Dr Dragutin Lj. Debeljković,
dipl. inž.,
Mašinski fakultet, Beograd
Dr Mića B. Jovanović,
dipl. inž.,
Dr Stevan A. Milinković,
dipl. inž.,
Tehnološko-metalurški fakultet,
Beograd

ANALIZA ROBUSTNOSTI STABILNOSTI LINEARNIH STACIONARNIH SINGULARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

UDC: 519.718:007.5

Rezime:

Singularni sistemi predstavljeni su u matematičkom smislu kombinacijom diferencijalnih i algebarskih jednačina, pri čemu ove druge predstavljaju ograničenje koje opšte rešenje mora da zadovolji u svakom trenutku. Primera singularnih sistema ima skoro u svim granama nauke i tehnike. Javljaju se često u elektromagnetnim kolima, dinamici robota i savremenih letelica, optimizacionim problemima i kao granični slučaj singularno-perturbovanih sistema. Osnovna dinamička analiza ove klase sistema u vremenskom domenu podrazumeva ispitivanje stabilnosti kako sa pozicija Ljapunova tako i sa pozicija stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu. Mimo toga od posebne je važnosti i očuvanje ove važne osobine sistema i u prisustvu različitih perturbacija kako bi se i u krajnje nepredvidljivim uslovima obezbedilo kvalitetno ponašanje sistema. Ova složena problematika danas je predmet oblasti upravljanja poznatijom pod nazivom teorija robustnosti.

Ključne reči: linearni sistemi, singularni sistemi, stabilnost u smislu Ljapunova, stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, robustnost stabilnosti.

ANALYSIS OF STABILTY ROBUSTNESS FOR LINEAR TIME INVARIANT SINGULAR CONTROL SYSTEMS

Summary:

Singular systems are those the dynamics of which is governed by a mixture of algebraic and differential equations. In that sense the algebraic equations represent the constraints to the solution of the differential part. These systems are also known as descriptor, semi-state and generalized systems. They apear as a linear approximation of systems models, or linear system models in many applications such as electrical networks, aircraft dynamics, neutral delay systems, large-scale systems, inerconnected systems, economics, optimization problems, feedback systems, robotics, etc. The basic dynamic analysis in time domain is devoted to the question of stability in the sense of Lyapunov as well as in the sense of finite time stability. Besides that, it is of particular interest to maintain the systems characteristics under the action of undesirable perturbations. This question is in the connection with the problems treated well by the modern concept of stability robustness within the area of control engineering.

Key words: linear systems, singular systems, stabilty in the sense of Lyapunov, finite time stability, robustness.

Uvod

Singularni sistemi predstavljaju dinamičke sisteme opisane kombinacijom algebarskih i diferencijalnih jednačina, što ne dozvoljava njihovo predstavljanje u klasičnom obliku vektorske diferencijalne jednačine stanja, a samim tim i onemogućava njihovo rešavanje uobičajenim metodama koje se koriste za rešavanje *„normalnih"* sistema.

U tom smislu, algebarske jednačine predstavljaju ograničenje nametnuto rešenju odnosno rešavanju dela sistema koji sadrži diferencijalne jednačine.

Kompleksna priroda singularnih sistema prouzrokuje mnoge poteškoće u njihovom analitičkom i numeričkom proučavanju a koje se ne javljuju kada su u pitanju tzv. *normalni sistemi*. U tom smislu od posebne su važnosti pitanja *postojanja i jedinstvenosti rešenja, konzistentnih početnih uslova i impulsnog ponašanja*. Neka od ovih pitanja biće najpre razmotrena, a radi što boljeg razumevanja suštinskih problema koji su predmet izlaganja u ovom radu.

Pregled najnovijih rezultata i iscrpan uvid u do sada publikovane radove može se naći u sledećim referencama: *Bajic (1992), Campbell (1980, 1982), Lewis (1986, 1987), Debeljkovic at el. (1996a, 1996b, 1998) i u dva tematska broja časopisa Circuits.*

Primeri singularnih sistema u tehnici su veoma brojni. U tom smislu od posebnog je interesa rad *Stevens (1984)* koji u dinamici projektila prepoznaje, modelira, simulira i analizira posebnu klasu singularnih sistema, proisteklih iz strukturnih ograničenja razmatranog objekta automatskog upravljanja namenjenog vojnim potrebama.

Preliminarna razmatranja

Matematički opis ovih sistema u prostoru stanja izgleda ovako:

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_i(t) &= C\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

gde je matrica E u nekom smislu obavezno *singularna*, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ vektor upravljanja. Konstantne matrice A, B, C su odgovarajućih dimenzija.

Ako je *matrični par* $(sE - A)$ *regularan*, tj. ukoliko je:

$$\det(sE - A) \neq 0,\ s \in \mathbb{C} \tag{2}$$

tada rešenja sistema, datog jed. (1), postoje i *jedinstvena su*, a ukoliko su im pridruženi *konzistentni početni uslovi*, ona su *glatka* (ne sadrže impulse) i mogu se dobiti u zatvorenom obliku.

Rešenje „*normalnog*" sistema jednačina može se odrediti kako u slobodnom tako i u prinudnom radnom režimu, za proizvoljne početne uslove. Zbog singularnog karaktera razmatranog sistema diferencijalnih jednačina, *svi mogući početni uslovi nisu prihvatljivi*. Oni početni uslovi koji su prihvatljivi nazivaju se *konzistentnim*.

Osnovno obeležje *konzistentnih početnih uslova* je da oni generišu *glatka* rešenja, a ako se razmatranom sistemu jednačina pridruže nekonzistentni uslovi, javiće se impulsno ponašanje na početku njihove integracije.

Skup svih vektora $\mathbf{x}_0$, koji obrazuju potprostor konzistentnih početnih uslova, u oznaci W_k, može se odrediti na osnovu sledećih rezultata.

Osnovno geometrijsko oruđe u karakterizaciji potprostora konzistentnih početnih uslova je sekvenca potprostor, određena sa:

$$W_0 = \mathbf{R}^n\ , \tag{3}$$

$$W_{j+1} = A^{-1}(EW_j)\ ,\quad j \geq 0\ , \tag{4}$$

gde $A^{-1}(\cdot)$ predstavlja inverzni lik $(\cdot)$ pod dejstvom operatora A.

Lema 1. Sekvenca potprostora $\{W_0, W_1, W_2, \ldots\}$ formirana je tako da zadovoljava:

$$W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \ldots \tag{5}$$

Štaviše, može se napisati:

$$\aleph(A) \subset W_j\ ,\quad \forall j \geq 0\ , \tag{6}$$

pri čemu postoji nenegativan ceo broj $k \geq 0$, takav da je:

$$W_{k+1} = W_k , \tag{7}$$

tako da važi:

$$W_{k+j} = W_k, \quad \forall j \geq 1. \tag{8}$$

Ako je k^* najmanji nenegativni ceo broj koji zadovoljava prethodnu jednačinu, tada je:

$$W_k \cap \aleph(E) = \{\mathbf{0}\}, \quad k \geq k^*, \tag{9}$$

pod uslovom da je $(\lambda E - A)$ invertibilno, za neko $\lambda \in \mathbf{R}$ [26].

