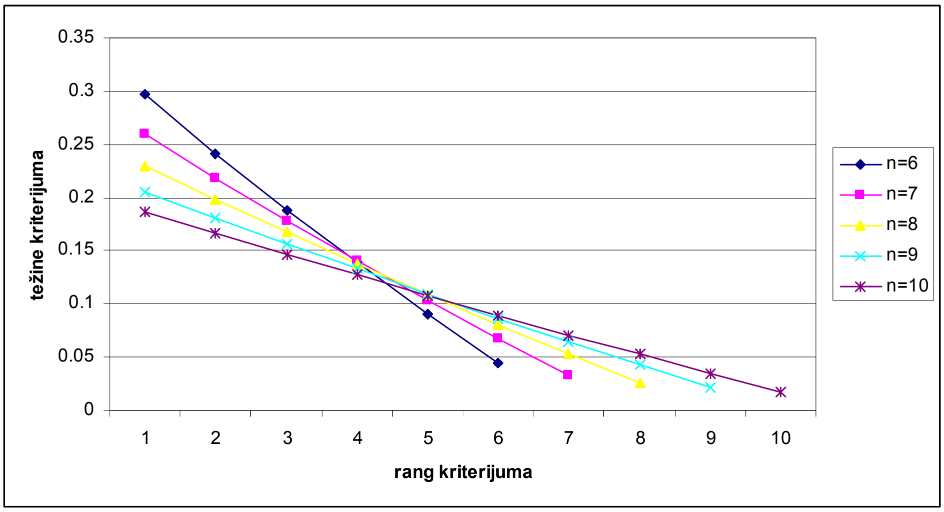
– rang 2:

$$f_{w_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2}, & 0 \le x \le 1/2 \\ 0 & 1/2 < x \le 1 \end{cases} \tag{6}$$

– rang 3:

$$f_{w_3}(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(2x-1)^2}, & 0 \le x \le 1/3 \\ 0 & 1/3 < x \le 1 \end{cases} \tag{7}$$

Graf vrednosti težina kriterijuma dobijenih na osnovu raspodele verovatnoće rangova prikazan je na slici 5.

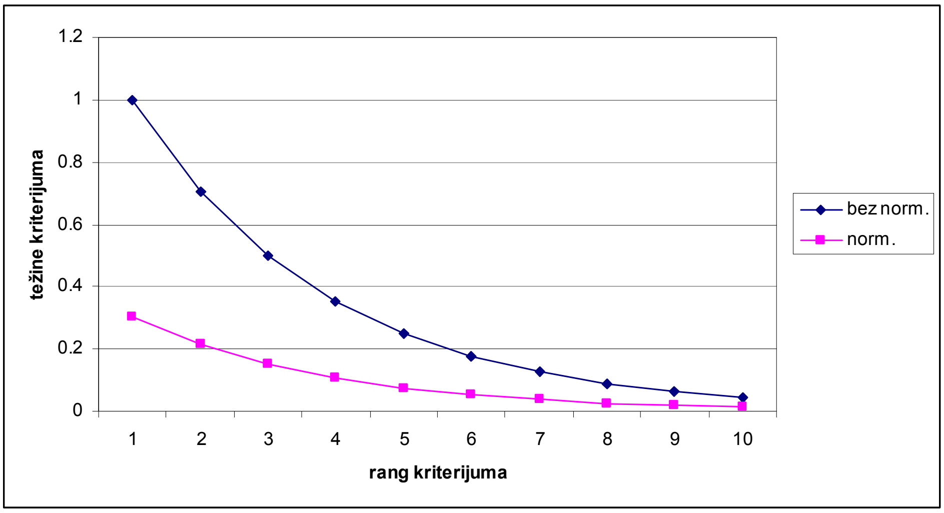


Slika 5 – Graf vrednosti težina za n={6,7,8,9,10} kriterijuma dobijenih RVR
Figure 5 – Graph of the weight values for n={6,7,8,9,10} of the criteria obtained by the ROD

Metoda geometrijskih težina (MGT) predložena je u (Lootsma, Bots, 1999):

$$w_r = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{r-1}} \tag{8}$$

Graf vrednosti težina kriterijuma dobijenih metodom inverznih težina prikazan je na slici 6.



Slika 6 – Graf vrednosti težina kriterijuma dobijenih MGT
Figure 6 – Graph of the weight values of the criteria obtained by the MGW

Vrednosti težina kriterijuma dobijene metodom geometrijskih težina ne zavise od broja kriterijuma i nalaze se u intervalu 0–1. Zbir aditivno normalizovanih vrednosti težina kriterijuma iznosi 1.

Roberts i Goodwin (Roberts, Goodwin, 2002, pp.291-303) ističu postojanje jasnih teorijskih dokaza da težine dobijene metodom centroida rangova predstavljaju najbolju aproksimaciju težina koje se mogu dobiti metodom direktnog dodeljivanja težina. Težine određene na osnovu raspodele verovatnoća rangova najbolje odgovaraju težinama koje se mogu dobiti proporcionalnom metodom određivanja težina kriterijuma.

Za rešavanje problema određivanja težina velikog broja kriterijuma preporučuje se primena metoda sume rangova, koja zahteva manje proračuna, a daje u potpunosti prihvatljive rezultate koji se skoro poklapaju sa vrednostima težina dobijenih metodom raspodele verovatnoće rangova (Roberts, Goodwin, 2002, pp.291-303).

Objedinjavanje individualnih poredaka kriterijuma

U praksi se, za određivanje težina kriterijuma, najčešće angažuje više eksperata koji, na osnovu svog ličnog sistema preferencija, vrše rangiranje kriterijuma. Na taj način javlja se problem formiranja grupnih vrednosti težina kriterijuma koje se mogu dobiti na dva načina: pretvaranjem individualnih rangova u težine, a zatim objedinjavanjem individualnih težina ili objedinjavanjem individualnih rangova i pretvaranjem grupnog ranga kriterijuma u grupne vrednosti težina kriterijuma. Formiranje grupnih vrednosti težina kriterijuma može biti izvršeno primenom matematičkih metoda objedinjavanja, primenom metoda teorije društvenog izbora i pomoću medijane Kemenija.[2]

Izabrane matematičke metode objedinjavanja

Milićević i Župac (Milićević, Župac, 2012, pp.48-70) na osnovu (Alfares, 2007) dali su prikaz sledećih matematičkih metoda objedinjavanja individualnih težina (rangova): metoda aritmetičkog osrednjavanja težina kriterijuma, metoda geometrijskog osrednjavanja težina kriterijuma i metoda geometrijskog osrednjavanja rangova kriterijuma. Autor ovog rada smatra da je za objedinjavanje rangova kriterijuma ispravnije koristiti medijanu rangova nego geometrijsko osrednjavanje rangova. Takav stav zasniva se na činjenici da rangovi kriterijuma predstavljaju vrednosti dobijene po ordinalnoj skali, pa je za njihovo objedinjavanje ispravnije primeniti medijanu rangova.

