УДК 004.67; 681.518.2

# ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ В МЕТОДЕ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

# MEMBERSHIP FUNCTIONS FOR ANALYTIC HIERARCHY PROCESS

***©Вотякова Е. М.***
*Костромской государственный технологический университет*
*г. Кострома, Россия*
*elzvtk@gmail.com*
***©Votyakova Ye.***
*Kostroma State University of Technology,*
*Kostroma, Russia*
*elzvtk@gmail.com*
***©Гнатюк Б. А.***
*Костромской государственный технологический университет,*
*г. Кострома, Россия*
*gnatyukb@gmail.com*
***©Gnatyuk B.***
*Kostroma State University of Technology,*
*Kostroma, Russia*
*gnatyukb@gmail.com*

*Аннотация.* Предложено использовать в методе анализа иерархий функции принадлежности, с помощью которых в относительных единицах экспертно определяется значимость количественных критериев. В статье рассмотрена возможность использования в качестве функции принадлежности обобщенной гауссовской функции, выявлены достоинства и недостатки данной функции для применения в методе анализа иерархий. Предложена оригинальная функция, которая отличается большей универсальностью и расширенными возможностями получать требуемый с точки зрения экспертов вид кривой при помощи варьируемых коэффициентов. Показано влияние варьируемых параметров на форму, центр симметрии и диапазон используемых значений функции. Проанализированы перспективы использования рассматриваемых функций в методе анализа иерархий.

*Abstract.* This paper presents the idea of using membership functions for analytic hierarchy process (AHP). It helps experts to determine “weights” of quantitative criteria in relative units. Gaussian function is examined as a membership function for this method, its advantages and disadvantages for AHP are educed. More universal original function is suggested. Changing variable parameters, decision makers can reach appropriate shape of the curve. Influence of parameters on the curve shape, centre of symmetry and range of values is investigated. Perspectives of using those functions in analytic hierarchy process are analyzed.

*Ключевые слова:* метод анализа иерархий, количественный критерий, значимость критерия, функция принадлежности, гауссовская функция, варьируемые параметры.

*Keywords:* analytic hierarchy process, quantitative criterium, “weight” of criteria, membership function, Gaussian functions, variable parameters.

В настоящее время в практике широко применяются методы экспертных оценок. Они незаменимы для решения сложных многокритериальных задач, требующих привлечения знаний, интуиции и опыта квалифицированных специалистов — экспертов. Одним из таких методов является метод анализа иерархий (МАИ). Данный метод удобен для решения задач многокритериального выбора [1, 2]. Основой этого метода является построение иерархий качественных и количественных показателей (критериев), по которым сравниваются альтернативные варианты возможных решений. Путем попарного сравнения критериев, принадлежащих одинаковым слоям, определяются весовые коэффициенты этих критериев, а по каждому критерию нижнего уровня попарно оцениваются рассматриваемые альтернативы между собой для определения коэффициентов значимости альтернатив по этим критериям. На последнем этапе осуществляется свертка иерархий оценок по каждой альтернативе для получения результирующих весовых коэффициентов значимости сравниваемых альтернатив.

Для определения весовых коэффициентов количественных показателей путем сравнения с качественными характеристиками необходимо перейти к относительным единицам. В тех случаях, когда значимость количественного показателя при выборе альтернативного решения возрастает (например, время наработки на отказ одного из выбираемых технических устройств), то за базовую величину принимается максимальное значение этого показателя. Следовательно, выражение для вычисления такого показателя в относительных единицах будет иметь следующий вид:

$$f_{max}(x) = \frac{x}{x_{max}} \qquad (1)$$

Если значимость количественного показателя при выборе альтернативного решения убывает (например, стоимость изделия), то выражение для вычисления такого показателя в относительных единицах будет иметь другой вид:

$$f_{max}(x) = \frac{x_{max} - x}{x_{max}} \qquad (2)$$

Выражения (1) и (2) представляют соответственно возрастающие и убывающие линейные графики. В том случае, когда максимальное значение находится в середине диапазона изменения показателя (критерия), график будет иметь треугольный вид: в диапазоне от $x_{min}$ до $x_{max}$ он определяется выражением (1), а при $x > x_{max}$ выражением (2).

