

## ANALIZA UTICAJA ARMIRANO-BETONSKOG RAMA OD SOPSTVENOG OPTEREĆENJA I SPOLJAŠNJIH SILA

Miloš Z. Petrović<sup>a</sup>, Katarina I. Petković<sup>b</sup>,  
Marina G. Živulović Petrović<sup>c</sup>, Emina Z. Jovanović<sup>d</sup>

<sup>a</sup> Tehnička škola „12. februar“ Niš;

Univerzitet u Nišu, Građevinsko-arhitektonski fakultet  
Doktorske studije

<sup>b</sup> Univerzitet u Nišu, Građevinsko-arhitektonski fakultet,  
Katedra za matematiku, informatiku i fiziku

<sup>c</sup> Gradska uprava grada Niša, Uprava za imovinu  
i inspeksijske poslove, Odsek građevinske inspekcije

<sup>d</sup> Schweizerisches Institut für Betriebsökonomie – SIB Zürich,  
Business Economics, Switzerland

DOI: 10.5937/vojtehg62-4718

OBLAST: građevinarstvo

VRSTA ČLANKA: stručni članak

JEZIK ČLANKA: srpski

### Sažetak:

*U radu je prikazno delovanje sile prednaprezanja na armiranobetonski ram (u daljem tekstu AB ram). Posmatrani sistem je statički neodređen sa dva ukleštenja. Na njega deluje opterećenje prednaprezanje kablom silom  $N_k=600$  kN, kao i sopstveno opterećenje. Visina rama je 6.00 m, a osovinski razmak 20.00 m. Opterećenje od sopstvene težine elemenata je od rigle i stuba. Opterećenje konstrukcije usled prednaprezanja spada u unutrašnja opterećenja, koja zamenjujemo ekvivalentnim opterećenjem koje predstavlja spoljašnje opterećenje. Proračun je izvršen metodom sila i metodom deformacija, kao i u softverskom programu „Tower“. Metodom sila se uklanja ukleštenje i preseku se omogućava obrtanje. Statički neodređena veličina tada je moment ukleštenja. Kod metode deformacije sve statičke i deformacijske veličine izražavaju se putem izvesnog broja međusobno nezavisnih deformacijskih veličina, koje su određene iz uslova ravnoteže sistema. Broj nezavisnih deformacijskih neodređenih veličina predstavlja deformacijsku neodređenost nosača. Sve deformacijski neodređene veličine mogu se svrstati u dve grupe: prvu grupu čine uglovi obrtanja na krajevima kruto vezanih štapova, a drugu grupu komponente pomeranja čvorova.*

*Ključne reči: softverski program „Tower“, metoda sila, metoda deformacija, armirani beton, prednaprezanje, ram, opterećenje, beton.*

## Uvod

**P**od konstrukcijom od prednapregnutog betona podrazumeva se konstrukcija koja je prethodno ili u toku delovanja spoljnog opterećenja podvrgnuta nekoj stalnoj veštački stvorenoj sili (sila prednapreznja), tako da se pod dejstvom te sile i celokupnog spoljnog opterećenja napreznja na zatezanje u betonu izbegnu ili smanje toliko da u betonu ne nastanu naprsline (Antić, et al., 1964). Sistem prednapreznja SPB prvenstveno služi za prednapreznje očvrstlog betona ili za istezanje pojedinačnih užadi pri prednapreznju putem prijanjanja na stazama za proizvodnju prefabrikovanih elemenata. Kao čelik za prednapreznje koriste se užad prečnika 12,5 i 15,2 mm, sastavljena od 7 žica, a za prednapreznje prijanjanjem, pored ovih, i užad manjih prečnika sa 2,3 ili 7 žica. Zatezanje užadi pri prednapreznju vrši se pojedinačno do četiri užeta u kablju, a ukupno od šest pa nadalje. Broj i prečnik užadi u kablju definisani su u okviru sistema u zavisnosti od potreba u projektovanju, uvažavajući i razloge ekonomičnosti. Kablovi se kod naknadnog prednapreznja postavljaju u metalne ili plastične fleksibilne cevi i u slobodne kanale. Osnovni element sistema je kotva koja se sastoji od jednog ili više trodelnih klinova, čaure ili ankerne ploče i podložne ploče. Svako uže se posebno ukotvljava u čauru ili ankernu ploču koja preko podložne ploče prenosi silu na beton. Opremu za prednapreznje čine hidraulična presa višestrukog dejstva i odgovarajuća pumpa. Ova oprema mora biti usklađena sa tipom kabla i kotve. Mutilica sa pumpom za injektiranje služi za zaštitu kablova (<http://www.kbdk.gf.ukim.edu.mk>). Čelici su najčešće primenjivani konstrukcioni materijali. Lako su dostupni, imaju dobre mehaničke karakteristike i jeftini su (Šupić, Đukić, 2012, pp.131-136). Osim u mostogradnji, gde je premošćenje velikih raspona danas nezamislivo bez prednapreznja i kablova velikih sila, primena prednapreznja i u zgradarstvu je veoma zastupljena (Marisavljević, Milojković, 2005, pp.15-35).

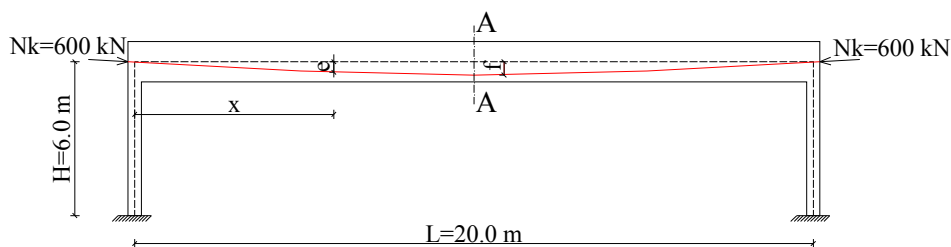
## Geometrijske karakteristike elementa

Posmatrani sistem je armiranobetonski ram (AB ram) sa dva uklještenja. Konstrukcija i opterećenje su simetrični (Curić, et al., 2010, pp.13-16). Na njega deluje opterećenje prednapreznjem kablom silom  $N_k=600$  kN, kao i sopstveno opterećenje. Visina rama je 6,00 m, a osovinski razmak 20,00 m. Opterećenje od sopstvene težine elemenata je od rigle i stuba. Opterećenje konstrukcije usled prednapreznja spada u unutrašnja opterećenja, koja zamenjujemo ekvivalentnim opterećenjem koje predstavlja spoljašnje opterećenje. Zategnut kabl deluje na betonsku konstrukciju:

- koncentrisanim silama na mestu kotvi,

- koncentrisanim skretnim silama u pravcu simetrale ugla na mestu oštrog preloma trase kabla, i
- podeljenim skretnim opterećenjem u pravcu centra krivine na delu kabla u krivini.