Metodom aritmetičkog osrednjavanja (M1) prvo se vrši pretvaranje individualnih rangova u individualne težine, a zatim se proračunava srednja vrednost težina svakog kriterijuma. Alfares (Alfares, 2007) za pretvaranje individualnih rangova u težine preporučuje primenu metode linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera. U opštem slučaju, umesto metode linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera, moguće je primeniti metodu centroida rangova, metodu inverznih težina ili neku drugu metodu pretvaranja rangova u težine kriterijuma.

Agregirane težine kriterijuma dobijaju se aritmetičkim osrednjavanjem težina dobijenih od svih m eksperata:

$$W_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_{i,j}}{m} \qquad j = 1,\dots,n \tag{9}$$

Metodom geometrijskog osrednjavanja težina (M2) u prvom koraku vrši se pretvaranje individualnih rangova u individualne težine primenom neke od funkcija transformacije rangova u težine. Agregirane težine dobijaju se u drugom koraku primenom geometrijskog osrednjavanja individualnih težina kriterijuma:

$$W_j = \sqrt[m]{w_{1,j} \times w_{2,j} \times \ldots \times w_{m,j}} \qquad j = 1,\dots,n \tag{10}$$

[2] Medijana Kemenija posebno je izdvojena zbog svog značaja koji ima u formiranju grupnog rangiranja objekata na osnovu individualnih rangiranja koja su izvršili *m* eksperti.

Metodom medijane rangova (M3) u prvom koraku se objedinjavaju individualni rangovi na osnovu medijane rangova kriterijuma koje su odredili *m* eksperti. Zatim se, pomoću neke od metoda pretvaranja rangova u težine, grupni rang pretvara u agregiranu težinu kriterijuma *Wj*.

Ako su svi eksperti izvršili rangiranje istog skupa kriterijuma, preporučuje se primena metode aritmetičkog osrednjavanja. Ako su eksperti izvršili rangiranje različitih podskupova kriterijuma, preporučuje se primena metode geometrijskog osrednjavanja težina. Medijana ne daje uvek strogi grupni poredak kriterijuma, što može predstavljati ograničenje za primenu ove metode.

Primena metoda društvenog izbora za objedinjavanje individualnih poredaka kriterijuma

Objedinjavanje individualnih rangova kriterijuma i formiranje grupnog ranga kriterijuma može biti izvršeno pomoću određenih metoda teorije društvenog izbora.

Grupni rangovi kriterijuma, dobijeni metodama teorije društvenog izbora, zatim se primenom izabrane funkcije transformacije ranga u težine pretvaraju u težine kriterijuma.

Teorija društvenog izbora poistovećuje problem grupnog odlučivanja (u ovom slučaju radi se o ekspertskoj grupi) sa problemom iznalaženja metode kojom će skup različito rangiranih individualnih preferencija dati jedinstvenu grupnu rang-listu. Traženi metod treba da omogući uspešnu agregaciju individualnih poredaka objekata (varijanti, kriterijuma i sl.).

Osnovno pitanje koje se postavlja pri razmatranju metoda agregacije individualnih preferencija jeste pitanje mogućnosti postojanja funkcije kojom će se skup različito rangiranih individualnih preferencija preslikati u jedinstvenu grupnu rang-listu preferencija. Takvu jednu funkciju Kenet Erou (Kenneth Arrow) naziva funkcijom društvenog blagostanja (FDB).

Grupni izbor treba razviti iz preferencija svakog eksperta, pri čemu, po pretpostavci, svaki ekspert ima poredak preferencija uređen po ordinalnoj skali, koji zadovoljava uslove racionalnosti: asimetričnost, potpunost i tranzitivnost.[3]

Za razliku od individualnog, kod društvenog odlučivanja procedura odlučivanja treba bude prihvatljiva i sa etičkog stanovišta, tj. da zadovoljava neke demokratske principe, odnosno potrebno je pomiriti zahteve racionalnosti sa zahtevima pravde i demokratije.

[3] Objašnjenje uslova racionalnosti može se naći npr. u: Jovanović R., 2012, Dva rezultata nemogućnosti u teoriji društvenog odlučivanja, *Theoria* 3, 55, pp.55–71.

Kenet Erou je definisao sledeće etičke uslove koje treba da zadovolji pravilo društvenog izbora u demokratskom sistemu:[4]

1. U (The unrestricted domain condition) – uslov univerzalnog domena.
2. D (Nondictatorship condition) – uslov nepostojanja diktatora.
3. CS (Citizen's sovereignty condition) – uslov građanskog suvereniteta.
4. PA (Positive association of social and individual values) – uslov pozitivnog povezivanja individualnih i kolektivnih preferencija.
5. I (The independence of irrelevant alternatives) – uslov nezavisnosti od irelevantnih alternativa.

Polazeći od ovih premisa, Erou je dokazao svoju čuvenu teoremu: za tri ili više date alternative i dva ili više članova grupe ne postoji nijedna FDB koja istovremeno ispunjava uslove racionalnosti i etičke uslove[5]. Ukratko, kada je reč o grupnom izboru, ne postoji univerzalna i savršena metoda izbora koja istovremeno vodi i do racionalne i etički prihvatljive odluke. To je tzv. Erouova teorema nemogućnosti društvenog izbora.

Ne ulazeći u dalja teorijska razmatranja teorije društvenog izbora, biće navedene metode grupnog odlučivanja koje, kao rezultat, daju grupni poredak varijanti, odnosno kompletnu rang-listu, za razliku od metoda koje u rezultatu imaju samo najbolju varijantu. Među najpoznatijim takvim metodama nalaze se Kondorseova i Bordina metoda.

Kondorse je 1785. predložio metodu baziranu na kolektivnom poređenju u parovima. On predlaže da se posmatra broj pojedinaca $v(x, y)$ koji preferiraju *x* u odnosu na *y*. Ako je $v(x, y) \geq v(y, x)$ onda je *x* društveno preferirana u odnosu na *y*. Kondorseov pobednik je varijanta koja, u poređenju sa svakom drugom varijantom, dobija većinu glasova. Najveća zamerka ovoj metodi jeste što može biti narušen uslov tranzitivnosti, te dolazi do tzv. Kondorseovog efekta (ili paradoksa glasanja ili ciklične većine).