Dokaz. Očigledno je da je $W_1 \subset W_0$, pa pretpostavimo da je $W_j \subset W_{j-1}$. Uočimo da važi:

$$W_{j+1} = A^{-1}EW_j \subset A^{-1}EW_{j-1} = W_j, \tag{10}$$

pa je time matematičkom indukcijom dokazana jed. (5). U ovim razmatranjima E i A su linearni operatori koji preslikavaju prostor X u višedimenzionalni realni, vektorski prostor X^n. Dokaz da važi jed. (6) je trivijalan, pošto je $A^{-1}Y \supset \aleph(A)$ za bilo koji linearni vektorski prostor $Y \subset X = \mathbf{R}^n$. Postojanje broja k koji zadovoljava jed. (8) sledi iz strukture niza datog jed. (5), kao i činjenice da je prostor X konačne dimenzije.

Da bi se dokazalo da važi izraz dat jed. (9), potrebno je samo dokazati da on važi za $k = k^*$, pošto je $W_k = W_{k^*}$, $k \geq k^*$, zbog jed. (7–8). Izabraće se $\lambda \in \mathbf{R}$ takvo da je $(\lambda E - A)$ invertibilno. Neka je:

$$\hat{E} = (\lambda E - A)^{-1} E, \quad \hat{A} = (\lambda E - A)^{-1} A . \tag{11}$$

Uočimo da važi:

$$(\lambda \hat{E} - \hat{A}) = I , \tag{12}$$

te su $\hat{E}$ i $\hat{A}$ komutativne, tj. $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A}$.

Usvojimo nesingularnu modalnu matricu M, tako da je:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= M\begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}M^{-1}, \\ \hat{A} &= M\begin{bmatrix} \lambda Q_0 - I & 0 \\ 0 & \lambda N - I \end{bmatrix}M^{-1}, \end{aligned} \tag{13}$$

gde je Q_0 nesingularna matrica, a N nilpotentna matrica.

Primetimo da je $(\lambda N - I)$ nesingularna. Očigledno je $\aleph(E) = \aleph(\hat{E})$, pa je dovoljno pokazati da je:

$$W_{k^*} \cap \aleph(\hat{E}) = \mathbf{0}. \tag{14}$$

Pokažimo sada da je:

$$W_{k^*} = \hat{A}^{-} \hat{E} W_{k^*} . \tag{15}$$

Iz jed. (7–8) sledi da je $W_{k^*} = A^{-1} EW_{k^*}$, pa sledi $AW_{k^*} \subset EW_{k^*}$. Množenjem sa leve strane sa $(\lambda E - A)^{-1}$ dobija se $\hat{A}W_{k^*} \subset \hat{E}W_{k^*}$, dakle $W_{k^*} \subset \hat{A}^{-1}\hat{E}W_{k^*}$. Ako je dalje $\mathbf{x} \in \hat{A}^{-1}\hat{E}W_{k^*}$, onda je $\hat{A}\mathbf{x} = \hat{E}\mathbf{q}$ za neko $\mathbf{q} \in W_{k^*}$, odakle imamo $A\mathbf{x} = E\mathbf{q}$. Dalje sledi da je $\mathbf{x} \in A^{-1}EW_{k^*} = W_{k^*}$, što povlači da je $\hat{A}^{-1}\hat{E}W_{k^*} \subset W_{k^*}$, pa je time tvrđenje dato jed. (15) dokazano.

Pretpostavimo da je

$\mathbf{x} \in W_{k^*} \cap \aleph(\hat{E})$. Može se pisati:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \hat{E}\mathbf{y}^{(1)}, \quad \mathbf{y}^{(1)} \in W_{k^*} . \tag{16}$$

Jednostavnim izračunavanjem dobija se $\hat{E}\hat{A}\mathbf{x} = \hat{A}\hat{E}\mathbf{x} = \mathbf{0} = \hat{E}^2\mathbf{y}^{(1)}$, tako da je:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \hat{E}\mathbf{y}^{(1)}, \; E^2\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{0}, \; \mathbf{y}^{(1)} \in W_{k^*} . \tag{17}$$

Dokažimo sada indukcijom da, za svaki broj $j \geq 1$, postoji $y^{(j)}$ takvo da je:

$$\hat{A}^j\mathbf{x} = \hat{E}^j\mathbf{y}^{(j)}, \; \hat{E}^{j+1}\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{0}, \; \mathbf{y}^{(j)} \in W_{k^*} . \tag{18}$$

Tvrđenje dato jed. (18) je tačno za $j = 1$ usled jed. (17), pa pretpostavimo da je tačno i za j. Može se pisati:

$$\hat{A}\mathbf{y}^{(j)} = \hat{E}\mathbf{y}^{(j+1)}, \quad \mathbf{y}^{(j+1)} \in W_{k^*}. \tag{19}$$

pa, koristeći jed. (18), sledi:

$$\hat{A}^{j+1}\mathbf{x} = \hat{A}\hat{E}^j\mathbf{y}^{(j)} = \hat{E}^j\hat{A}\mathbf{y}^{(j)} = = \hat{E}^{j+1}\mathbf{y}^{(j+1)}. \tag{20}$$

Uočimo da je:

$$\mathbf{0} = \hat{A}^{j+1}\hat{E}\mathbf{x} = \hat{E}\hat{A}^{j+1}\mathbf{x} = \hat{E}^{j+2}\mathbf{y}^{(j+1)}, \tag{21}$$

čime je induktivna hipoteza potvrđena.

Da bismo završili dokaz leme, pretpostavimo da je $N^{\nu} = 0$ i usvojimo $j = \nu$ u jed. (18). Iz matričnih reprezentacija datih jed. (13), sledi da $\hat{E}^{\nu+1}\mathbf{y}^{(\nu)} = \mathbf{0}$ implicira $\hat{E}^{\nu}\mathbf{y}^{(\nu)} = \mathbf{0}$, pa je zbog toga:

$$\hat{A}^{\nu}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \hat{E}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{22}$$

Kako su Q_0 i $(\lambda N - I)$ nesingularne, jedino moguće rešenje je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, što potvrđuje uslov jed. (14), a time i jed. (9), što se i tražilo.

Teorema 1. Pod uslovima *Leme* 1, $\mathbf{x}_0$ je konzistentni početni uslov za sistem u slobodnom radnom režimu, dat jed. (1), ako i samo ako je $\mathbf{x}_0 \in W_{k^*}$. Štaviše, $\mathbf{x}_0$ generiše jedinstveno rešenje $\mathbf{x}(t) \in W_{k^*}$, $t \geq 0$.