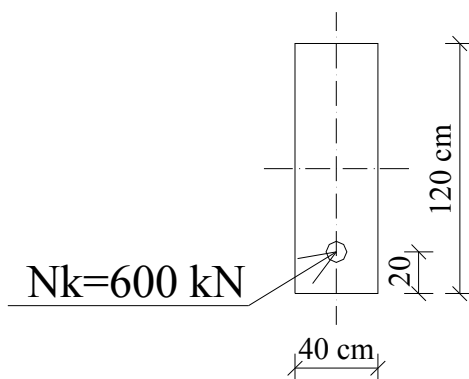
Skretne sile javljaju se duž celog kabla, jer je reč o paraboli, pa ih izražavamo kao sile koje deluju na jedinicu dužine, a ugao skretanja i dužina odsečka su beskonačno mali. Zakrivljenost parabole je promenljiva, ali uvodimo pojednostavljenje tako što parabolu zamenimo kružnicom velikog poluprečnika.



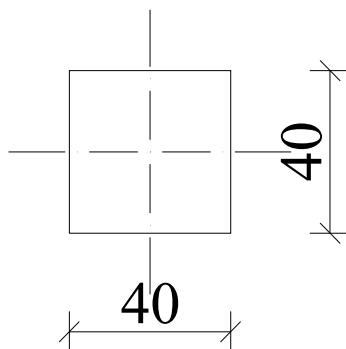
Slika 1 – AB ram  
Figure 1 – Reinforced concrete frame

Ovaj sistem je usvojen bez ekscentriciteta nad stubovima da bi se videlo ponašanje sistema kada nije tipično i optimalno rešenje, kako bi se videla i dokazala njegova funkcionalnost, tj. nefunkcionalnost.

### PRESEK A-A

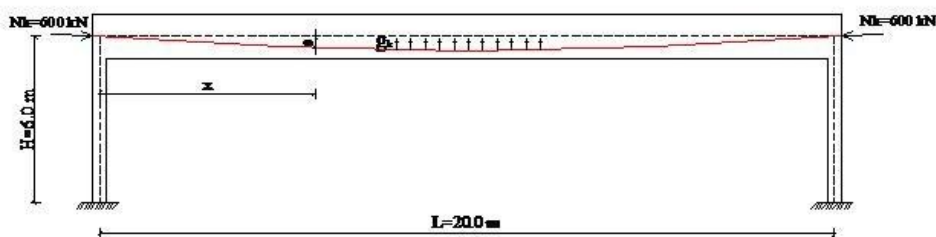


Slika 2 – Presek A-A  
Figure 2 – Section A-A

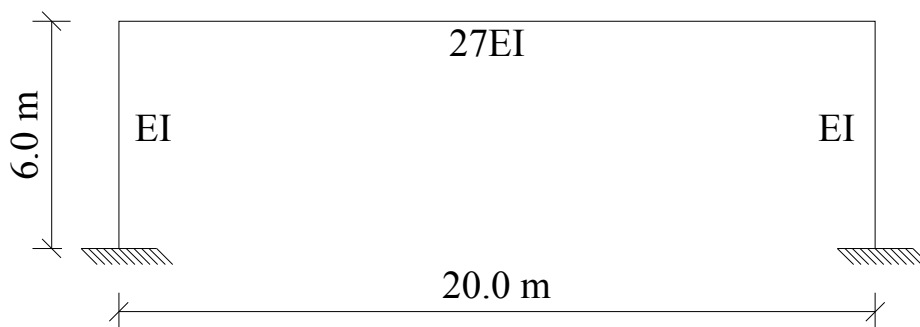


Slika 3 – Usvojen stub kvadratnog poprečnog preseka 40/40 cm  
 Figure 3 – Adopted pillar with a square cross section of 40/40 cm

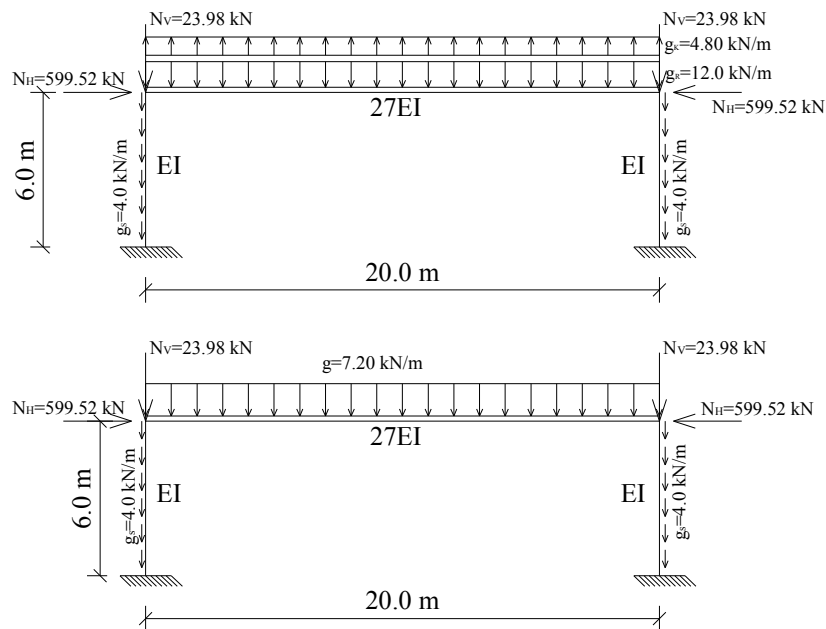
### Šema opterećenja



Slika 4 – Ekvivalentno opterećenje  
 Figure 4 – Equivalent load



Slika 5 – Krutost konstrukcije  
 Figure 5 – Stiffness of the structural elements



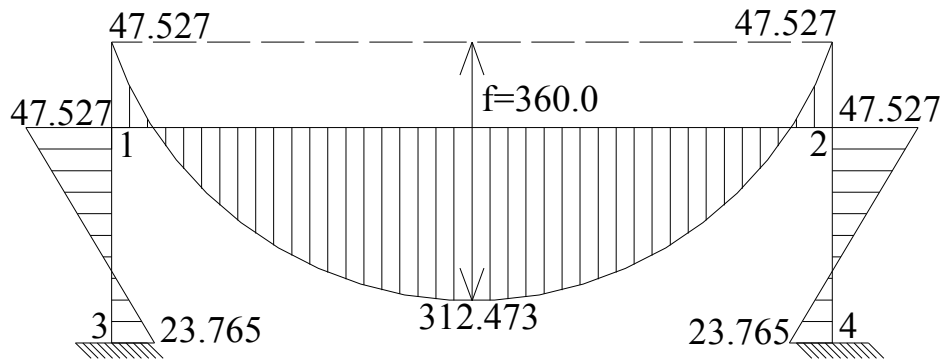
Slika 6 – Šema opterećenja  
Figure 6 – Load scheme

Opterećenje koje se javlja kod sistema je:

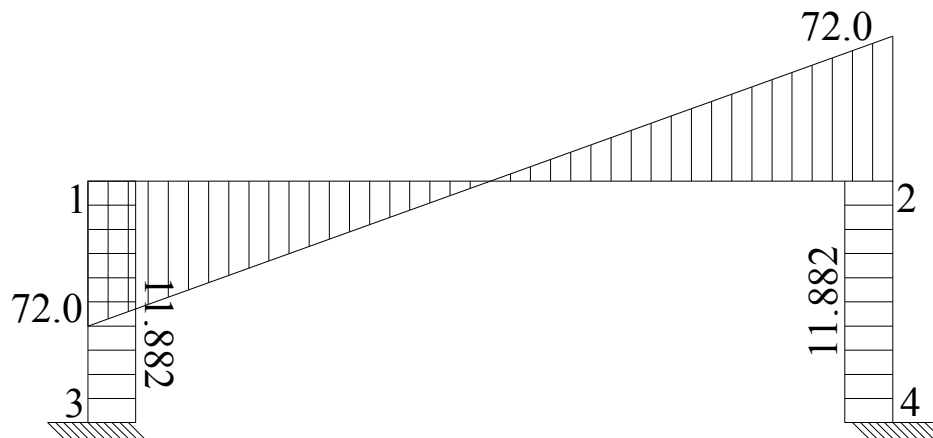
- $g$  – rezultujuće poprečno opterećenje – razlika težine i ekvivalentnog opterećenja,
- $g_k$  – ekvivalentno raspodeljeno opterećenje,
- $g_r$  – sopstvena težina rigle,
- $g_s$  – sopstvena težina stuba,
- $N_k$  – sila u kابلu,
- $N_h$  i  $N_v$  – koncentrisane sile.

## Metoda sila

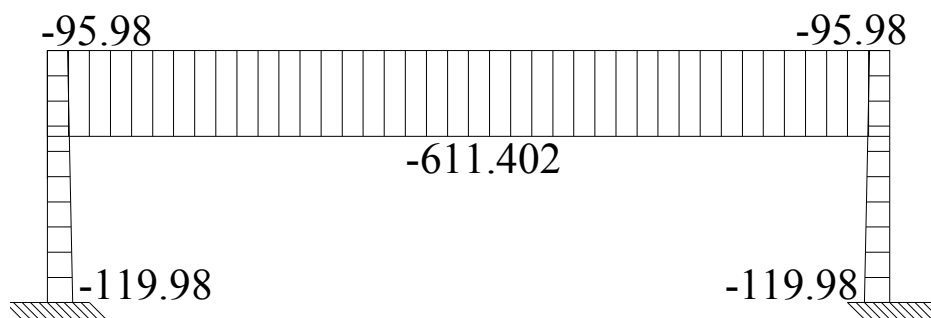
Metodom sila kod nosača dolazi do uklanjanja ukleštenja, čime se preseku kod uklonjenog ukleštenja omogućava obrtanje. Statički neodređena veličina tada je moment ukleštenja. Da bi došlo do uklanjanja veze između nosača i oslonca u koji je nosač uklešten dovoljno je krutu vezu štapa u ukleštenom preseku, ili u njemu beskonačno bliskom preseku, zameniti zglavkastom vezom. Statički neodređena veličina je par momenata – moment savijanja u ukleštenom preseku štapa. Generalisana pomeranja jesu promena odstojanja između preseka štapa i promene ugla između poprečnog preseka štapa s jedne strane zgloba i ukleštenja sa druge strane. Pomeranja u datom nosaču jednaka su nuli (Popović, 2002).



Slika 7 – Dijagram momenata  
Figure 7 – Moment diagram



Slika 8 – Dijagram transverzalnih sila  
Figure 8 – Diagram of shear force



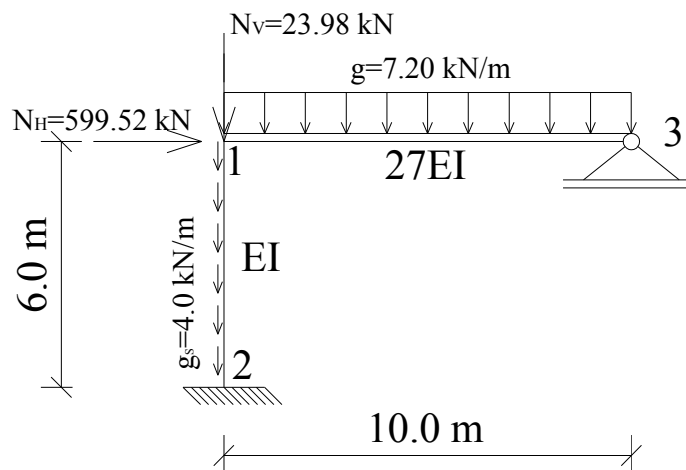
Slika 9 – Dijagram normalnih sila  
Figure 9 – Diagram of axial force

## Metoda deformacija

Metoda deformacije sastoji se u tome da se sve statičke i deformacijske veličine izraze putem izvesnog broja međusobno nezavisnih deformacijskih veličina. Postoji konvencija o znaku:

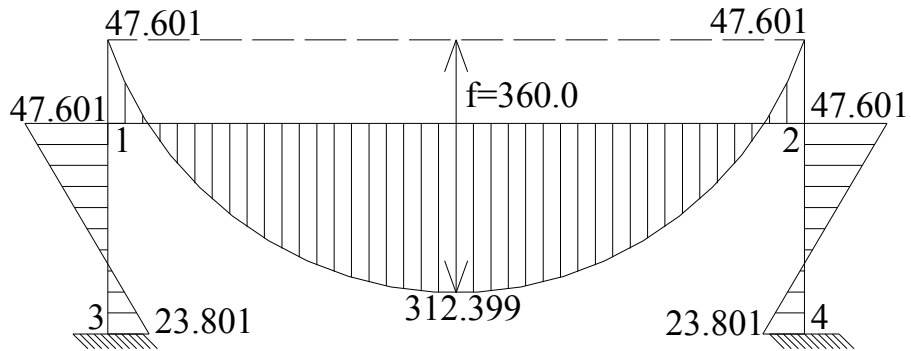
- normalna sila je pozitivna kada zateže štap,
- transverzalna sila je pozitivna kada obrće štap u odnosu na suprotni kraj štapa u smeru kazaljki na satu i
- momenat na kraju štapa je pozitivan kada je u smeru kazaljke na satu. Shodno tome, momenat koji deluje na čvor pozitivan je u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu.

Dok je konvencija o znacima sila  $N$  i  $T$  na krajevima štapova u skladu sa konvencijom o znaku  $N$  i  $T$  sile u teoriji linijskih nosača, konvencija o znaku momenta nije u skladu sa opštom konvencijom o znaku momenata savijanja i odnosi se samo na momente na krajevima štapa (Popović, 2002).