Primenom Bordine metode grupa bira varijantu koja u proseku zauzima najviše mesto na individualnim rang-listama, a to se određuje sabiranjem bodova koje pojedinci dodeljuju svakoj varijanti. Osnovni princip koji se koristi pri dodeli bodova jeste da varijanta koja zauzima poslednje mesto na individualnoj rang-listi dobija 0 bodova, pretposlednja varijanta 1 bod, dok prva varijanta dobija *n*-1 bod (pod pretpostavkom da ima ukupno *n* varijanti). Grupni poredak varijanti formira se tako što se na prvo mesto postavlja varijanta sa najviše osvojenih bodova, a zatim se redom postavljaju varijante na osnovu opadajućih vrednosti dodeljenih bodova. Problem sa ovom metodom jeste u njenoj osetljivosti na irelevantne alternative, što je čini otvorenom za strateško ponašanje (manipulaciju) učesnika u procesu izbora.

[4] Objašnjenje etičkih principa Keneta Eroua može se naći npr. u: Radovanović B., 2012, Individualno odlučivanje, grupno odlučivanje i deliberacija, *Filozofija i društvo*, 23(2) pp.147-167.
[5] Dokaz teoreme može se naći u: Kenneth Arrow, 1963, *Social Choices and Individual Values IIed*, New York, Wiley.

Rangiranja $P_1,...,P_m$ n objekata (a_i, i=1,...,n) mogu biti prikazana u obliku matrica M(Pν), gde je ν=1,..,*m*, sa elementima:

$$p_{ij}^{\nu} = \begin{cases} 1, & ako\ je\ a_i \succ a_j \\ 0, & ako\ je\ a_i \approx a_j \\ -1, & ako\ je\ a_i \prec a_j \end{cases} \tag{11}$$

Prikazivanje rangiranja kao binarnih odnosa u matričnoj formi pruža mogućnost uvođenja mere udaljenosti između parova rangiranja. Jedna od najčešće korišćenih mera udaljenosti između dva proizvoljna rangiranja P_1 i P_2 računa se po formuli[6]:

$$d(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left| p_{ij}^{(1)} - p_{ij}^{(2)} \right| \tag{12}$$

odnosno

$$d(P_1, P_2) = \sum_{i<j} \left| p_{ij}^{(1)} - p_{ij}^{(2)} \right| \tag{13}$$

Navedena mera udaljenosti dva proizvoljna rangiranja često se naziva rastojanje Kemenija[7]. Može se pretpostaviti da se rezultujuće rangiranje $F(P_1,...,P_m)$ mora nalaziti što je moguće bliže rangiranjima $P_1,...,P_m$. Takvo rangiranje $M^*(P_1,...,P_m)$ naziva se medijana Kemenija:

$$M^*(P_1,...,P_m) = Arg \min_{P} \sum_{\nu=1}^{m} d(P, P_\nu) \tag{14}$$

Medijana Kemenija je jedinstveno rezultujuće strogo rangiranje koje je neutralno, saglasno i Kondorsetovo.

Neutralnost – simetričnost u odnosu na izmenu varijanti.

Saglasnost – mišljenje ekspertske grupe se podudara sa opštim mišljenjem bilo koje dve njene podgrupe.

---

[6] Pored navedene mere udaljenosti u literaturi: Cook W. D., 2006, Distance-based and ad hoc consensus models in ordinal preference ranking, *European Journal of Operational Research*, 172, pp.369–385. mogu se naći još neki načini merenja udaljenosti između individualnih poredaka objekata.

[7] Detaljnije objašnjenje rastojanja Kemenija, kao i njegovo aksiomatsko određenje, nalazi se u literaturi: Литвак Б.Г., 1982, *Экспертная информация методы получения и анализа*, Москва, Радио и Связь.

Milićević, M. i dr., Određivanje težina kriterijuma primenom rangiranja, pp. 141–166

Kondorsetovost – na osnovu toga da $s_{ij}>s_{ji}$, gde je s_{ij} – broj eksperata koji preferiraju a_i u odnosu na a_j, sledi da $(...,a_j, a_i,...)\notin F(V)$, gde je V – rangiranje podgrupe eksperata, a F(V) – opšte mišljenje podgrupe. Na taj način medijana zadovoljava principe izbora Kondorsea i ne dovodi do efekta Kondorse.

Od navedenih uslova Eroua ona ne zadovoljava jedino uslov nezavisnosti (uslov 5). Medijana Kemenija smatra se jednim od najkorektnijih rezultujućih odnosa. To je jedan od najopravdanijih načina određivanja rezultujućeg ranga na osnovu individualnih rangova.

Osnovni nedostatak medijane Kemenija sastoji se u komplikovanim procedurama njenog određivanja. Za određivanje medijane Kemenija razvijeni su heuristički i kombinatorni algoritmi. Takođe, u slučaju strogih rangiranja (nije dozvoljena indiferentnost objekata) problem određivanja medijane Kemenija može se prikazati i rešiti kao zadatak raspoređivanja.

U radu će biti ukratko prikazan jedan heuristički algoritam koji je razvijen u (Литвак, 1982). Heuristički algoritam je jednostavniji za primenu od kombinatornog algoritma i zadovoljava potrebe ovog rada.

Heuristički algoritam određivanja medijane Kemenija

Ukupna informacija o rangiranjima objekata koju su dali eksperti može biti data u vidu matrice gubitka koja se dalje koristi kao polazna osnova za proračun medijane Kemenija.

Rastojanje od proizvoljnog rangiranja P do svih rangiranja $P_1,...,P_m$ računa se na sledeći način:

$$\sum_{\nu=1}^{m} d(P,P_\nu) = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{i<j}\left|p_{ij}^{(\nu)} - p_{ij}\right| = \sum_{i<j}\sum_{\nu=1}^{m}\left|p_{ij}^{(\nu)} - p_{ij}\right| = \sum_{i<j}\sum_{\nu=1}^{m} d_{ij}(P,P_\nu) \quad (15)$$

gde je: $d_{ij}(P,P_\nu) = \left|p_{ij}^{(\nu)} - p_{ij}\right|$

Elementi matrice gubitka računaju se kao:

$$r_{ij} = \sum_{\nu=1}^{m} d_{ij}(P,P_\nu) \quad (16)$$

Zadatak proračuna medijane Kemenija svodi se na proračun, na osnovu matrice gubitka, minimalnog sumarnog rastojanja.

Heuristički algoritam proračuna medijane Kemenija provodi se u nekoliko iteracija, polazeći od matrica gubitka $\left\|r_{ij}^{(0)}\right\|$ skupa rangiranja $P_1,...,P_m$.