Однако, такие линейные зависимости искаженно отражают значимость того или иного показателя в относительных единицах. Например, при выборе только по стоимости альтернативных видов изделий одного и того же функционального назначения экспертно определено, что при цене 20 тыс. руб. и менее изделие считается дешевым (цена более чем приемлема), а при цене 100 и более тыс. руб. — альтернатива отвергается, как крайне дорогая. В диапазоне от 20 до 100 тыс. рублей при выборе необходимо учитывать дополнительные, как правило, качественные характеристики сравниваемых вариантов. Следовательно, функция (1) должна иметь нелинейный S — образный вид. По существу эта функция, используя терминологию теории нечетких множеств [3], будет функцией принадлежности цены выбираемого изделия к множеству дорогих или дешевых изделий.

Определение таких функций принадлежности является самостоятельной задачей, которую должны решать эксперты при проведении процедуры получения весовых коэффициентов показателей или критериев. В связи с этим возникает задача определения наиболее универсальных видов функций принадлежности, которым с помощью варьируемых коэффициентов эксперты могут придавать требуемый с их точки зрения вид.

Наиболее универсальной функцией принадлежности является функция Гаусса, параметры которой могут изменяться исходя из мнения эксперта [4].

Обобщенная гауссовская функция определяется формулой:

$$y(x) = e^{-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^{2b}} \tag{3}$$

В ней в качестве варьируемых могут выступать параметры c, b и и σ. Рассмотрим влияние значений этих параметров на форму графика функции.

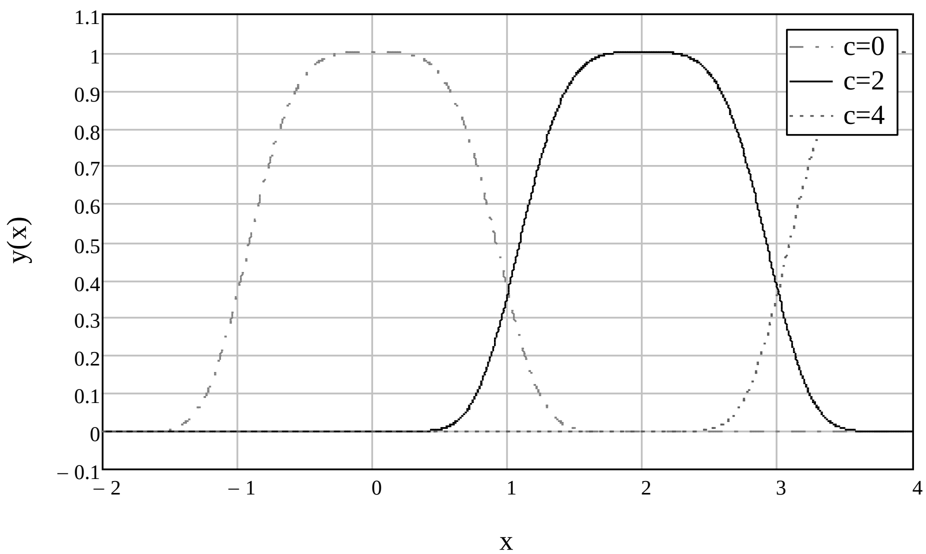


Рисунок 1. Зависимость формы гауссовской функции от параметра c (b=2, σ =1).

На Рисунке 1 представлен график обобщенной гауссовской функции для различных значений параметра $c$. При любом значении параметров $b$ и $\sigma$, центр симметрии функции будет смещен относительно нуля на расстояние, равное $c$.