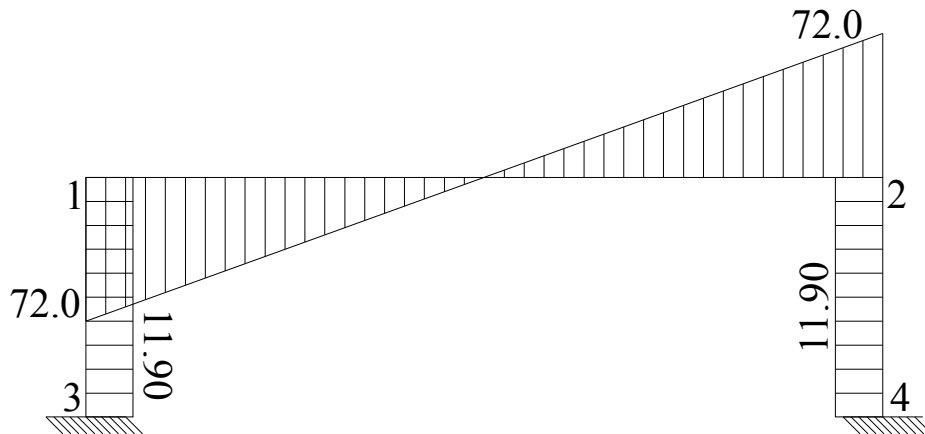


Slika 10 – Simetrija nosača  
Figure 10 – Frame system using symmetry

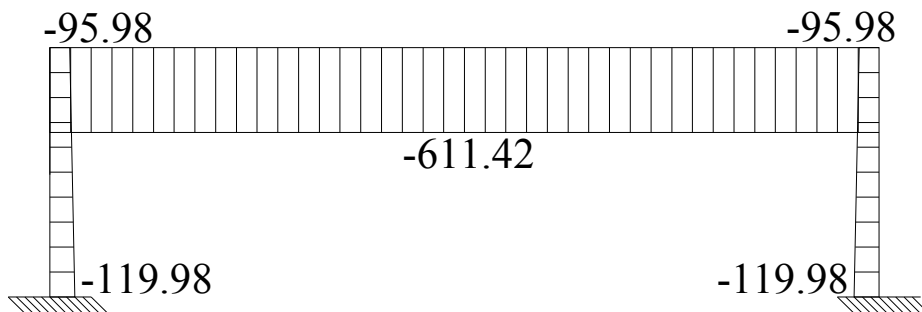
Smatra se da je nosač simetričan ako ima osu simetrije, što je slučaj kod nosača koji se razmatraju u ovom radu. Posle presecanja nosača osom simetrije, umesto celog nosača posmatra se njegova jedna polovina. Na osi simetrije ubacuje se odgovarajući oslonac koji zadovoljava uslove oslanjanja po silama i po pomeranjima. Uticaji u simetričnim presecima odbačenog dela nosača po vrednosti su isti sa uticajem u posmatranom delu nosača, ali imaju suprotan znak. Za tačke na osi simetrije  $T=0$ , pa se za transverzalne sile izabrane kao statički nepoznate unapred zna da su nule (Popović, 2002).



Slika 11 – Dijagram momenata  
Figure 11 – Moment diagram



Slika 12 – Dijagram transverzalnih sila  
Figure 12 – Diagram of shear force



Slika 13 – Dijagram normalnih sila  
Figure 13 – Diagram of axial force

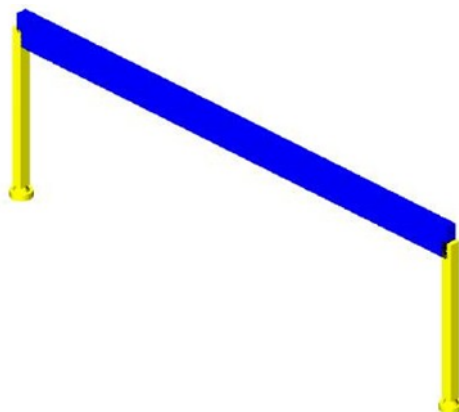


## Softverski program „Tower 7”

„Tower 7” je program za statičku i dinamičku analizu konstrukcija i dimenzioniranje betonskih elemenata, kao i za sveobuhvatnu analizu uticaja u ravanskim i prostornim konstrukcijama. Obezbeđuje alate koji su automatizovani, integrisani, sveobuhvatni i intuitivni, a omogućava povećanje brzine i kvaliteta projektovanja, kao i proveru rezultata dobijenu standardnim metodama. Verzija 7 je visokoprofesionalan alat visokih performansi. (<http://www.radimpex.rs/index.php?lang=sr>)

Osnovni podaci o modelu		
Datoteka:	AB RAM.twp	
Datum proračuna:	23.8.2013	
Nacin proračuna:	2D model (Xp, Zp, Yr)	
<input checked="" type="checkbox"/> Teorija I-og reda	<input type="checkbox"/> Modalna analiza	<input type="checkbox"/> Stabilnost
<input type="checkbox"/> Teorija II-og reda	<input type="checkbox"/> Seizmicki proračun	<input type="checkbox"/> Faze gradjenja
<input type="checkbox"/> Nelinearan proračun		
<b>Velicina modela</b>		
Broj čvorova:	4	
Broj pločastih elemenata:	0	
Broj grečnih elemenata:	3	
Broj grančnih elemenata:	12	
Broj osnovnih slučajeva opterećenja:	2	
Broj kombinacija opterećenja:	1	
<b>Jedinice mera</b>		
Duzina:	m [cm,mm]	
Sila:	kN	
Temperatura:	Celsius	

Slika 14 – Osnovni – ulazni podaci  
Figure 14 – Basic input data



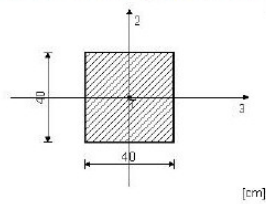
Slika 15 – Izometrija  
Figure 15 – Isometry

**Tabela materijala**

No	Naziv materijala	E[N/m <sup>2</sup> ]	$\mu$	$\nu$ [N/m <sup>3</sup> ]	$\alpha$ [1/C]	$E_m$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\mu_m$
1	Betoni MB 30	3.150e+7	0.20	25.00	1.000e-5	3.150e+7	0.20