1. iteracija – odrediti:

$$s_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} r_{1,j}\ ,\ s_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} r_{n,j} \quad (17)$$

$$s_{i_1} = \min s_i^{(1)} \quad (18)$$

Varijanta a_{i_1} postavlja se na prvo mesto. U prvom koraku je $S^{(1)} = s_{i_1}$. U matrici $\left\| r_{ij}^{(0)} \right\|$ precrtavaju se red i kolona sa brojem i_1 i dobija se matrica $\left\| r_{ij}^{(1)} \right\|$ sa skupom indeksa redova i kolona $I^{(1)} = J^{(1)} = \{1,...,n\} \setminus i_1$.

k-ta iteracija – u matrici gubitka $\left\| r_{ij}^{(k-1)} \right\|$ prvo odrediti $s_i^k = \sum_{j \in J^{(k-1)}} r_{ij}$, a zatim $s_{i_k} = \min_{i \in I^{(k-1)}} s_i^{(k)}$. Varijantu a_{i_k} postaviti na *k*-to mesto. Izračunati $S^{(k)} = S^{(k-1)} + s_{i_k}$. Precrtavši u matrici $\left\| r_{ij}^{(k-1)} \right\|$ red i kolonu sa oznakom i_k dobija se matrica $\left\| r_{ij}^{(k)} \right\|$ sa skupom indeksa $I^{(k)} = J^{(k)} = \{1,...,n\} \setminus \{i_1,...,i_k\}$.

Algoritam se završava posle *n*-te iteracije ($I^{(n)} = J^{(n)} = \varnothing$). Dobijeno je sledeće grupno rangiranje varijanti:

$$P_I = \left(a_{i_1},...,a_{i_n}\right)^T \tag{19}$$

pri čemu je: $\sum_{\nu=1}^{m} d(P_I, P_\nu) = S^{(n)}$.

Dobijeno rangiranje nije apriori i optimalno rangiranje. Naime, ispitivanjem uslova optimalnosti potrebno je dobiti rangiranje P_{II} koje ispunjava neophodne uslove optimalnosti. Postupno se proverava da li je zadovoljen odnos: $r_{i_k i_{k+1}} \le r_{i_{k+1} i_k}, \quad k = n-1, n-2, ..., 1$.

Ako je za neki *k* traženi odnos narušen, varijante a_{i_k} i $a_{i_{k+1}}$ menjaju mesta u rangiranju, a odnos $r_{i_k i_{k+1}} \le r_{i_{k+1} i_k}$ se proverava počevši od varijante koja neposredno prethodi varijanti koja je promenila mesto. Na taj način dobija se poredak P_{II} za koje je neophodan uslov optimalnosti ispunjen. Ako skup rangiranja $P_1,...,P_m$ poseduje svojstvo Kondorsea i ako je tranzitivan, onda je P_{II} medijana Kemenija rangiranja $P_1,...,P_m$.

Primer primene izabranih metoda

Ekspertska grupa sastavljena od osamnaest eksperata izvršila je rangiranje osam kriterijuma sa konačnim ciljem određivanja težina kriterijuma. Kako je cilj rada prikaz mogućnosti primene metoda određivanja težina kriterijuma na osnovu njihovog ranga, a budući da konkretni nazivi kriterijuma nemaju uticaja na vrednosti težina kriterijuma, u radu se daju samo oznake kriterijuma bez navođenja njihovog naziva.[8] Rezultati rangiranja prikazani su u tabeli 1.

Tabela 1 – Rezultati rangiranja
Table 1 – Ranking results

Eksperti	Kriterijumi							
	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8
E1	1	2	4	6	5	7	3	8
E2	1	2	4	6	5	7	3	8
E3	1	2	4	6	5	7	3	8
E4	5	1	7	8	6	4	3	2
E5	1	2	4	6	5	7	3	8
E6	1	2	4	6	5	7	3	8
E7	1	2	3	8	5	6	4	7
E8	1	2	4	6	4	7	2	7
E9	1	2	3	5	7	5	3	8
E10	1	2	6	7	4	8	3	5
E11	1	4	3	7	2	4	4	8
E12	1	2	4	7	6	8	3	5
E13	1	4	2	7	6	8	3	5
E14	1	4	2	7	6	8	3	5
E15	2	2	6	8	1	2	2	6
E16	1	2	4	8	6	5	3	7
E17	1	6	3	7	8	4	2	5
E18	4	5	1	8	2	6	7	3

Težine kriterijuma na osnovu individualnih rangova kriterijuma dobijene su primenom izabranih funkcija pretvaranja rangova u težine. Kao primer navode se težine kriterijuma dobijene metodom sume rangova (tabela 2). Vrednosti težina kriterijuma koje su dobijene ostalim metodama pretvaranja rangova u težine neće biti prikazivane zbog obima ovog rada.

[8] Primer je deo projekta ekspertskog ocenjivanja koeficijenata elemenata, pitanja i parametara operativnih sposobnosti koji je realizovan u GŠ VS i koji neće biti detaljnije prikazan.

Tabela 2 – Vrednosti težina kriterijuma dobijene MSR
Table 2 – Weight values of the criteria obtained by the RSW

Eksperti	Kriterijumi							
	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8
E1	0.222	0.194	0.139	0.083	0.111	0.056	0.167	0.028
E2	0.222	0.194	0.139	0.083	0.111	0.056	0.167	0.028
E3	0.222	0.194	0.139	0.083	0.111	0.056	0.167	0.028
E4	0.111	0.222	0.056	0.028	0.083	0.139	0.167	0.194
E5	0.222	0.194	0.139	0.083	0.111	0.056	0.167	0.028
E6	0.222	0.194	0.139	0.083	0.111	0.056	0.167	0.028
E7	0.222	0.194	0.167	0.028	0.111	0.083	0.139	0.056
E8	0.222	0.194	0.139	0.083	0.139	0.056	0.194	0.056
E9	0.222	0.194	0.167	0.111	0.056	0.111	0.167	0.028
E10	0.222	0.194	0.083	0.056	0.139	0.028	0.167	0.111
E11	0.222	0.139	0.167	0.056	0.194	0.139	0.139	0.028
E12	0.222	0.194	0.139	0.056	0.083	0.028	0.167	0.111
E13	0.222	0.139	0.194	0.056	0.083	0.028	0.167	0.111
E14	0.222	0.139	0.194	0.056	0.083	0.028	0.167	0.111
E15	0.194	0.194	0.083	0.028	0.222	0.194	0.194	0.083
E16	0.222	0.194	0.139	0.028	0.083	0.111	0.167	0.056
E17	0.222	0.083	0.167	0.056	0.028	0.139	0.194	0.111
E18	0.139	0.111	0.222	0.028	0.194	0.083	0.056	0.167