Dokaz. Neophodnost: ako rešenje postoji, ono je jedinstveno ukoliko je $(\lambda E - A)$ invertibilno za neko $\lambda \in \mathbf{R}$. Pretpostavimo da $\mathbf{x}_0$ generiše glatko rešenje $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{X}$, pa tada $E\mathbf{x}^{(1)} = A\mathbf{x}$ povlači da je:

$$\mathbf{x}_0 \in W_1, \mathbf{x}^{(1)}(0) \in W_0. \tag{23}$$

Pokazaće se da je za svako $p \geq 0$,

$$\mathbf{x}^{(j)}(0) \in W_{p-j}, 0 \leq j \leq p. \tag{24}$$

Ovo je očigledno tačno za $p = 0, 1$, tako da se tvrđenje dato jed. (24) dokazuje indukcijom. Pretpostavimo da jed. (24) važi za neko $p \geq 0$. Uočimo da važi $E\mathbf{x}^{(p+1)} = A\mathbf{x}^{(p)}$, pa je zbog toga:

$$\mathbf{x}^{(p+1)}(0) \in W_0, \mathbf{x}^{(p)}(0) \in W_1 \cap W_0 = W_1. \tag{25}$$

Pošto važi i $E\mathbf{x}^{(p)} = A\mathbf{x}^{(p-1)}$ ima se da je:

$$\mathbf{x}^{(p+1)} \in W_1 \cap W_2. \tag{26}$$

Slično se pokazuje da je:

$$\mathbf{x}^{(j)}(0) \in W_{p+1-j}, 0 \leq j \leq p+1, \tag{27}$$

i induktivna hipoteza je dokazana. Ono što je ovde bitno je da je $\mathbf{x}(0) \in W_p$, za svako $p \geq 0$, pa sledi da je $\mathbf{x}(0) \in W_{k^*}$, što dokazuje neophodnost.

Dovoljnost: pretpostavimo da je $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in W_{k^*}$ i uočimo da je $AW_{k^*} \subset EW_{k^*}$. Ako je $\overline{W}$ bazisna matrica za W_{k^*}, možemo pisati:

$$A\overline{W} = E\overline{W}\Lambda, \tag{28}$$

za neku (jedinstveno definisanu jed. (9)) kvadratnu matricu Λ, dimenzije jednake dimenziji W_{k^*}. Neka je $\mathbf{x}_0 = \overline{W}\mathbf{z}_0$ i rešimo jednačinu:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0. \tag{29}$$

Vektorska funkcija $\mathbf{x}(t) = \overline{W}\mathbf{z}(t) \in \in W_{k^*}$, $t \geq 0$ je realna, analitička i zadovoljava početni uslov $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Ona je jedinstveno rešenje jed. (1), za slobodni radni režim, pošto je:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) - A\mathbf{x}(t) = E\overline{W}\dot{\mathbf{z}}(t) - A\overline{W}\mathbf{z}(t) = \\ = E\overline{W}\left(\dot{\mathbf{z}}(t) - \Lambda\mathbf{z}(t)\right) = 0, \quad t \geq 0. \tag{30}$$

Ovim je dokaz teoreme završen.

Potprostor konzistentnih početnih uslova, sistem u slobodnom radnom režimu, može se odrediti prevođenjem polaznog sistema na njegovu *normalnu kanoničku formu*:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_1\mathbf{x}_1(t) + A_2\mathbf{x}_2(t), \tag{31}$$

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_1(t) + A_4\mathbf{x}_2(t). \tag{32}$$

Tada algebarski deo sistema u potpunosti definiše taj prostor, odnosno:

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_{10} + A_4\mathbf{x}_{20}, \tag{33}$$

ili, u ekvivalentnoj notaciji:

$$W_k = \aleph\left(\begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix}\right). \tag{34}$$

Rekapitulacija osnovnih rezultata

Rezultati vezani za analizu robustnosti stabilnosti pojedinih sistema obično su osnovani na nekim ranije izvedenim rezultatima ili prilazima. Zbog toga će biti izloženi neki od rezultata neophodni za bolje razumevanje osnovnih doprinosa ovoga rada, bez ograničenja na regularnost singularnog sistema. To znači da nije neophodno da uslov dat jed. (2) bude ispunjen.

U prvom delu izlaganja traže se uslovi koji garantuju *osobinu privlačenja* za sva ili samo jedan podskup kretanja singularnog sistema u prostoru stanja, što u osnovi odgovara prilazu koji se neguje u ljapunovskom konceptu stabilnosti. Samim tim biće omogućena i procena „slabog" domena privlačenja, odnosno skupa početnih stanja sistema koja generišu rešenja sa pomenutom osobinom.

Za ove potrebe posmatra se singularni sistem opisan jed. (31–32), koji je nastao primenom linearne nesingularne matrične transformacije na polazni sistem u slobodnom radnom režimu, dat jed. (1). Samim tim važi:

$$ET = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

gde je $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t)\ \mathbf{x}_2^T(t)]^T \in \mathbf{R}^n$ dekomponovani vektor stanja pri čemu je

$\mathbf{x}_1^T(t) \in \mathbf{R}^{n_1}$, $\mathbf{x}_2^T(t) \in \mathbf{R}^{n_2}$ pri $n = n_1 + n_2$.

Matrice A_i, $i=1,2\ldots,4$, su odgovarajućih dimenzija. Dalje je :

$$\det(ET) = \det E \det T = 0, \tag{36}$$

pri čemu je $\det T \neq 0$.

Uslov regularnosti, dat jed. (2), za sistem u obliku jed. (31–32), transformiše se u:

$$\det(cI - A_1)\det(-A_4 - A_3(cI - A_1)^{-1}A_2) \neq 0 \tag{37}$$

ili:

$$\det A_4 \det((cI - A_1) - A_2A_4^{-1}A_3) \neq 0, \tag{38}$$

pod uslovom da je matrica A_4 *nesingularna*.

Označimo sa φ_I skup svih vektora konzistentnih početnih uslova singularnog sistema datog jed. (41–42). Sa $\mathcal{M} \in \mathbf{R}^n$ označimo linearnu višestrukost određenu jed. (33) kao:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x}(t) \in \Re^n : \mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_1(t) + A_4\mathbf{x}_2(t)\}. \tag{39}$$

Za sistem dat jed. (31–32), u opštem slučaju $\varphi_I \subseteq \mathcal{M}$, pa u tom smislu vektor konzistentnih početnih uslova

$\mathbf{x}_0 = [\mathbf{x}_{10}^T \;\; \mathbf{x}_{20}^T]^T$ mora da zadovolji $A_3\mathbf{x}_{10} + A_4\mathbf{x}_{20} = \mathbf{0}$, ili u ekvivalentnoj notaciji:

$$\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \subseteq \mathcal{M} \equiv \aleph([A_3 \;\; A_4]). \tag{40}$$

Međutim, ako se pokaže da je zadovoljen *uslov ranga*, dat jednačinom:

$$\mathrm{rang}[A_3 \;\; A_4] = \mathrm{rang}\, A_4, \tag{41}$$

tada je očigledno da je

$\varphi_I = \mathcal{M} = \aleph([A_3 \;\; A_4])$ [2] i izračunavanje φ_I ne zahteva nikakva dopunska izračunavanja, sem svođenja singularnog sistema, datog jed. (1), na svoj kanonički oblik dat jed. (31–32), [18, 19].

Pošto je transformacija data jed. (1) nesingularna, konvergentnost rešenja obe jednačine je ekvivalentan problem. Isto važi i za osobinu ograničenosti rešenja ovog sistema.