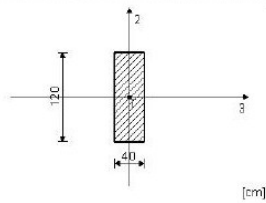
**Setovi greda**

Set: 1 Presek b/d=40/40, Fikтивna ekscentricnost



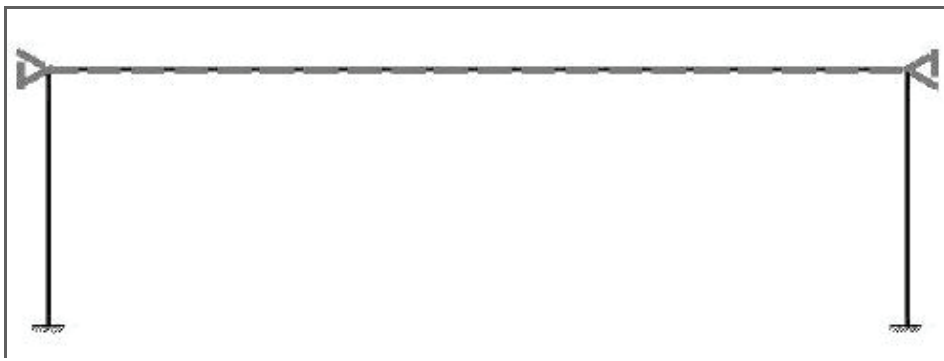
Mat.	A1	A2	A3	I1	I2	I3
1 - Betoni MB 30	1.600e-1	1.333e-1	1.333e-1	3.605e-3	2.133e-3	2.133e-3

Set: 2 Presek b/d=40/120, Fikтивna ekscentricnost

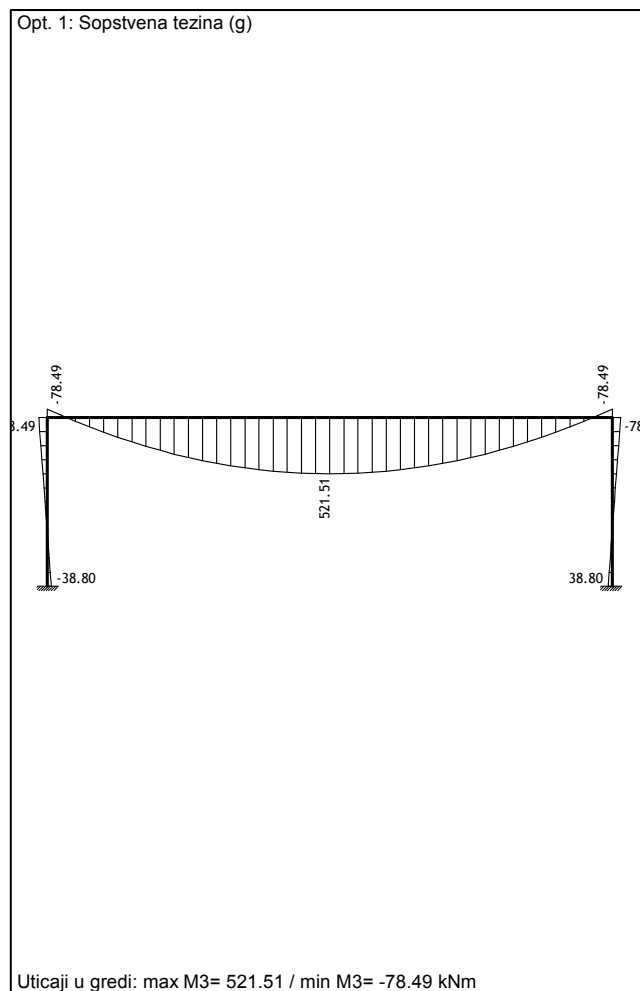


Mat.	A1	A2	A3	I1	I2	I3
1 - Betoni MB 30	4.800e-1	4.000e-1	4.000e-1	2.023e-2	6.400e-3	5.760e-2

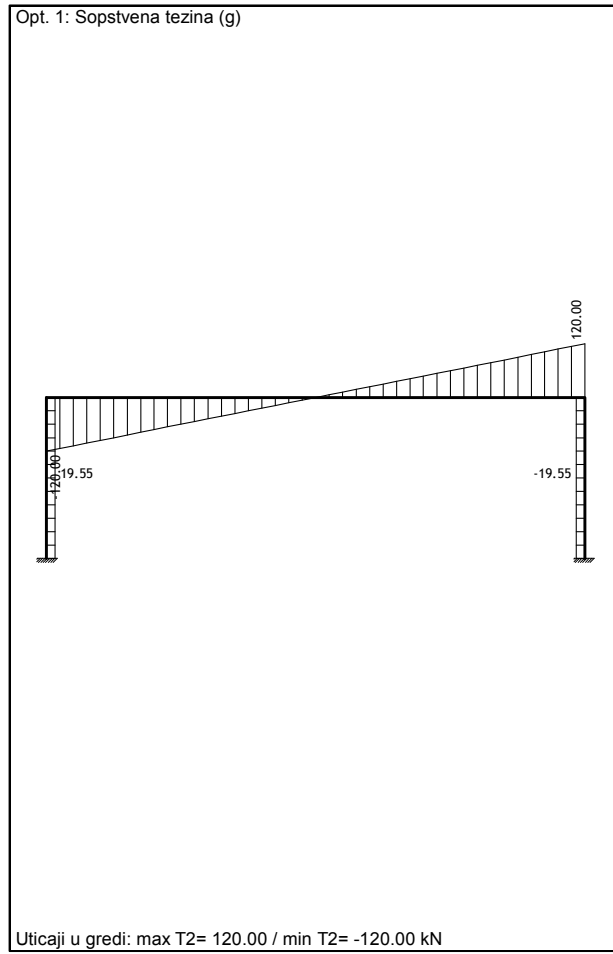
Slika 15 – Tabela materijala i setovi greda  
Figure 15 – Table of materials and sets of beams