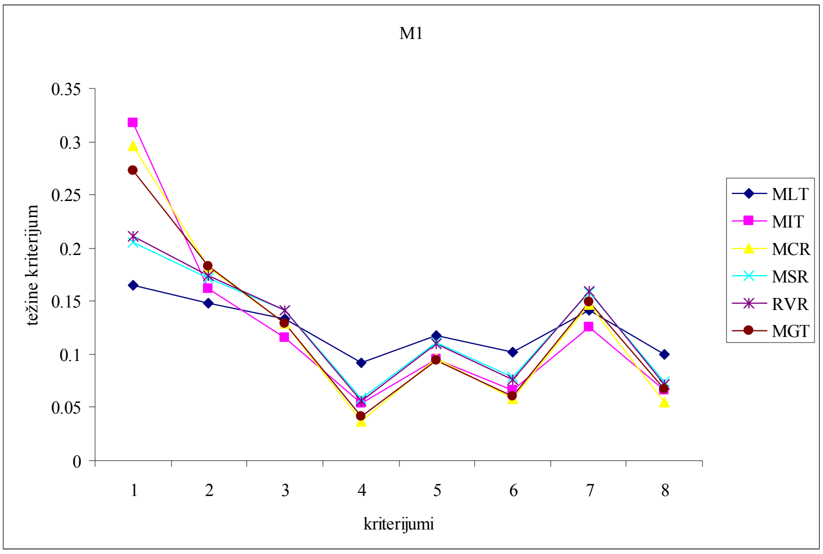
Primenom matematičkih metoda objedinjavanja M1, M2 i M3 izvršeno je objedinjavanje individualnih težina (rangova). Grupne težine kriterijuma prikazane su u tabeli 3.

Tabela 3 – Težine kriterijuma
Table 3 – Criteria weights

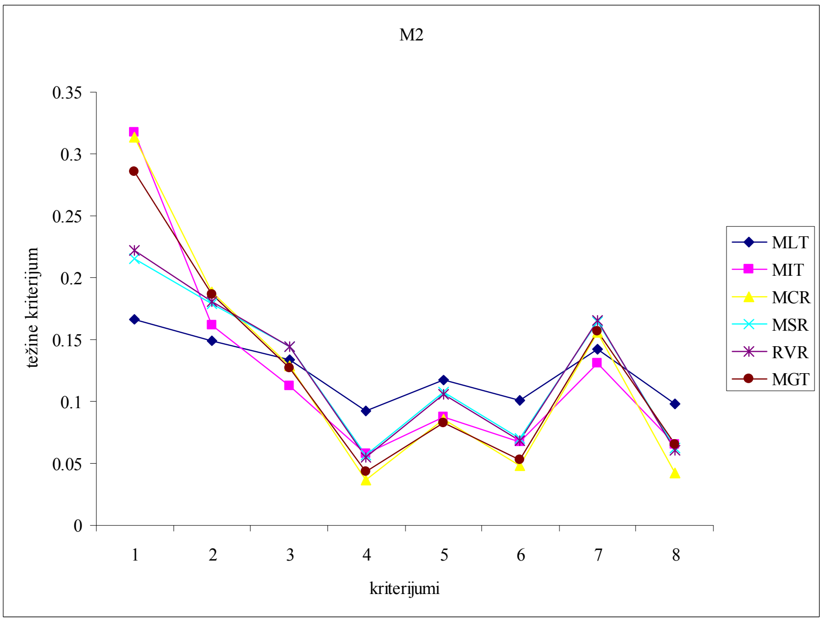
M1									
Metode pretvaranja ranga u težine	Kriterijumi	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8
MLT	težine	0.165	0.148	0.133	0.092	0.118	0.102	0.142	0.1
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
MIT	težine	0.317	0.161	0.115	0.053	0.095	0.066	0.125	0.066
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7

MCR	težine	0.296	0.182	0.129	0.037	0.096	0.058	0.147	0.055
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
MSR	težine	0.205	0.172	0.142	0.059	0.112	0.078	0.158	0.074
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
RVR	težine	0.211	0.174	0.141	0.056	0.11	0.077	0.159	0.072
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
MGT	težine	0.273	0.183	0.129	0.042	0.095	0.061	0.15	0.068
	rang	1	2	4	8	5	7	3	6
M2									
MLT	težine	0.166	0.149	0.134	0.092	0.118	0.101	0.143	0.098
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
MIT	težine	0.317	0.161	0.112	0.057	0.088	0.067	0.131	0.066
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
MCR	težine	0.313	0.189	0.128	0.036	0.085	0.048	0.156	0.043
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
MSR	težine	0.216	0.178	0.144	0.057	0.108	0.07	0.164	0.063
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
RVR	težine	0.222	0.181	0.144	0.055	0.106	0.068	0.165	0.06
	rang	1	2	4	8	5	6	3	7
MGT	težine	0.285	0.187	0.127	0.043	0.083	0.053	0.157	0.065
	rang	1	2	4	8	5	7	3	6
M3									
MLT	rang	1	2	4	6	5	6	3	6
	težine	0.166	0.153	0.127	0.1	0.113	0.1	0.14	0.1
MIT	rang	1	2	4	6	5	6	3	6
	težine	0.359	0.18	0.09	0.06	0.072	0.06	0.12	0.06
MCR	rang	1	2	4	6	5	6	3	6
	težine	0.321	0.203	0.104	0.051	0.075	0.051	0.144	0.051
MSR	rang	1	2	4	6	5	6	3	6
	težine	0.205	0.179	0.128	0.077	0.103	0.077	0.154	0.077
RVR	rang	1	2	4	6	5	6	3	6
	težine	0.212	0.183	0.127	0.074	0.1	0.074	0.155	0.074
MGT	rang	1	2	4	6	5	6	3	6
	težine	0.299	0.212	0.106	0.053	0.075	0.053	0.15	0.053

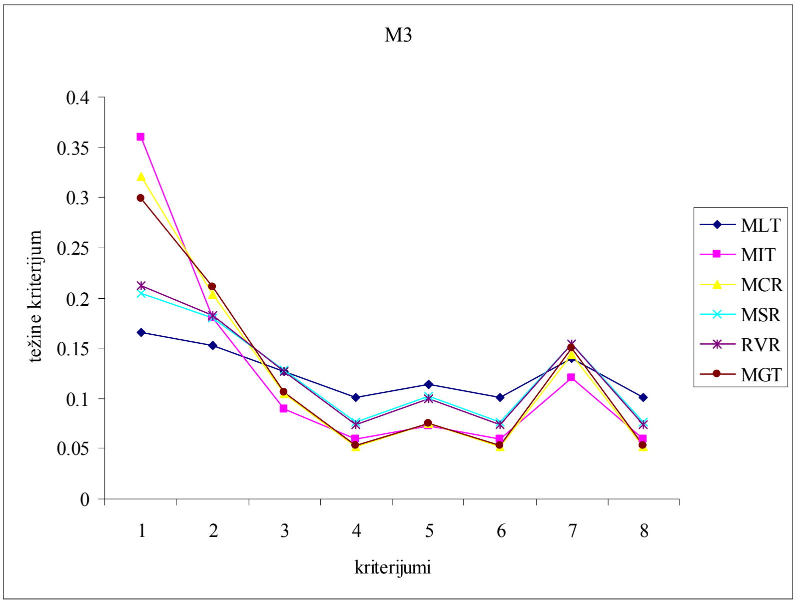
Težine kriterijuma dobijenih različitim načinima objedinjavanja individualnih težina ili rangova grafički su prikazane na slikama 7–9.