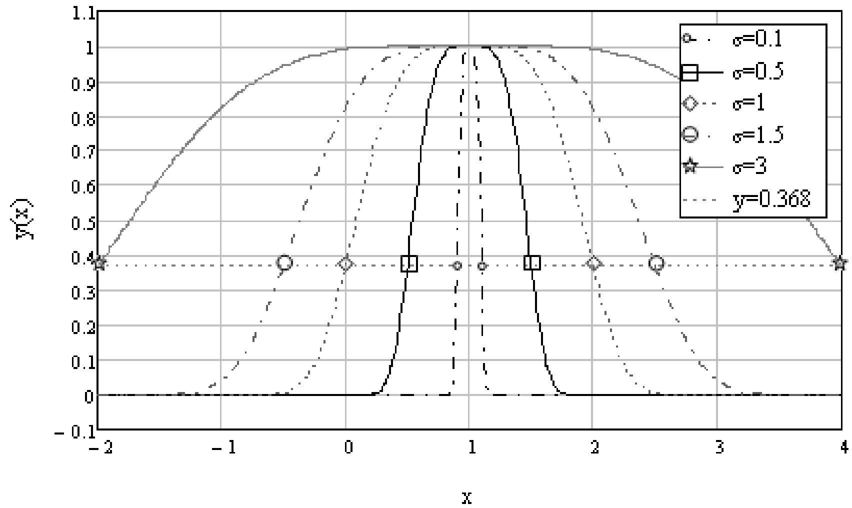


Рисунок 2. Зависимость формы гауссовской функции от параметра $\sigma$ ($c$ = 1, $b$ = 1).

На Рисунке 2 представлен график обобщенной гауссовской функции для различных значений параметра $\sigma$. При $x = c \pm \sigma$, значение функции $y(x) = e^{-1}$, т.е. при любом значении $b$, точка, в которой функция принимает значение $e^{-1}$ = *0,368*, удалена от центра симметрии функции на расстояние, равное $\sigma$.

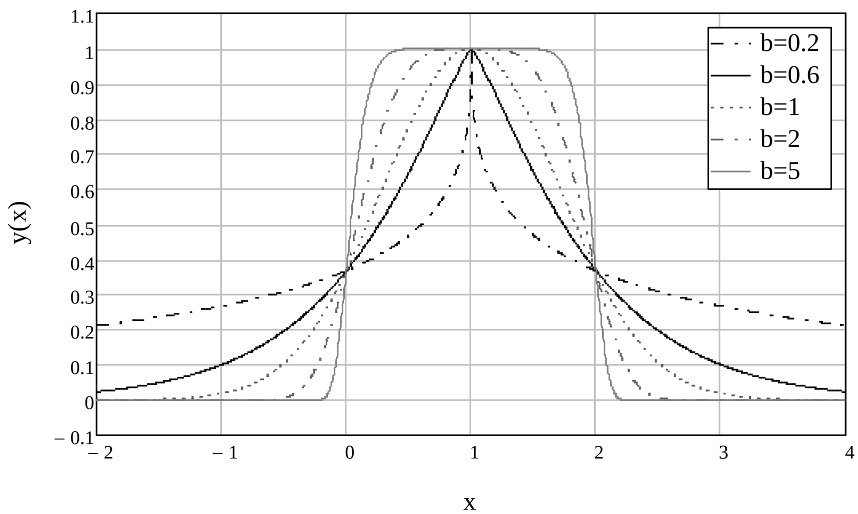


Рисунок 3. Зависимость формы гауссовской функции от параметра $b$ ($c$ = 1, $\sigma$ = 1).

На Рисунке 3 представлен график обобщенной гауссовской функции для различных значений параметра $b$. Из графика видно, что параметр $b$ влияет на изменение крутизны изгиба функции $y(x)$, проходящей через точку $y(c) = 1$ (центр симметрии), а также точки $y(c + \sigma) = e^{-1}$.

На практике может потребоваться, чтобы координата точки (по оси ординат), удаленной от центра симметрии функции на расстояние, равное $\sigma$ варьировались в пределе от 0 до 1 и при этом задавалась отдельным параметром, не влияющим на остальные характеристики графика. В связи с этим предлагается использовать новую функцию вида:

$$g(x) = e^{-h\cdot(x-c)^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(p)}{-h}\right)}{\ln(m)}}} \quad (4)$$

Параметр c определяет центр симметрии функции g(x), т.е. *g(x) = 1* (Рисунок 4).