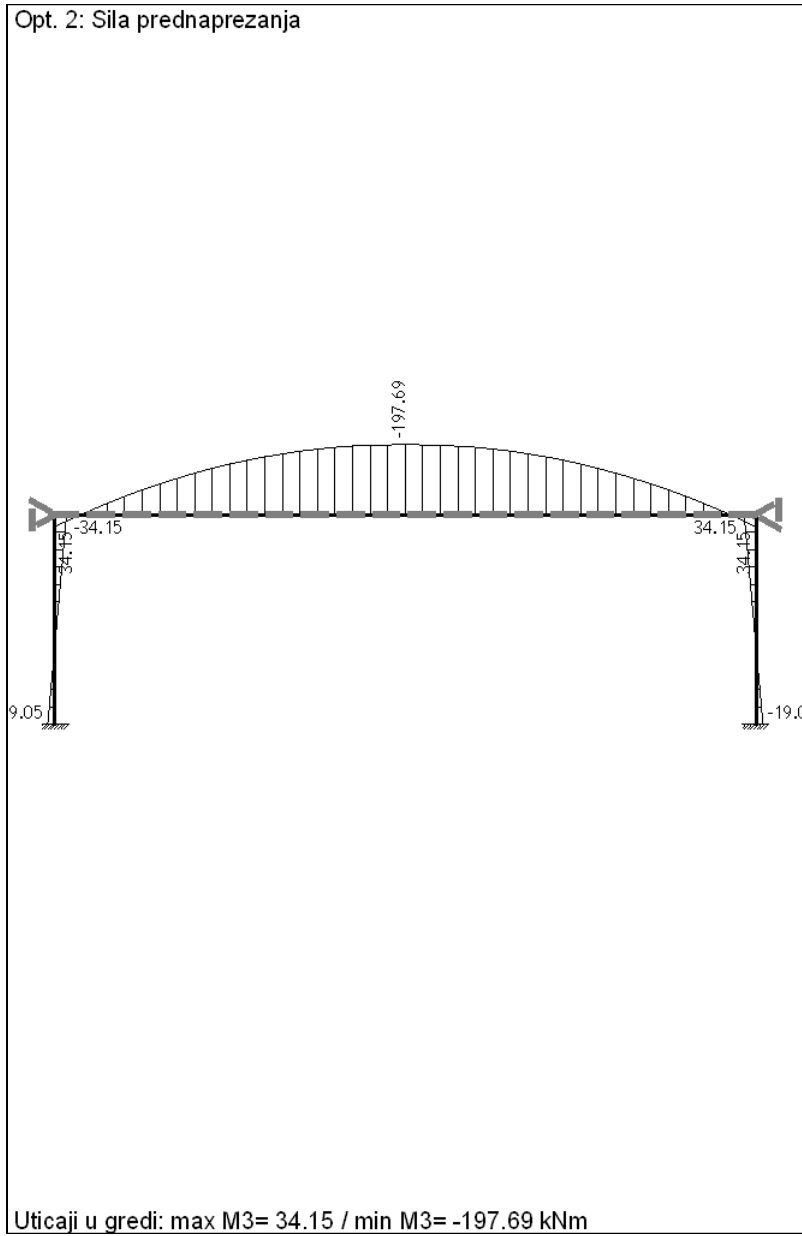
Slika 16 – Ulazni podaci  
Figure 16 – Input data



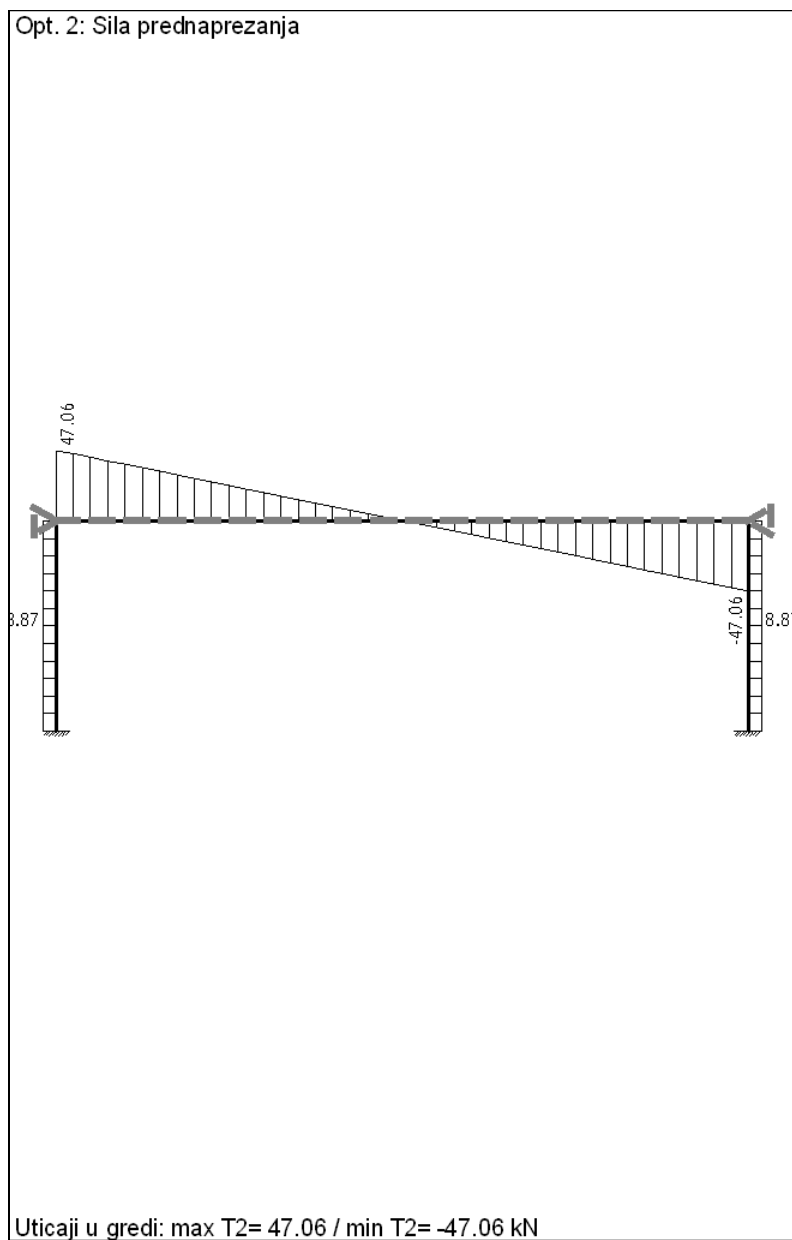
Slika 17 – Dijagram momenata  
Figure 17 – Moment diagram



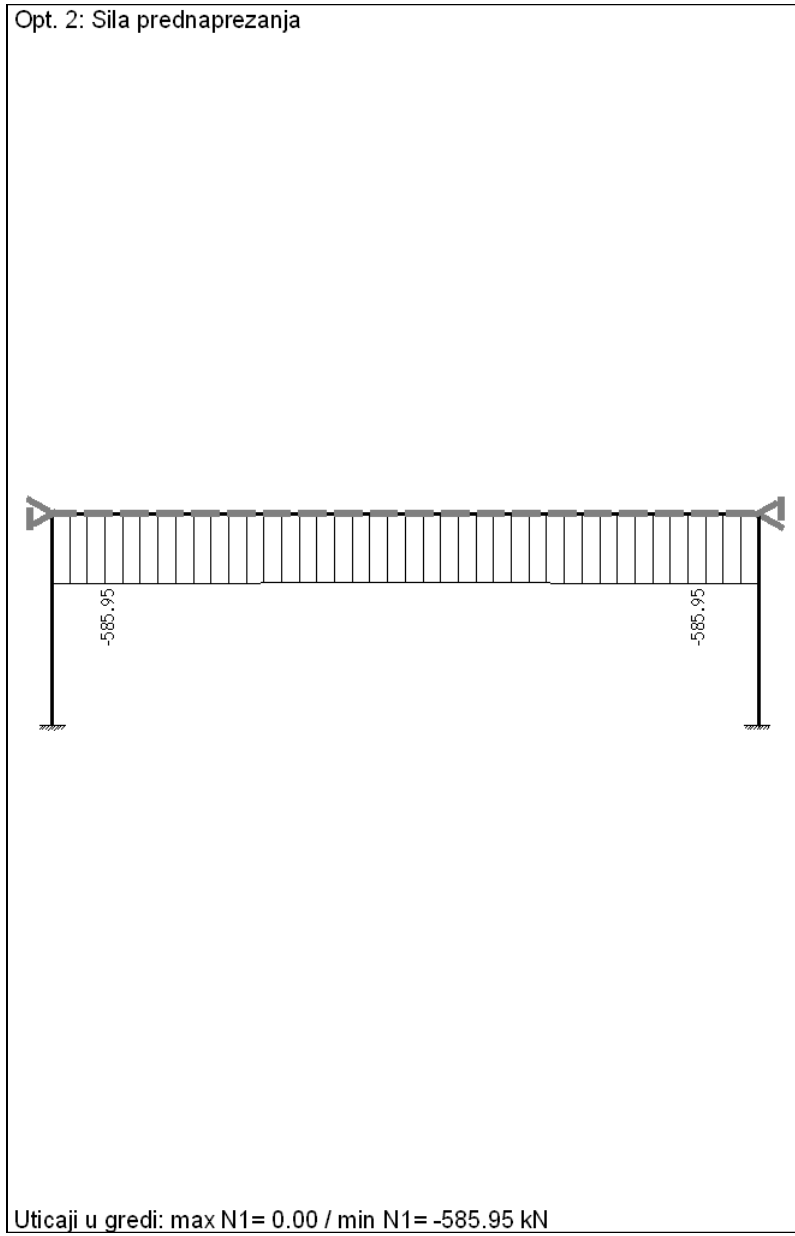
Slika 18 – Dijagram transverzalnih sila  
 Figure 18 – Diagram of shear force