Slika 7 – Graf težina kriterijuma dobijenih aritmetičkim osrednjavanjem
Figure 7 – Graph of the arithmetical aggregating criteria weights



Slika 8 – Graf težina kriterijuma dobijenih geometrijskim osrednjavanjem
Figure 8 – Graph of the geometrical aggregating criteria weights



Slika 9 – Graf težina kriterijuma dobijenih medijanom rangova
Figure 9 – Graph of the median ranks criteria weights

Na slikama 7–9 može se uočiti da je relativni odnos vrednosti težina kriterijuma različitih metoda transformacije rangova u težine isti, nezavisno od izabrane metode objedinjavanja individualnih težina (rangova). Na primer, metoda inverznih težina daje najveću vrednost težine kriterijuma K1, bez obzira na izabranu metodu objedinjavanja M1-M3, dok je ta vrednost najmanja za metodu linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera.

Poredak vrednosti težina kriterijuma je potpuno isti kod svih metoda pretvaranja rangova u težine, osim kod metode geometrijskih težina kod koje dolazi do zamene ranga između kriterijuma K6 i K8 za metode objedinjavanja M1 i M2.

Metoda M3 – medijana rangova ne daje strogi grupni poredak kriterijuma, odnosno kriterijumi K4, K6 i K8 imaju isti rang, pa je poredak kriterijuma sledeći: P=(K1, K2, K7, K3, K5, (K4, K6, K8)).

Najveća razlika maksimalne i minimalne vrednosti težine kriterijuma uočava se kod metode centroida rangova (srednja vrednost za sve tri metode M1-M3 iznosi 0,268), dok je najmanja razlika kod metode linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera (0,073). Takođe, najveći procentualni odnos najmanje i najveće vrednosti težine kriterijuma je kod metode linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera (srednja vrednost iznosi 55,56%), a najmanji je kod metode centroida rangova (13,34%).

Izabranim metodama društvenog izbora (metoda Kondorsea i Bordina metoda) objedinjeni su individualni rangovi kriterijuma i formiran je grupni rang. U ovom slučaju obe metode daju isti grupni poredak kriterijuma, što se može videti u tabelama 4 i 5.

Tabela 4 – Težine kriterijuma dobijene primenom Kondorseove metode
Table 4 – Weights of the criteria obtained by the Condorcet's method

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	Σ	rang
K1	-	16	17	18	16	16	16	16	115	1
K2	1	-	13	18	15	14	13	17	91	2
K3	1	5	-	18	13	16	5	15	73	4
K4	0	0	0	-	2	10	0	8	20	8
K5	2	3	4	16	-	14	3	13	55	5
K6	1	2	2	7	4	-	1	11	28	6
K7	1	3	12	18	15	15	-	17	81	3
K8	2	1	2	10	5	6	1	-	27	7

Tabela 5 – Težine kriterijuma dobijene primenom Bordine metode
Table 5 – Weights of the criteria obtained by the Borda count

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8
E1	7	6	4	2	3	1	5	0
E2	7	6	4	2	3	1	5	0
E3	7	6	4	2	3	1	5	0
E4	3	7	1	0	2	4	5	6
E5	7	6	4	2	3	1	5	0
E6	7	6	4	2	3	1	5	0
E7	7	6	5	0	3	2	4	1
E8	7	6	4	2	4	1	6	1
E9	7	6	3	3	1	3	5	0
E10	7	6	2	1	4	0	5	3
E11	7	4	5	1	6	4	4	0
E12	7	6	4	1	2	0	5	3
E13	7	4	6	1	2	0	5	3
E14	7	4	6	1	2	0	5	3
E15	6	6	2	0	7	6	6	2
E16	7	6	4	0	2	3	5	1
E17	7	2	5	1	0	4	6	3
E18	4	3	7	0	6	2	1	5
Σ	118	96	74	21	56	34	87	31
rang	1	2	4	8	5	6	3	7

Pre proračuna medijane Kemenija ekspertska individualna rangiranja P_1,..,P_{18} potrebno je prikazati u vidu matrica M(P_1),...,M(P_{18}) sa elementima $p_{ij}^{(\nu)}$, ν=1,...,m, dobijenim pomoću formule (11). U (20) data je matrica binarnih odnosa za rangiranje kriterijuma koje je izvršio prvi ekspert. Matrice za ostale eksperte neće biti prikazane zbog obima rada.

$$\left\|p_{ij}^{(\nu)}\right\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (20)$$

Pomoću izraza (16) dobijena je matrica gubitka:

$$\left\|r_{ij}^{(0)}\right\| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 33 & 0 & 10 & 0 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 34 & 26 & 0 & 0 & 9 & 4 & 25 & 5 \\ 36 & 36 & 36 & 0 & 32 & 15 & 36 & 20 \\ 32 & 30 & 27 & 4 & 0 & 8 & 30 & 12 \\ 33 & 32 & 32 & 21 & 28 & 0 & 32 & 11 \\ 33 & 27 & 11 & 0 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 32 & 32 & 31 & 16 & 24 & 25 & 32 & 0 \end{vmatrix} \qquad (21)$$

Polazeći od matrice gubitka proveden je heuristički algoritam proračuna medijane Kemenija:

1. iteracija – U matrici gubitka $\left\|r_{ij}^{(0)}\right\|$ izračunate su vrednosti $s_i^{(1)}$ za i=1,...,8. Minimalnu vrednost $s_i^{(1)}$ ima kriterijum K1($s_1^{(1)}$=19). Kriterijum K1 se postavlja na prvo mesto, a iz daljeg proračuna se izostavljaju prvi red i prva kolona.

2. iteracija – Nakon izostavljanja iz proračuna prvog reda i prve kolone računa se $s_i^{(2)}$. Minimalna vrednost $s_2^{(2)}$=33 odgovara kriterijumu K2 i iz daljeg proračuna se isključuju drugi red i druga kolona. Kriterijum K2 se stavlja na drugo mesto u grupnom poretku kriterijuma.

Postupak se ponavlja sve dok se na osnovu vrednosti $s_i^{(k)}$ ne rasporede svi kriterijumi. S obzirom na to da je broj kriterijuma $k=n=8$, celokupan postupak ima sedam iteracija (tabela 6).