Definisaće se slab domen privlačenja nultog rešenja $\mathbf{x}(t) = 0$ jed. (31–32) kao:

$$\mathcal{D} \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R},\ \mathbf{x}_0 \in \mathcal{M},\ \exists \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0),\ \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| \to 0\}. \tag{42}$$

Koristi se termin „*slab*" zbog toga što rešenja jed. (31–32) *ne moraju biti jedinstvena*, tako da za svako $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{W}_k$ mogu postojati rešenja koja ne konvergiraju prema ishodištu. Koristiće se Ljapunovljeva direktna metoda za određivanje procene $\mathcal{D}_e$ skupa $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}_e \subseteq \mathcal{D}$) Pri tome se ne zahteva ispunjenje uslova regularnosti.

Za sistem opisan jed. (31–32), kvaziljapunovska funkcija može biti izabrana kao:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}_1^T(t) P \mathbf{x}_1(t),$$

$$P = P^T > 0,\ P \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1} \tag{43}$$

Totalni izvod funkcije V duž rešenja $\mathbf{x}(t)$ sistema datog jed. (31–32) je:

$$\begin{aligned}\dot V(\mathbf{x}(t)) &= \dot{x}_1^T(t) P \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_1^T(t) P \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ &= (\mathbf{x}_1^T(t) A_1^T + \mathbf{x}_2^T(t) A_2^T) P \mathbf{x}_1(t) + \\ &\quad + \mathbf{x}_1^T(t) P (A_1 \mathbf{x}_1(t) + A_2 \mathbf{x}_2(t)) \\ &= \mathbf{x}_1^T(t)(A_1^T P + P A_1)\mathbf{x}_1(t) + \\ &\quad + \mathbf{x}_1^T(t) P A_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_2^T(t) A_2^T P \mathbf{x}_1(t).\end{aligned} \tag{44}$$

Ako je $\dot V(\mathbf{x}(t))$ negativno određena funkcija, onda za svako $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$, ima se da $\|\mathbf{x}_1\| \to 0$, kada $t \to \infty$. Da bi

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}_2(t)\| \to 0, \tag{45}$$

potrebno je uspostaviti odgovarajuću vezu između kovektora $\mathbf{x}_1(t)$ i $\mathbf{x}_2(t)$.

Pretpostavimo da je *uslov ranga*:

$$\mathrm{rang}[A_3 \;\; A_4] = \mathrm{rang}\, A_4 = r \le n_2, \tag{46}$$

zadovoljen, što na osnovu ranije izloženog povlači $\varphi_I = \aleph([A_3 \;\; A_4])$. Posledično, tada postoji matrica L koja zadovoljava sledeću matričnu jednačinu [28]:

$$0 = A_3 + A_4 L, \tag{47}$$

gde je 0 nula matrica iste dimenzije kao i matrica A_3.

Na osnovu jed. (46) i jed. (47), ukoliko rešenja sistema datog jed. (31–32) *postoje, tada postoje i rešenja* $\mathbf{x}(t)$ čije su komponente povezane na sledeći način:

$$\mathbf{x}_2(t) = L\mathbf{x}_1(t),\ \forall t \in \mathbf{R}. \tag{48}$$

Uzimajući u obzir uslov ranga, jed. (46), sledi da je $\aleph([L - I_{n_2}]) \subseteq \aleph([A_3 \;\; A_4])$.

Da bi se to pokazalo, usvaja se proizvoljno $\mathbf{x}^* \in \aleph([L - I_{n_2}])$, tj. $\mathbf{x}_2^* = L\mathbf{x}_1^*$,

gde je L bilo koja matrica koja zadovoljava jed. (47). Množeći sa desne strane jed. (47) vektorom $\mathbf{x}_1^*$, uz korišćenje jed. (46), lako se dobija:

$$0 = A_3\mathbf{x}_1^*(t) + A_4 L\mathbf{x}_1^*(t) = A_3\mathbf{x}_1^*(t) + A_4\mathbf{x}_2^*(t), \quad (49)$$

što pokazuje da $\mathbf{x}^* \in \aleph([A_3 \ A_4])$. Prema tome $\aleph([L - I_{n_2}]) \subseteq \aleph([A_3 A_4])$.

Procena slabog domena privlačenja data je sa:

$$\mathcal{D}_e = \{\mathbf{x}(t) \in \Re^n : \mathbf{x}(t) \in \aleph([L - I_{n_2}])\} \subseteq \mathcal{D} \quad (50)$$

Iz jed. (44) i jed. (48) dobija se:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}_1^T(t)((A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2 L))\mathbf{x}_1(t), \quad (51)$$

koja je negativno određena funkcija u odnosu na $\mathbf{x}_1(t)$ ako je:

$$\Omega^T P + P\Omega = -G, \ \Omega = A_1 + A_2 L, \quad (52)$$

gde je G realna, simetrična, pozitivno određena matrica. Sada se može izneti rezultat:

Teorema 2. Neka je zadovoljen uslov ranga, dat jed. (46). Tada je procena, $\mathcal{D}_e$, potencijalnog (slabog) domena privlačenja $\mathcal{D}$ nultog rešenja datog singularnog sistema određena jed. (50), pod uslovom da je matrica L bilo koje rešenje jed. (47), a $\Omega = A_1 + A_2 L$ Hurvicova matrica. Štaviše, $\mathcal{D}_e$ nije jednočlan skup, tako da postoje rešenja sistema datog jed. (31–32), različita od nultog rešenja, koja teže (konvergiraju) prema ishodištu faznog prostora kada vreme neograničeno raste ($t \to \infty$).

Dokaz. Na osnovu uslova ranga, jednačina (46), sledi da je:

$$\varphi_I = \aleph([A_3 \ A_4]). \quad (53)$$

Izaberimo sada takvo $\mathbf{x}_0$ da:

$$\mathbf{x}_0 \in \aleph([L - I_{n_2}]). \quad (54)$$

Očigledno je da je $\mathbf{x}_0$ vektor konzistentnih početnih uslova u trenutku $t = t_0$, s obzirom da je:

$$\aleph([L - I_{n_2}]) \subseteq \aleph([A_3 \ A_4]) = \varphi_I. \quad (55)$$

Jasno je sada da rešenja $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ sistema datog jed. (31–32) koja polaze iz tačke $\mathbf{x}_0$ postoje. Budući da je $\Omega = A_1 + A_2 L$ *Hurvicova matrica*, onda, prema poznatim rezultatima Ljapunovljeve matrične teorije, postoji jedinstvena simetrična, pozitivno određena matrica P, koja zadovoljava jed. (52). Prema tome, $V(\mathbf{x}(t))$, definisana jed. (43), pozitivno je određena funkcija u odnosu na $\mathbf{x}_1(t)$ i njen totalni izvod duž rešenja jed. (31–32) ograničen jed. (43) je negativno određen tako da:

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}_1(t)\| \to 0, \quad (56)$$

sve dok:

$$\mathbf{x}_0 \in \aleph([L - I_{n_2}]). \quad (57)$$

Jed. (48) obezbeđuje i:

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}_2(t)\| = \lim_{t \to \infty} \|L\mathbf{x}_1(t)\| \le \le \|L\| \lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}_1(t)\| \to 0. \quad (58)$$

Pošto $\aleph([L - I_{n_2}])$ nije jednočlan skup, tada postoje rešenja sistema datog jed. (31–32) sa početnim vektorom $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$

koja teže ishodištu faznog prostora kada $t \to \infty$. Prema tome, D_e ima više od jednog elementa što dokazuje *Teoremu.*

Izneti rezultati omogućavaju da se ispita osobina privlačenja nultog ravnotežnog stanja linearnih kako *regularnih, tako i iregularnih singularnih sistema,* pod uslovom da su ispunjeni zahtevi koje nameće jed. (46), a što je od posebne važnosti za kasnija ispitivanja osobine robustnosti razmatranog sistema.