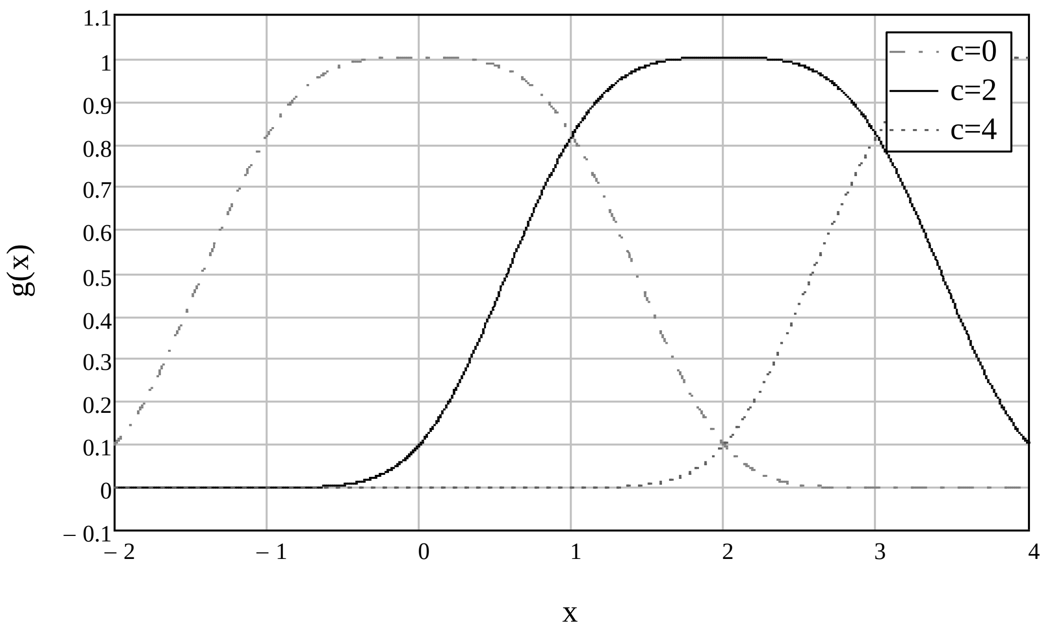


Рисунок 4. Зависимость формы функции *g*(*x*) от параметра *c* (*p* = 0,1 *m*, *h* = 0,2).

Параметры *m* и *p* определяют координаты точек, через которые проходит график функции *g(x)*, а именно *g(m±c) = p* (Рисунок 5). Т. е. параметр *m* показывает, на сколько точки, в которых функция *g(x)* принимает значение *p*, удалены от центра симметрии, заданного параметром *c*.