Tabela 6 – Primena heurističkog algoritma za proračun medijane Kemenija
Table 6 – Application of the heuristic algorithm for calculating the Kemeni median

$$\left\|r_{ij}^{(0)}\right\| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 33 & 0 & 10 & 0 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 34 & 26 & 0 & 0 & 9 & 4 & 25 & 5 \\ 36 & 36 & 36 & 0 & 32 & 15 & 36 & 20 \\ 32 & 30 & 27 & 4 & 0 & 8 & 30 & 12 \\ 33 & 32 & 32 & 21 & 28 & 0 & 32 & 11 \\ 33 & 27 & 11 & 0 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 32 & 32 & 31 & 16 & 24 & 25 & 32 & 0 \end{vmatrix}$$

$s_i^{(1)}$	$s_i^{(2)}$	$s_i^{(3)}$	$s_i^{(4)}$	$s_i^{(5)}$	$s_i^{(6)}$	$s_i^{(7)}$
19						
66	33					
103	69	43	18			
211	175	139	103	67	35	20
143	111	81	51	24		
189	156	124	92	60	32	
85	52	25				
192	160	128	96	65	41	16

Primenom heurističkog algoritma dobijen je grupni poredak kriterijuma:
$P_I = \left(K1\,K2\,K7\,K3\,K5\,K6\,K8\,K4\right)^T$.

Lako se može utvrditi da je za sve $k = n-1, n-2, ..., 1$ ispunjen uslov $r_{i_k i_{k+1}} \le r_{i_{k+1} i_k}$, pa je $P_I=P_{II}$.

U ovom primeru medijana Kemenija, Bordina i metoda Kondorsea daju isti poredak rangova. Ovakav rezultat se pre može smatrati izuzetkom nego pravilom.

Primenom izabranih funkcija transformacije rangova u težine dobijene su težine kriterijuma na osnovu grupnog ranga kriterijuma. Rezultat je prikazan u tabeli 7.

Tabela 7 – Težine kriterijuma na osnovu grupnog ranga
Table 7 – Criteria weights based on the group ranking

Grupni poredak kriterijuma (Kondorese, Borda, medijana Kemenija)	Težine kriterijuma					
	MLT	MIT	MCR	MSR	RVR	MGT
K1	0,1729	0,3679	0,3397	0,2222	0,2292	0,3023
K2	0,1592	0,184	0,2147	0,1944	0,1977	0,2138
K7	0,1455	0,1226	0,1522	0,1667	0,1672	0,1512
K3	0,1318	0,092	0,1106	0,1389	0,1375	0,1069
K5	0,1182	0,0736	0,0793	0,1111	0,1084	0,0756
K6	0,1045	0,0613	0,0543	0,0833	0,0805	0,0534
K8	0,0908	0,0525	0,0334	0,0556	0,0531	0,0378
K4	0,0771	0,046	0,0156	0,0278	0,0263	0,0267

Zaključak

Metode određivanje težina kriterijuma na osnovu ranga kriterijuma pripadaju subjektivnom pristupu određivanja težina kriterijuma. Moguće ih je primeniti u situacijama odlučivanja, kada je potrebno odrediti težine kriterijuma, a da nisu poznate varijante niti kriterijumske vrednosti varijanti.

Iako metode određivanja težina kriterijuma mnogo utiču na vrednosti dobijenih težina kriterijuma, ne postoji saglasnost o najboljoj metodi određivanja, niti o uslovima njene primene. Na osnovu primera obrađenog u ovom radu može se zaključiti da je metode inverznih težina i centroida rangova pogodno primeniti kada je potrebno naglasiti intenzitet razlike vrednosti težina kriterijuma. Ako su kriterijumi približno jednaki po svojoj važnosti poželjno je primeniti metodu linearnih težina sa promenljivim koeficijentom smera. Metoda sume rangova pogodna je za primenu kada se određuju težine velikog broja kriterijuma.

Objedinjavanje individualnih rangova kriterijuma moguće je izvršiti korišćenjem matematičkih metoda i metoda društvenog izbora. Matematičke metode zasnivaju se na pretvaranju individualnih rangova u težine, a zatim se individualni rangovi aritmetički ili geometrijski objedinjavaju. Druga mogućnost sastoji se u objedinjavanju individualnih rangova primenom medijane, pri čemu postoji mogućnost dobijanja nepotpunog poretka rangova.

Metode društvenog izbora su u osnovi glasačke tehnike, ali je moguća primena pojedinih metoda, kao što su Bordina i metoda Kondorsea za dobijanje grupnog poretka kriterijuma.

Medijana Kemenija je jedan od najopravdanijih načina određivanja rezultujućeg ranga na osnovu individualnih rangova. Predstavlja jedinstveno rezultujuće strogo rangiranje koje je neutralno, saglasno i Kondorsetovo, a jedino ne zadovoljava uslov nezavisnosti od navedenih uslova Eroua.

Međutim, postupak određivanja medijane Kemenija dosta je komplikovan i za njeno određivanje razvijeno je više algoritama. Heuristički algoritam je znatno jednostavniji za primenu od kombinatornog i daje sasvim prihvatljiv rezultat.

S obzirom na pozitivne osobine koje poseduje, autor preporučuje primenu medijane Kemenija za određivanje grupnog poretka kriterijuma.

Literatura

Alfares, H.K. 2007. *Combining criteria ranks for calculating their weights in group MCDM*. Dhahran, Saudi Arabia: Systems Engineering Department, King Fahd University of Petroleum & Minerals.

Alfares, H.K., & Duffuaa, S.O. 2009. Assigning cardinal weights in multicriteria decision making based on ordinal ranking. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis,* 15, str. 125-133.

Cook, W.D. 2006. Distance-based and ad hoc consensus models in ordinal preference ranking. *European Journal of Operational Research,* 172(2), pp. 369-385. doi:10.1016/j.ejor.2005.03.048

Jovanović, R. 2012. Dva rezultata nemogućnosti u teoriji društvenog odlučivanja. *Theoria,* Beograd*,* 55(3), str. 55-71. doi:10.2298/THEO1203055J

Litvak, B.G. (Литвак, Б.Г.), 1982. *Экспертная информация методы получения и анализа*. Москва: Радио и Связь.