Razmatraju se linearni singularni sistemi u *slobodnom radnom režimu*, opisani svojom vektorskom jednačinom stanja, jed. (1) a definisani na vremenskom intervalu $\tau = [\ t_0, t_0 + T\ ]$, gde veličina T može da bude pozitivan realan broj, ili simbol $+\infty$, tako da se stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost sledstveno, mogu razmatrati jednovremeno. Jasno je da $\tau \in \mathbf{R}$.

Skupovi od interesa $S_{(\cdot)}$, koji se koriste kao granice do kojih dosežu moguće trajektorije sistema su vremenski nepromenljivi. Šta više, za njih se pretpostavlja da su *otvoreni, povezani* i *ograničeni*, tako da važi:

$$S_\rho = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n : \|\, \mathbf{x}(t) \|_Q^2 < \rho,\ \ \forall \mathbf{x}(t) \in W_k \setminus \{\mathbf{0}\} \right\} \tag{59}$$

ili:

$$S_Q(\rho) = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n : \|\, \mathbf{x}(t) \|_Q^2 < \rho \right\}, \tag{60}$$

ili:

$$S_k(\rho) = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n : \|\, \mathbf{x}_k(t) \|_Q^2 < \rho \right\}, \quad k = 1, 2, \tag{61}$$

gde je Q realna, simetrična, pozitivno određena matrica a W_k potprostor konzistentnih početnih uslova.

Sa S_α označen je skup svih početnih stanja sistema $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, a sa S_β skup svih dozvoljenih stanja sistema na razmatranom vremenskom intervalu, tako da je $S_\alpha \subset S_\beta$.

Definicije stabilnosti

Definicija 1. Sistem, dat jed. (1) je *stabilan* na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\tau, \alpha, \beta, Q\}$ ako i samo ako postoji $\mathbf{x}_0 \in W_k$ koji zadovoljava uslov:

$$\|\mathbf{x}_0\|_Q^2 < \alpha, \tag{62}$$

povlači da je:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 < \beta, \ \ \forall t \in \tau, \quad [21, 22] \tag{63}$$

Definicija 2. Rešenja sistema, datog jednačinama (31 i 32) su *praktično stabilna* u odnosu na $\{\tau, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta, \Gamma\}$ ako i samo ako postoji $\mathbf{x}_0 \in \aleph([A_3 \quad A_4])$, koji zadovoljava uslove:

$$\|\mathbf{x}_{10}\|^2 < \alpha_1, \quad \|\mathbf{x}_{20}\|^2 < \alpha_2, \tag{64}$$

povlači da je:

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \beta, \ \ \forall t \in \tau, \ \ \beta_1 + \beta_2 < \beta, [4] \tag{65}$$

Glavni rezultati

U teoriji automatskog upravljanja od posebne je važnosti očuvanje određenih osobina sistema i u prisustvu izvesnih perturbacija u modelu sistema koje mogu nastati iz više razloga. Tu se prvenstveno misli na netačnosti prisutne u matematičkom modelu procesa, a proistekle iz nemogućnosti da se isti „savršeno" izmodeliraju, za-tim usled uticaja spoljašnjih dejstava kojima se značajno menja dinamika sistema, nedovoljno tačnog prikupljanja podataka o merenim veličinama, nepravilnog rada pojedinih komponenti upravljačkog sistema i tome slično.

Dinamičko ponašanje sistema u prisustvu *„malih"* perturbacija (odstupanja) razmatra *teorija osetljivosti.*

Problematikom očuvanja određenih osobina sistema u prisustvu *velikih* perturbacija, kao i njihovom neosetljivošću na te promene, bavi se *teorija robustnosti.*

Za savremene sisteme automatskog upravljanja, i sisteme uopšte, od posebne je važnosti očuvati osobine stabilnosti, upravljivosti, osmotrivosti, itd. Prema tome, osobinu robustnosti ne treba uvek vezivati za stabilnost, jer je ona interesantna i kada su neke druge osobine sistema u pitanju.

Robustnost, pored svog teorijskog, ima i veliki praktičan značaj. Naime, kod znatnog broja komponenti sistema određene vrednosti njihovih parametara nisu dovoljno tačno poznate, ali se znaju granice u kojima se te vrednosti mogu kretati. Samim tim, od velikog je interesa poznavati i utvrditi u kojoj meri i u kojim granicama se menja dinamičko ponašanje razmatranog sistema, kada nedovoljno tačno procenjeni parametri uzimaju svoje ekstremne vrednosti.

Značajne razlike postoje u primeni *koncepta robustnosti* na jednostruko prenosne i višestruko prenosne sisteme. O tim problemima, kao i o mogućim merama za kvantifikaciju robustnosti, o domenima u kojima se pomenuti koncept može primenjivati, kao i o nizu drugih, veoma značajnih pitanja, zainteresovani se mogu upoznati iz navedene literature.

Za potrebe proučavanja robustnosti ljapunovske stabilnosti razmatra se linearni singularni sistem opisan izrazom:

$$E\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}_p(\mathbf{y}(t)), \tag{66}$$

gde $\mathbf{f}_p(\mathbf{y}(t))$ predstavlja vektor perturbacija.

Koristeći linearnu nesingularnu transformaciju, sistem dat jed. (66), može se svesti na oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_1\mathbf{x}_1(t) + A_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)), \tag{67}$$

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_1(t) + A_4\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t)), \tag{68}$$

koji očigledno odgovara normalnoj kanoničkoj formi, pri čemu je:

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{f}_p(T\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t)) \end{bmatrix}. \tag{69}$$

Pored toga, uvodi se i sledeća pretpostavka.

Pretpostavka 1. Vektor perturbacija zadovoljava sledeći uslov:

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t)) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}^T, \tag{70}$$

tako da se može napisati:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{f}_1\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathbf{f}_1\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ L\mathbf{x}_1(t) \end{bmatrix}\right) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t)), \end{aligned} \tag{71}$$

pod pretpostavkom da je matrica L bar jedno rešenje jednačine (47).

Teorema 3. Neka su *Pretpostavka* 1 i jed. (46) zadovoljene. Tada netrivijalna rešenja sistema, datog jed. (67–68) teže ishodištu faznog prostora kada $t \to +\infty$, ako je ispunjen uslov:

$$\frac{\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) \|}{\| \mathbf{x} \|} \le \mu_1 \equiv \frac{\sigma_{\min}(G)}{\sigma_{\max}(P)}, \tag{72}$$

gde je P jedinstvena, realna, simetrična i pozitivno određena matrica, koja predstavlja rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$(A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2 L) = -2G, \tag{73}$$

gde je G proizvoljna realna, simetrična, pozitivno određena matrica, a $\sigma_{min}([\cdot])$ i $\sigma_{max}([\cdot])$ predstavljaju singularne vrednosti matrice $[\cdot]$.