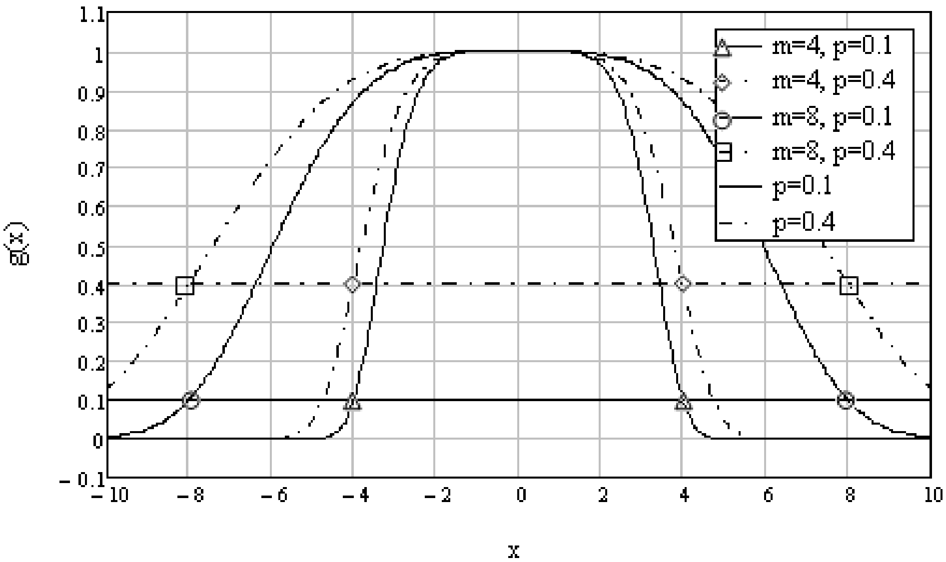


Рисунок 5. Зависимость формы функции $g(x)$ от параметров $m$ и $p$ ( $c$ = 0, $h$ = 0,0005).

Параметром $h$ настраивается крутизна изгиба функции. Наряду с этим, при любом значении параметра $h$ график функции $g(x)$ проходит через точки A, B, C: A(m + c; p), B(m – c; p), C(c; 1) (Рисунок 6).

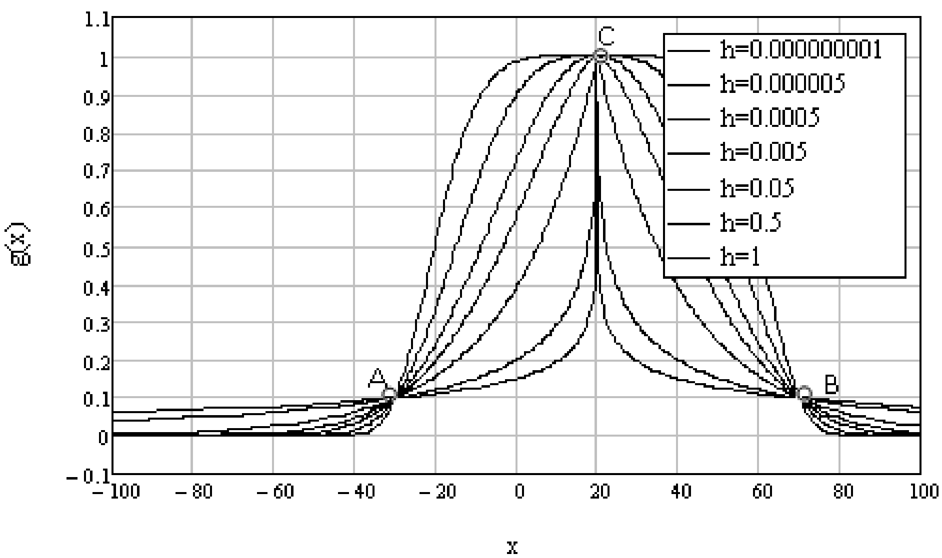


Рисунок 6. Зависимость формы функции $g(x)$ от параметра h ( $c$ = 20, $m$ = 50, $p$ = 0,1).

Для решения практических задач удобнее задавать не $m$, как расстояние от центра симметрии до точки с координатой $p$, а саму координату $k$ одной из точек с этим значением (A или B).

Также для упрощения регулирования изгиба функции введен параметр $a$ так, чтобы $0{,}1^a$ = h. Тогда для задания функций можно использовать более удобные для восприятия цифры. Так, в Таблице показаны значения параметра $h$ для функций, представленных на Рисунке 6 и соответствующие им значения параметра $a$.

Таблица.

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ *a* И *h*

| *H* | *a* |
|---|---|
| 0,000000001 | 9 |
| 0,000005 | 5,3 |
| 0,0005 | 3,3 |
| 0,005 | 2,3 |
| 0,05 | 1,3 |
| 0,5 | 0,3 |
| 1 | 0 |

Итоговая функция принимает вид:

$$f(x) = e^{-0.1^{a}\cdot(x-c)^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(p)}{-0.1^{a}}\right)}{\ln(|k-c|)}}} \qquad (5)$$

Из полученной функции путем несложных математических преобразований можно получить необходимые в МАИ убывающую (6) и возрастающую (7) S–образные функции, как модификации функции (5).