Lootsma, F.A., & Bots, P.W.G. 1999. The assignment of scores for output-based research funding. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis,* 8(1), pp. 44-50. doi:10.1002/(SICI)1099-1360(199901)8:1<44::AID-MCDA227>3.0.CO;2-H

Milićević, M., & Župac, G. 2012. Subjektivni pristup određivanju težina kriterijuma/Subjective approach to the determination of criteria weights. *Vojnotehnički glasnik/Military Technical Courier,* 60(2), pp. 48-70. doi:10.5937/vojtehg1202048M

Radovanović, B. 2012. Individualno odlučivanje, grupno odlučivanje i deliberacija. *Filozofija i društvo,* 23(2), str. 147-167. doi:10.2298/FID1202147R

Roberts, R., & Goodwin, P. 2002. Weight approximations in multi-attribute decision models. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis,* 11(6), pp. 291-303. doi:10.1002/mcda.320

Solymosi, T., & Dombi, J. 1986. A method for determining the weights of criteria: The centralized weights. *European Journal of Operational Research,* 26(1), pp. 35-41. doi:10.1016/0377-2217(86)90157-8

Stillwell, W.G., Seaver, D.A., & Edwards, W. 1981. A comparison of weight approximation techniques in multiattribute utility decision making. *Organizational Behavior and Human Performance,* 28(1), pp. 62-77. doi:10.1016/0030-5073(81)90015-5

DETERMINATION OF CRITERIA WEIGHTS USING RANKING

FIELD: Computer Sciences:
Decision Theory & Quantitative Methods
ARTICLE TYPE: Review Paper

Summary:

This paper presents possible ways for determining criteria weights based on the criteria ranks.The linear weights with a variable slope, reciprocal weights, rank order centroid weights, rank sum weights, geometric weights and rank order distribution weights are shown in this paper.

When the ranking process involves several experts, there is a possibility for aggregating criteria ranks (weights) using selected mathematical methods, social choice theory methods and the Kemeni median. The application of the selected methods is illustrated with one numerical example and the obtained results are analysed.

The main aim of this paper is a systematic review of possible ways for determining the criteria weights based on criteria ranks given by one or more experts.

Introduction

One of the most commonly used subjective approaches to determining criteria weights is the approach based on the criteria ranking. The main advantage of this method of determining the criteria weight is the fact that a decision maker finds it often much easier to make criteria ranking than to assign numerical values to criteria weights.

In calculating criteria weights based on criteria ranking, it is necessary to determine the type of the function rank – weight.

When the process of determining the criteria weights involves many experts, then the aggregation individual criteria ranks (or weights) must be done as well as the formation of a unique group criteria weight using various aggregation methods.

The selected methods for determining the criteria weights using ranking

The linear weights with a variable slope, reciprocal weights, rank order centroid weights, rank sum weights, geometric weights and rank order distribution weights are shown in this paper.

This paper presents a brief review of the selected methods for determining the criteria weights on the basis of their rank: linear weights with a variable slope, reciprocal weights, rank order centroid weights, rank sum weights, geometric weights and rank order distribution, in order to form a complete notion of the possibilities of determining the criteria weights based on criteria ranks.

Roberts and Goodwin (2002) suggest the existence of clear theoretical evidence that weights obtained using the rank order centroid method represent the best approximation of the weights that can be obtained using the direct allocation of weights. Weights determined by the rank order distribution method best fit weights that can be obtained using the proportional method of determining the criteria weights.

To solve the problem of determining the weight of a large number of criteria, the application of the rank sum weights method is recommended.

Aggregation of individual criteria orders

Group values of criteria weights can be obtained in two ways: by transforming the individual ranks into weights, and then aggregating the individual weights or aggregating individual ranks and transforming group criteria ranks into group criteria weights. The formation of group values criteria weights can be performed by applying mathematical aggregatin methods, by the implementation of the social choice theory and using the Kemeni median.

Selected mathematical aggregation methods

Based on the literature (Alfares, 2007.), the following mathematical methods for aggregating individual weights (ranks) are shown: a method *of arithmetic averaging of criteria weights, method of geometric averaging of criteria weights and the median ranks method.*

The use of the methods of social choice for the aggregation of individual criteria orders

The social choice theory identifies the group decision making problem (in this case it is an expert group) with the problem of finding a method for obtaining a unique group rank list from a set of differently ranked individual preferences. The requested method should enable the successful aggregation of individual orders of objects (variants, criteria, etc.).

Without going into a further theoretical consideration of the social choice theory, there are listed group decision making methods which as a result give a complete rank list. The best known methods are the Condorcet method and the Borda method.

Determination of criteria weights by applying the Kemeni median

Displaying ranking as binary relations in a matrix form creates a possibility of introducing the measure of distance between pairs of rankings, such as the Kemeni distance.

The resulting ranking closest to all individual rankings, and with a minimum total distance of all the individual rankings, is the Kemeni median.

The Kemeni median is a unique resultant ranking that is neutral, concordant, Condorset's and, from the all Arrow's conditions, it does not meet only the requirement of independence.

This paper briefly shows a heuristic algorithm (Питвак, 1982.) which is simpler to implement than a combinatorial algorithm but meets the needs of this paper.

Heuristic algorithm to determine the Kemeni median

The starting point for the calculation of the Kemeni median is the lost matrix. The elements of the lost matrix are the sum of distances of all the individual rankings to the selected ranking.

The task of calculating the Kemeni median is identical to calculating, based on the lost matrix, the minimum summary distance.

The heuristic algorithm calculation of the Kemeni median is conducted in several iterations and it finishes by checking the optimality of the obtained resultant ranking.

An example of the application of selected methods

The expert group consisting of eighteen experts performed a ranking of eight criteria with the goal of determining the criteria weights.

Criteria weights based on individual ranks were obtained by applying the selected conversion functions ranks in weights.

The aggregation of individual weights (ranks) was done by using mathematical methods.

The relative weight ratio of the value of different methods of transformation criteria ranks into weights is the same regardless of the chosen aggregation method.

The order of values of criteria weights is the same for all methods of transformation ranks into weights, except for the geometric weight method in which there is a substitution between two criteria ranks.

The median rank method does not always give a strict group criteria orders.

In the given example, the Kemeni median, the Borda and the Condorcet method give the same rank orders. This result can be regarded as an exception rather than a rule.

Conclusion

Methods for determining the criteria weights based on criteria ranks belong to the subjective approach to determining criteria weights.

Although the methods of determining the criteria weights have a great effect on the value of the obtained criteria weights, there is no consensus on the best method of determining the criteria weights, or the conditions of its application. If it is necessary to emphasize the intensity of the weight differences,,the reciprocal weights method can be applied or the rank order centroid method. The linear weights method with a variable slope can be applied if the criteria are approximately equal in their importance.

The aggregation of individual criteria ranks can be performed in several ways. The author recommends the use of the Kemeni median.

Key words: *weights; ranking; median; criteria.*

Datum prijema članka/Paper received on: 10. 05. 2013.
Datum dostavljanja ispravki rukopisa/Manuscript corrections submitted on: 20. 06. 2013.
Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje/ Paper accepted for publishing on: 22. 06. 2013.