Dokaz. Neka

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}_1^T(t) \ \ P \ \ \mathbf{x}(t), \tag{74}$$

bude agregaciona funkcija za dati sistem. Valja zapaziti da $V(\mathbf{x}_1(t)) > 0$ za $\forall \mathbf{x}(t) \neq 0$ i $V(\mathbf{x}_1(t)) \to \infty$, kada $\|\mathbf{x}(t)\| \to \infty$. Da bi sistem, dat jed. (67–68), posedovao svojstvo privlačenja nultog ravnotežnog stanja, potrebno je da $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$.

Diferencirajući jed. (74) po vremenu, a duž rešenja razmatranog sistema, dobija se:

$$\begin{aligned}\dot{V}\,(\mathbf{x}_1(t)) &= \dot{\mathbf{x}}_1^T(t) P \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_1^T(t) P \dot{\mathbf{x}}_1(t)\\ &= \mathbf{x}_1^T(t)\big((A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2 L)\big)\mathbf{x}_1(t)\\ &+ 2\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1(t)) P \mathbf{x}_1(t)\\ &= \mathbf{x}_1^T(t)(-2G + 2\mu P)\mathbf{x}_1(t),\end{aligned} \tag{75}$$

s obzirom da je:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) < \mu_1 \mathbf{x}_1(t). \tag{76}$$

Prema tome, funkcija $V(\mathbf{x}_1(t))$ je Ljapunovljeva funkcija za dati sistem. Sistem poseduje osobinu privlačenja ako je zadovoljena sledeća matrična nejednačina:

$$-2G + 2\mu_1 P < 0, \tag{77}$$

što je moguće zadovoljiti ako je:

$$2\mu_1 \sigma_{max}(P) < 2\sigma_{min}(G), \tag{78}$$

čime se završava i dokaz ove *teoreme.*

Teorema 4. Pretpostavimo da vektorska funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ ispunjava uslove date *Pretpostavkom* 1 i da je istovremeno zadovoljen i uslov ranga, dat jed. (46). Tada netrivijalna rešenja sistema, datog jed. (67–68) teže ishodištu faznog prostora kada $t \to +\infty$, ako je ispunjen uslov:

$$\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mu_2 \equiv \frac{\sigma_{min}(G^{\frac{1}{2}})}{\sigma_{max}(G^{-\frac{1}{2}}P)}, \tag{79}$$

gde je P jedinstvena, realna, simetrična i pozitivno određena matrica, koja predstavlja rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$(A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2 L) = -2G, \tag{80}$$

Dokaz. Neka:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}_1^T(t) P \mathbf{x}(t), \tag{81}$$

bude agregaciona funkcija za dati sistem. Koristeći istu metodologiju kao u prethodnom slučaju, dobija se:

$$\dot{V}(\mathbf{x}_1) = -2\mathbf{x}_1^T G \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_1 P \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \tag{82}$$

Neka je ispunjen uslov, dat jed. (79). Tada je:

$$\sigma_{max}(G^{-\frac{1}{2}}P)\|\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\| \leq \sigma_{min}(G^{\frac{1}{2}})\|\mathbf{x}_1\| \tag{83}$$

jer je na osnovu *Pretpostavke* 1:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\| \tag{84}$$

Ako se iskoriste sledeće nejednakosti:

$$\left\| G^{-\frac{1}{2}} P \mathbf{f}_1 z \right\| \leq \sigma_{\max} (G^{-\frac{1}{2}} P) \| \mathbf{f}_1 \| \qquad (85)$$

$$\left\| G^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1 \right\| \geq \sigma_{\min} (G^{\frac{1}{2}}) \| \mathbf{x}_1 \| \qquad (86)$$

i povežu sa nejed. (83), dobija se:

$$\left\| G^{-\frac{1}{2}} P \mathbf{f}_1 \right\| \leq \left\| G^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1 \right\| , \qquad (87)$$

odnosno:

$$(G^{-\frac{1}{2}} P \mathbf{f}_1)^T (G^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1) \leq (G^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1)^T (G^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1) \qquad (88)$$

ili:

$$\mathbf{f}_1^T P \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_1^T G \mathbf{x}_1 , \qquad (89)$$

i konačno:

$$-2\mathbf{x}_1^T G \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_1^T P \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \leq 0 . \qquad (90)$$

Na osnovu prethodnog rezultata lako se konstatuje da je funkcija $V(\mathbf{x}_1)$ pozitivno određena u odnosu na $\mathbf{x}_1$ a njen totalni izvod duž rešenja sistema je, očigledno negativno određen, tako da se može pisati:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \| \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_0) \| \to 0 \\ &za \quad \mathbf{x}_0 \in \aleph\left(\left[L - I_{n_2} \right]\right) \end{aligned} \qquad (91)$$

Imajući u vidu linearnu zavisnost između kovektora stanja, jed. (48), može se konstatovati:

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{x}_2(t, \mathbf{x}_0) \| = \| L\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_0) \| \leq \\ &\leq \|L\| \ \| \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_0) \| \end{aligned} \qquad (92)$$

što dovodi i do sledećeg konačnog zaključka:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \| \mathbf{x}_2(t, \mathbf{x}_0) \| \to 0 \\ &za \quad \mathbf{x}_0 \in \aleph\left(\left[L - I_{n_2} \right]\right) \end{aligned} \qquad (93)$$

čime je završen traženi dokaz [23].

Kada je u pitanju stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, moguće je dati sledeća dva rezultata.

Teorema 5. Sistem dat jed. (16.1) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\tau, \alpha, \beta, Q\}$, $\alpha < \beta$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$(\Lambda(M) + 2\mu)t < \ln(\frac{\beta}{\alpha}), \qquad (94)$$

$$\|\mathbf{f}_p(\mathbf{y}(t))\| \leq \mu \| E\mathbf{y}(t) \|, \quad \mu = const., \qquad (95)$$

gde je:

$$\Lambda(M) = \max \left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}^T(t) M \mathbf{x}(t)&: \ \mathbf{x}(t) \in W_k \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ &\mathbf{x}^T(t) E^T P E \mathbf{x}(t) = 1 \end{aligned} \right\}, \qquad (96)$$

a:

$$M = A^T PE + E^T PA. \qquad (97)$$

Dokaz. Ako se agregaciona funkcija usvoji kao:

$$V(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}^T(t) E^T PE \ \ \mathbf{y}(t), \qquad (98)$$

tada ona predstavlja pozitivno određenu kvadratnu formu na $\{W_k \setminus \{\mathbf{0}\}\}$ ako je matrica $P = P^T > 0$.