$$f(x) = e^{-0.1^{a}\cdot(x-c)^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(p)}{-0.1^{a}}\right)}{\ln(|k-c|)}}} \; при\; x \in [c; +\infty) \qquad (6)$$

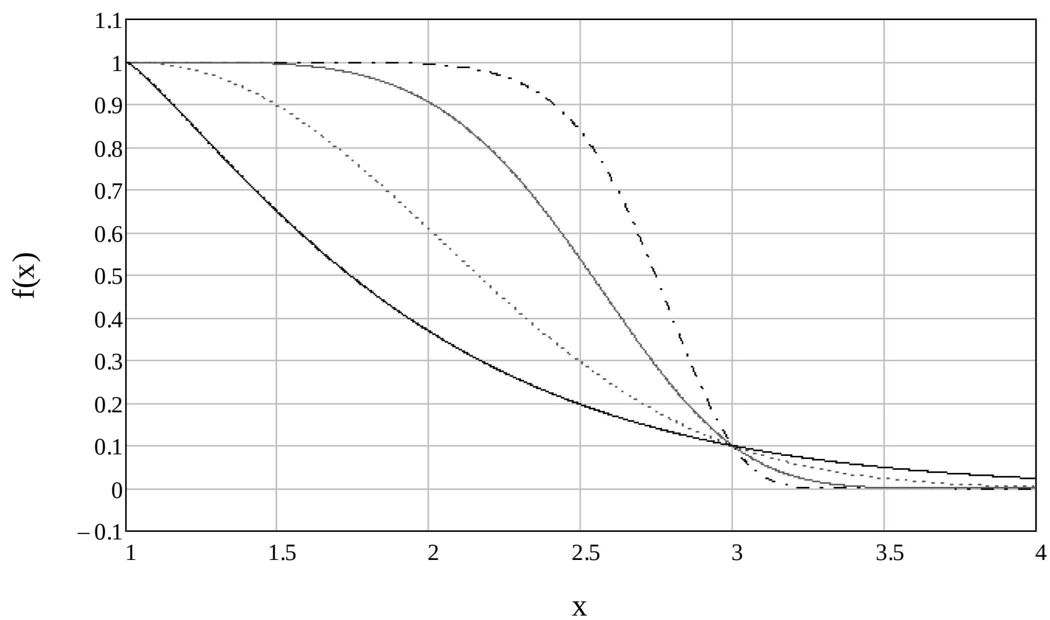


Рисунок 7. Вид функции (6) при различных параметрах *a (c = 1, k = 3, p = 0,1).*

$$f(x) = 1 - e^{-0.1^{a}\cdot(x-c)^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(1-p)}{-0.1^{a}}\right)}{\ln(|k-c|)}}} \text{ при } \textit{при } x \in [c; +\infty) \tag{7}$$