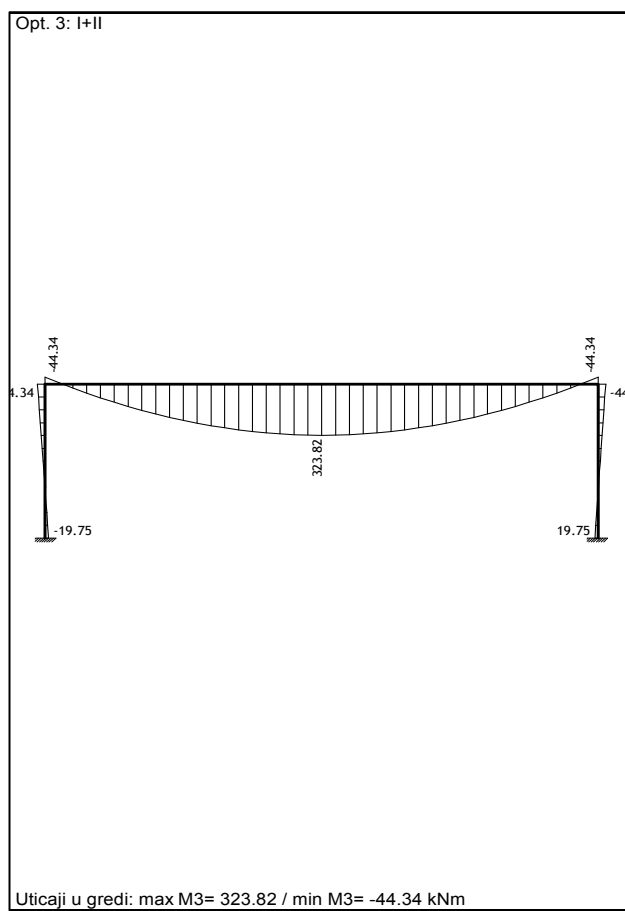
Slika 19 – Dijagram momenata  
Figure 19 – Moment diagram