Diferencirajući $V(\mathbf{y}(t))$ duž kretanja sistema, datog jed. (66), dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{y}(t)) = {} & \mathbf{y}^T(t)(A^T PE + E^T PA)\mathbf{y}(t) \\ & + 2\mathbf{y}^T(t) E^T P \mathbf{f}_p(\mathbf{y}(t)), \end{aligned} \qquad (99)$$

odnosno, koristeći jed. (96) i jed. (97), dobija se:

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t)) \le (\Lambda(M) + 2\mu)V(\mathbf{y}(t)). \qquad (100)$$

Integraljenjem prethodne nejednačine, dobija se:

$$V(\mathbf{y}(t)) \le V(\mathbf{y}_0)e^{(\Lambda(M)+2\mu)t}, \qquad (101)$$

a koristeći činjenicu da je $\|\mathbf{y}_0\|_Q^2 < \alpha$ i jed. (94), nije teško pokazati da važi:

$$\mathbf{y}^T(t)Q\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^T E^T PE\,\mathbf{y}(t) = \|\mathbf{y}(t)\|_Q^2 < \beta, \qquad (102)$$

što je i trebalo pokazati.

Teorema 6. Neka su *Pretpostavka* 1 i jed. (46) zadovoljene. Tada su netrivijalna rešenja sistema, datog jed. (67–68), stabilna na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2, \Gamma\}$, $\alpha \le \beta_1$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$2(\Lambda(A_s) + \mu)t \le \ln\frac{\beta_1}{\alpha}, \qquad (103)$$

$$\|L\|^2 \le \frac{\beta_2}{\beta_1}, \qquad (104)$$

$$\|\mathbf{f}_{p1}(\mathbf{x}_1(t))\| \le \mu\|\mathbf{x}_1(t)\|, \qquad (105)$$

gde je matrica A_s definisana sa:

$$A_s = \frac{1}{2}\left((A_1 + A_2L)^T + (A_1 + A_2L)\right) \qquad (106)$$

Dokaz. Dokaz se zbog svoje preobimnosti izostavlja a u celosti se može naći u *Debeljković et al. (1986b).*

Za dalja razmatranja robustnosti, od interesa je opis linearnog singularnog sistema u obliku:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_p(t, \mathbf{x}(t)), \qquad (107)$$

gde matrice E i A zadovoljavaju neki od dovoljnih uslova koji obezbeđuju *stabilnost na konačnom vremenskom intervalu.* Nelinearna, nestacionarna funkcija predstavlja najopštiji oblik perturbacija koje deluju na sistem, a uključuje i netačnost modeliranja, tako da se eksplicitan izraz za $\mathbf{f}_p[(\cdot)]^\dagger$ ne može dati. Zbog toga je realno pretpostaviti da su bar poznate neke moguće granice vektora perturbacija i njihovo određivanje predstavlja osnovni zadatak ovog odeljka, i to tako da nominalni sistem zadrži zahtevane osobine stabilnosti.

U posebnom slučaju, sistem, dat jed. (92), može se predstaviti u sledećoj formi:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + F\mathbf{x}(t), \qquad (108)$$

gde $E, A, F \in \mathbf{R}^{n\times n}$, a $F\mathbf{x}(t)$ predstavlja perturbacioni vektor.

Koristeći linearnu, nesingularnu transformaciju sistem, dat jed. (108), može se prevesti u svoju normalnu kanoničku formu:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= A_1\mathbf{x}_1(t) + A_2\mathbf{x}_2(t) + \\ &+ F_1\mathbf{x}_1(t) + F_2\mathbf{x}_2(t),\end{aligned} \qquad (109)$$

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_1(t) + A_4\mathbf{x}_2(t), \qquad (110)$$

gde $\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{x}_1^T(t) \;\; \mathbf{x}_2^T(t)\right]^T$ ne mora obavezno da predstavlja stvarni vektor stanja sistema. U ovom slučaju vektori $F_1\mathbf{x}_1(t)$ i $F_2\mathbf{x}_2(t)$ predstavljaju perturbacije modela. Matrice F_1 i F_2 ne moraju biti poznate u potpunosti, a za ova razmatranja je dovolj-

† $\mathbf{f}_p(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\forall t$.

no poznavati granice njihovih normi. Da bi se pojednostavila naredna izlaganja, usvaja se sledeća pretpostavka.

Pretpostavka 2. Neka matrica L zadovoljava jed. (47) i neka ε_i, $i = 1, 2, 3$ budu takvi pozitivni brojevi da:

$$\| F_1 \| \leq \varepsilon_1, \; \| F_2 \| \leq \varepsilon_2, \; \| L \| \leq \varepsilon_3. \tag{111}$$

Neka sa H bude definisana matrica:

$$H = (A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2 L) + \varepsilon I_{n_1} \tag{112}$$

gde:

$$\varepsilon = 2\Lambda(P)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_3). \tag{113}$$

Sada je moguće izložiti sledeće rezultate.

Teorema 7. Neka su *Pretpostavka* 2 i jed. (46) zadovoljene i neka je matrica Q definisana na sledeći način:

$$Q = diag\begin{bmatrix} P & 0_{n_2} \end{bmatrix} \tag{114}$$

koja je realna, simetrična i pozitivno određena. Tada postoje $\{\tau, \alpha, \beta, Q\}$ – *praktično stabilna* rešenja sistema, datog jed. (109–110), koja zadovoljavaju jed. (45), ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\mu t \leq \ln\frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \tau, \tag{115}$$

gde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i $\mu = \Lambda(H)/\Lambda(P)$ kada je $\Lambda(H) \leq 0$, ili $\mu = \Lambda(H)/\lambda(P)$, kada je $\Lambda(H) > 0$, gde je matrica H definisana jed. (112 – 113), a L zadovoljava jed. (47). Štaviše, ako je $\Lambda(H) \leq 0$, tj. ako je matrica H negativno poluodređena, tada je $\tau = [0,+\infty]$ i moguće je usvojiti $\alpha = \beta$.

Ako je $\Lambda(Z) > 0$, tada je $\tau = [0, T\,]$, $T < +\infty$, a da bi se obezbedilo da $T > 0$, mora da bude $\alpha < \beta$.

Dokaz. Jedina razlika u odnosu na dokaze prethodnih rezultata je činjenica da izbor agregacione funkcije sada treba izvršiti na sledeći način:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}_1^T(t)\big((A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2 L)\big)\mathbf{x}_1(t) \\ &= \mathbf{x}_1^T(t)\big((F_1 + F_2 L)^T P + P(F_1 + F_2 L)\big)\mathbf{x}_1(t). \end{aligned} \tag{116}$$

Koristeći sada *Pretpostavku 2*, dobija se:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_1^T(t)\big((F_1 + F_2 L)^T P + P(F_1 + F_2 L)\big)\mathbf{x}_1(t) = \\ &= 2\mathbf{x}_1^T(t)P(F_1 + F_2 L)\mathbf{x}_1(t) \\ &\leq 2\Lambda(P)\big(\| F_1 \| + \| F_2 \| \cdot \| L \|\big)\| \mathbf{x}_1(t) \|^2 \\ &\leq 2\Lambda(P)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_3)\| \mathbf{x}_1(t) \|^2 = \\ &= \varepsilon \mathbf{x}_1^T(t) I_{n_1} \mathbf{x}_1(t). \end{aligned} \tag{117}$$

Iz prethodne jednačine sledi:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}_1^T(t)\big((A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2 L)\big)\mathbf{x}_1(t) + \\ &+ \varepsilon \mathbf{x}_1^T(t) I_{n_1} \mathbf{x}_1(t) \leq \mathbf{x}_1^T(t) H \mathbf{x}_1(t) \leq \Lambda(H) \| \mathbf{x}_1(t) \|^2. \end{aligned} \tag{118}$$

Preostali deo dokaza identičan je već izloženim postupcima, pa se stoga ovde ne navodi.