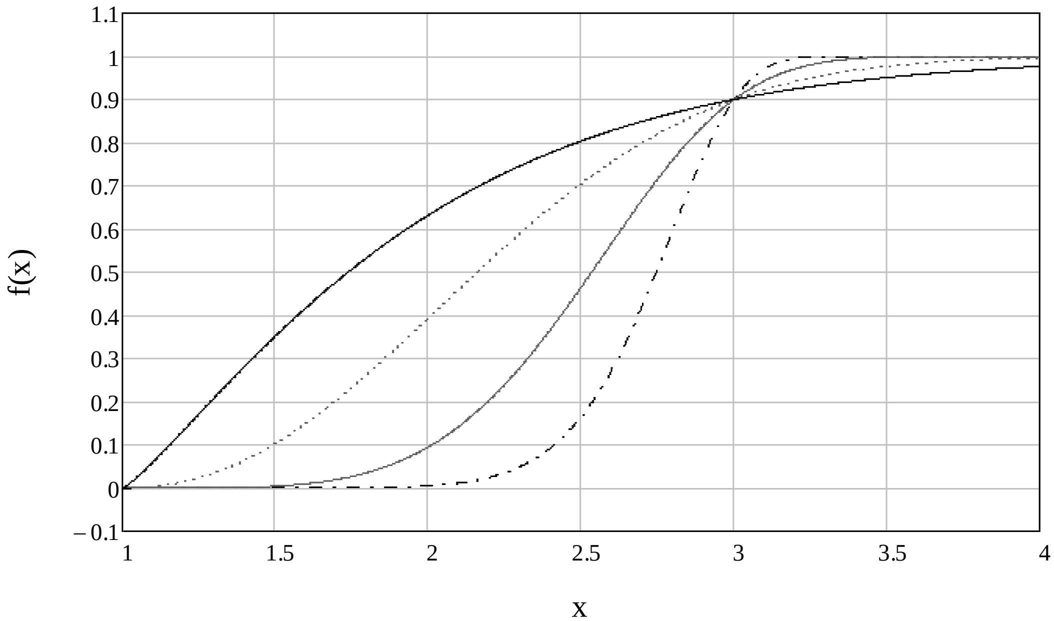


Рисунок 8. Вид функции (7) при различных параметрах *a (c = 1, k = 3, p = 0,9).*

Основным недостатком предложенной функции, как и ее модификаций, является ограничение для функций под логарифмами k−c>1. Данное ограничение не препятствует применению ее в МАИ. В случае если разница между центральной и крайней точкой диапазона меньше либо равна 1, то рекомендуется применять масштабирование по горизонтальной оси $p \in (0;\ 1)$ не является ограничением, т. к. по методике выбора этого параметра он не может быть выбран в ином диапазоне.

Полученная функция (5) является более универсальной при определении значимости количественных показателей. Как и в гауссовской функции (3) параметром c определяется центр симметрии функции, т. е. величина количественного показателя, при которой весовой коэффициент равен 1, что соответствует максимально высокой оценке критерия. В отличие от гауссовской, предложенная функция позволяет задать параметрами $p$ и $k$ координаты еще одной точки, через которую должен проходить график функции принадлежности. В МАИ удобно использовать $p$, близкое к 0, чтобы параметром $k$ указывать такое значение количественного показателя при дальнейшем изменении которого оценка близка к 0 и практически не изменяется (Рисунок 6). Как и в гауссовской функции сохранена возможность изменения кривизны функции.

Несмотря на описанное выше ограничение, которое обходится путем масштабирования по горизонтальной оси, предложенная функция сохранила достоинства обобщенной гауссовской функции и при этом более удобна для применения в МАИ.

Использование предложенной функции предоставляет большие возможности для формирования нелинейных возрастающих и убывающих функций принадлежности. Это позволит учитывать мнения экспертов более точно при решении задач многокритериального выбора методом анализа иерархии.

*Список литературы:*

1. Саати Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 320 с.
2. Ногин В. Д. Принятие решений при многих критериях. Учебно–методическое пособие. СПб. Издательство «ЮТАС», 2007. 104 с.
3. Прикладные нечеткие системы / Под ред. Т. Тэрано, К. Асан, М. Сугэтно. М.: Мир, 1993. 358 с.
4. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации / Пер. с польского И. Д. Рудинского. М.: Финансы и статистика, 2002. 344 с.

*References:*

1. Saaty T. L. Decision making with the analytical hierarchy process. Moscow, Radio i svyaz’, 1993, 320 p.
2. Nogin V. D. Prinyatie reshenij pri mnogih kriteriyah: uchebno–metodicheskoe posobie. SPb, YUTAS, 2007, 104 p.
3. Prikladnye nechetkie sistemy / ed. T. Tehrano, K. Asan, M. Sugehtno. Moscow, Mir, 1993, 358 p.
4. Osovskij S. Nejronnye seti dlya obrabotki informacii / Per. s pol'skogo I. D. Rudinskogo. Moscow, Finansy i statistika, 2002, 344 p.

*Работа поступила в редакцию 21.03.2016 г.*

*Принята к публикации 24.03.2016 г.*