Slika 20 – Dijagram transverzalnih sila  
 Figure 20 – Diagram of shear force

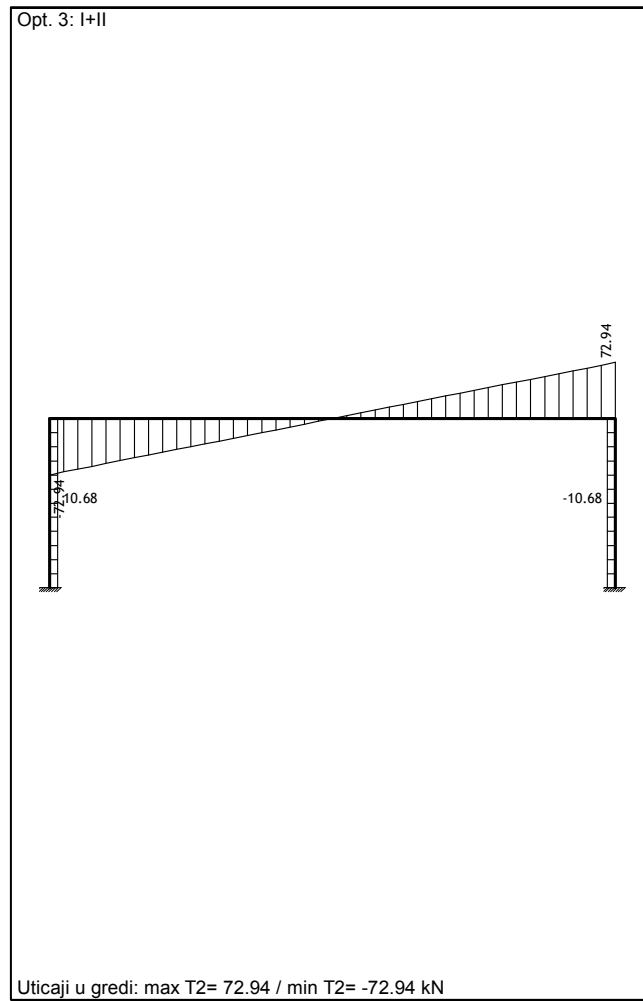


Slika 21 – Dijagram normalnih sila  
Figure 21 – Diagram of axial force

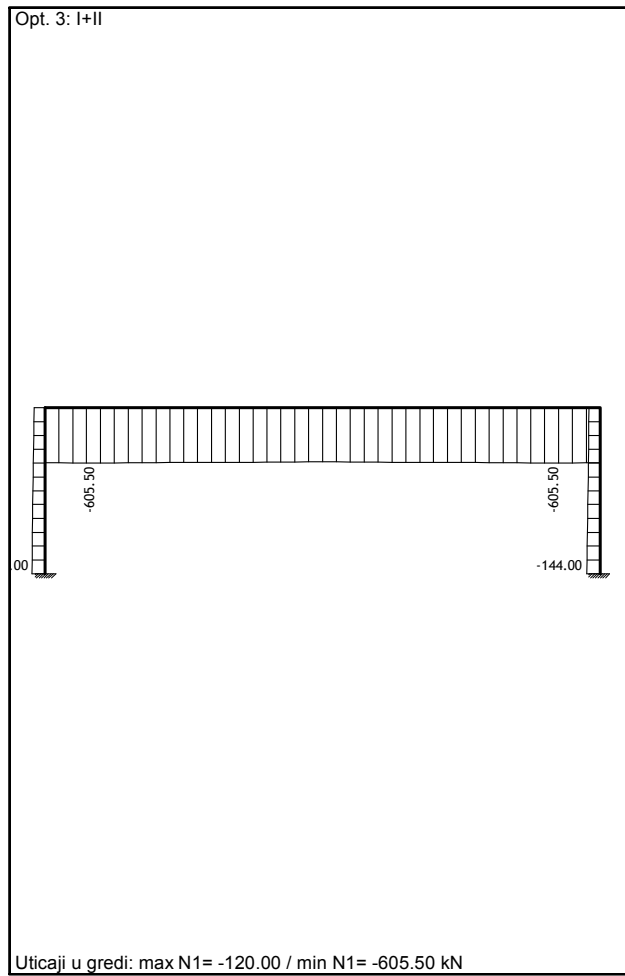


Slika 22 – Dijagram momenata  
Figure 22 – Moment diagram





Slika 23 – Dijagram transverzalnih sila  
Figure 23 – Diagram of shear force



Slika 24 – Dijagram normalnih sila  
 Figure 24 – Diagram of axial force

## Analiza dobijenih rezultata

Tabela 1 – Tabelarni prikaz dobijenih rezultata  
Table 1 – Tabulation of the results

REZULTATI (RESULTS)	M <sub>max</sub> [kNm]	M <sub>min</sub> [kNm]	T <sub>max</sub> [kN]	T <sub>min</sub> [kN]	N <sub>max</sub> [kN]	N <sub>min</sub> [kN]
METODA SILA (FORCE METHOD)	312.473	-47.527	72.00	-72.00	-95.98	-611.402
METODA DEFORMACIJA (DIRECT STIFFNESS METHOD)	312.399	-47.601	72.00	-72.00	-95.98	-611.42
“TOWER”	323.82	-44.34	72.94	-72.94	-120.00	-605.50

Iz dobijenih rezultata, kroz tri različite metode proračuna dobijaju se približno isti rezultati, sa zanemarljivom razlikom.

## Zaključak

Prema Pravilniku za beton i armirani beton (PBAB), švajcarskim propisima (SIA) i DIN normama primjenjuje se kombinacija metoda provjere (Tomičić, 2007, pp.879-887), kako bi se izvršila provjera dobijenih rezultata. Projektovanje armiranobetonskih ramova obuhvata dva aspekta – normativni i proračunski (Milašinović, Goleš, 2013, pp.411-422). Prethodno napregnutne konstrukcije armirane su minimalnim procentom armiranja kada je efekat prethodnog naprezanja dovoljan za prihvatanje svih opterećenja. Efekti usvojenog prethodnog naprezanja za slučaj analiziran u radu nisu dovoljni za postizanje potrebnih efekata. Kako bi sistem mogao da obezbedi potrebne efekte treba uzeti u obzir dobro projektovanu veličinu prethodnog naprezanja. Prethodno naprezanje predstavljeno u primeru nije dovoljno za prihvatiranje razmatranog opterećenja.

Prikazane metode proračuna upravo i dokazuju prethodno izneti zaključak. Metod proračuna metodom sila i metodom deformacija ostaje u senci savremenog projektovanja i razvoja savremenih softvera. U širokoj primeni je softverski program „Tower” koji bez greške pokazuje tačne i precizne rezultate. Radi provjere i sigurnosti projektanti treba da uzmu u obzir proračun metodom sila i metodom deformacija kao kontrolu dobijenih rezultata softverskim programom „Tower”. Softverski program „Tower 7”, pored osnovnih mogućnosti, pruža i grafički interfejs i obradu rezultata proračuna (<http://www.plan-b.hr>).

## Literatura

Antić, D., Božičković, V., Divjak, V., Erić, H., Furundžić, B., Ginder, E., . . . Zrnić, P. 1964. *Tehničar II - Građevinski priručnik*. Beograd: Građevinska knjiga.

Curić, E., Drenić, D., & Vacev, T. 2010. Uticaj krutosti podloge na distribuciju naponskog stanja kod prednapregnutog betonskog železničkog praga tip B70. *Nauka + Praksa*, 13, pp.13-16.

Milašinović, D., & Goleš, D. 2013. Stability analysis of reinforced concrete prismatic shell structures. *Građevinar*, 65(5), pp.411-422.

Marisavljević, V., & Milojković, M. 2005. Prednaprežanje u građevinskoj praksi. *Izgradnja*, 59(1-2), pp.15-34.

Popović, B. 2002. *Statika konstrukcija 2*. Niš: Univerzitet u Nišu, Građevinsko-arhitektonski fakultet.

Šupić, O., & Đukić, B. 2012. Analiza uticaja sadržaja Si u čeliku, temperature rastopa cinka i vremena uranjanja na debljinu prevlake cinka. *Zaštita materijala*, 53(2), pp.131-136.

Tomičić, I. 2007. Analysis of reinforced-concrete beams subjected to transverse force. *Građevinar*, 59(10), pp.879-887.

Retrieved from <http://www.kbdk.gf.ukim.edu.mk>

Retrieved from <http://www.radimpex.rs/index.php?lang=sr>

Retrieved from <http://www.plan-b.hr>

## STRUCTURAL ANALYSIS OF A PRESTRESSED CONCRETE

FIELD: civil engineering

ARTICLE TYPE: Professional Paper

ARTICLE LANGUAGE: Serbian

### Summary:

*The effects of prestressing forces on a reinforced concrete frame are shown in the paper. The structure is a statically indeterminate frame with two fixed supports. The load is due to tendon prestressing with  $N_k = 600$  kN and due to self-weight of columns and beam. The columns height is 6.00 m and the beam span is 20.00 m. Effects of prestressing can be replaced by an external equivalent load. Calculations are performed by the force method, by the direct stiffness method and using the "Tower" software. The rotational restraints are released at fixed supports and the restraint moments are calculated by the force method. The direct stiffness method uses the members' stiffness relations for computing member forces and displacements in structures. The unknown nodal rotations and translations are obtained by solving a system of equations.*

*The considered tendon profile is without eccentricity above the columns.*

*“Tower 7” is software for static and dynamic structural analysis and for design of concrete elements. It enables overall structural analysis of plane and three-dimensional structures. Automated, integrated tools allow fast and reliable design or the verification of the results obtained by standard methods. Version 7 is a professional tool with high performance.*

*Three different calculation methods have given close results, with minor differences.*

*Key words: software “Tower”; force method; direct stiffness method; reinforced concrete; prestressing; frames; load; concrete.*

Datum prijema članka/Paper received on: 23. 10. 2013.

Datum dostavljanja ispravki rukopisa/Manuscript corrections submitted on: 28. 02. 2014.

Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje/ Paper accepted for publishing on: 02. 03. 2014.