Teorema 8. Neka su *Pretpostavka* 2 i jed. (46) zadovoljene i neka je matrica Q definisana jed. (114). Tada postoje $\{\tau, \alpha, \beta, Q\}$ – *praktično stabilna* rešenja sistema, datog jed. (109–110), koja zadovoljavaju jed. (45), ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\mu t \leq \ln\frac{\beta_1}{\alpha}, \quad \forall t \in \tau, \tag{119}$$

$$\| L \|^2 \leq \beta_1 / \beta_2. \tag{120}$$

Propratni tekst i dokaz ove *Teoreme* ni u čemu se ne razlikuje od prethodne, s tom razlikom da umesto matrice Z, treba uneti matricu H [16].

Teorema 9. Neka je $\Delta_\tau = \{\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ i neka su zadovoljeni uslovi *Teoreme* 7. Tada je procena D_c potencijalnog domena $\{\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ – praktične stabilnosti sistema, datog jed. (109–110), definisana sledećom jednačinom:

$$D_c(\Delta_\tau) = \\ = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n: \\ \mathbf{x}(t) \in \left\{ \aleph\left(\begin{bmatrix} L & -I_{n_2} \end{bmatrix} \right) \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_1/\beta_2). \right. \end{array} \right\}, \tag{121}$$

Dokaz. Sledi direktno iz prethodnih *Teorema* [16].

Numerički primeri

Ilustrujmo primenu prethodno izloženih rezultata na konkretnim primerima.

Primer 1. Linearan singularan sistem sa standardnim perturbacionim članom, dat je svojom kanoničkom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja [23].

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t))$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t)$$

Pretpostavka 1 je zadovoljena, tj.:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Zadovoljen je i uslov ranga:

$$rang \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \le 2$$

a na osnovu sledeće matrične jednačine:

$$0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} L$$

određuje se i nepoznata matrica L:

$$L = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polazni nominalni singularni sistem je regularan, što se može lako proveriti korišćenjem izraza, datog jed. (38).

Usvaja se matrica $G = G^T$:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

a odgovarajuća matrična Ljapunovljeva jednačina dobija sledeći oblik:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^T P + \\ + P \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = -2 \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

sa rešenjem:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & 5 \end{bmatrix}, \quad P = P^T > 0.$$

Na osnovu *Teoreme 3.* za usvojeno G i određeno P dobijaju se sledeće singularne vrednosti relevantnih matrica:

$$\sigma_{\min}(G) = \sqrt{\lambda_{\min}(GG^T)} = 1{,}91$$

$$\sigma_{\max}(G) = \sqrt{\lambda_{\max}(GG^T)} = 8{,}33$$

pa su granice, pri kojima perturbovani sistem zadržava svoje osobine, date sa:

$$\mu_1 = \frac{\sigma_{\min}(G)}{\sigma_{\max}(P)} = 0{,}23 \, .$$

U primeni *Teoreme 4.* potrebno je sračunati vrednosti sledećih matrica:

$$G^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad G^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

pa su odgovarajuće singularne vrednosti matrica date sa:

$$\sigma_{\min} = 1{,}38 \qquad \sigma_{\max} = 2{,}69$$

pa je konačno i:

$$\mu_2 = 0{,}51 \, .$$

Može se pokazati da ukoliko se usvoji $G = I$ matrica P uzima vrednost:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

pa su sledstveno granice dozvoljenih perturbacija određene sa: $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1$. U literaturi je pokazano kako se može doći do najviše dozvoljenih granica perturbacija, što ovde nije od interesa.

Zaključak

Rad savremenih sistema automatskog upravljanja mora se kvalitetno odvijati i u uslovima delovanja nepredvidljivih perturbacija različitog porekla. Time se bavi teorija robustnosti. U ovom radu formulisane su i dokazane brojne teoreme koje omogućavaju efikasno utvrđivanje granica prihvatljivih perturbacija pri kome nominalan sistem zadržava svoje bitne osobine u pogledu stabilnosti kako u smislu Ljapunova tako i na konačnom vremenskom intervalu. Izneti rezultati propraćeni su odgovarajućim primerima kako bi se na najprikladniji način prezentovali predloženi postupci i metodološki pristupi.

Dodatak A – Osnovna označavanja

Sa $\aleph(F)$ i $\mathcal{R}(F)$ označavaju se nulti prostor (jezgro) i domen ili područje vrednosti operatora F, sledstveno, tj.:

$$\aleph(F) = \{\mathbf{x}\colon F\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}, \tag{A3}$$

$$\mathcal{R}(F) = \{\mathbf{y} \in \Re^m,\ \mathbf{y} = F\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}, \tag{A4}$$

pri čemu važi:

$$\dim \aleph(F) + \dim \mathcal{R}(F) = n \, . \tag{A5}$$

Literatura:

[1] Bajić, V. B., *Lyapunov's Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.

[2] Bajić, V. B., *Existence of Practically Stable Solutions of Singular Linear Systems*, Technical Report TR95-02, Control Laboratory, Technikon, Natal, RSA, 1995.

[3] Bajić, V. B., D. Lj. Debeljković, Z. Gajić, Existence of Solution Converging Toward the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems, *Proc. SAUM*, Kragujevac, Yugoslavia, June (1992.a) 334–348, also in *Proc. AMSE Conference on System Analysis, Control and Design*, Lyon, France (1994) 171–184.

[4] Bajić, V. B., D. Debeljković, Z. Gajić, B. Petrović, Weak Domain of Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems, *University of Belgrade, ETF, Series: Automatic Control*, (1) (1992.b) 53–62.

[5] Bajić, V. B., D. Lj. Debeljković, M. Lazarević, K. Đurović, On the Robustness of Linear Singular Systems, *Proc. ETRAN Conference*, Niš, Yugoslavia (1994.b) 203–204.

[6] Bajić, V. B., D. Lj. Debeljković, B. B. Bogićević, M. B. Jovanović, Non-Lyapunov Stability Robustness Consideration for Discrete Desriptor Linear Systems, *IMA J. Math. Control and Information*, (15) (1998) 105–115.

[7] Bogićević, B. B., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Non-Lyapunov Stability and Quantitative Measures of Robustness of Linear Discrete-Time Singular Systems, *Proc. SAUM 95*, Novi Sad, Yugoslavia (1995) 250–257.

[8] Campbell, S. L., *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

[9] Campbell, S. L., *Singular Systems of Differential Equations II*, Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

[10] Chen, H. G., K. W. Han, Improved Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems, *IEEE rans. Automat. Cont.*, AC - 39 (4) (1994) 807–810.

[11] *Circuits, Systems and Signal Processing*, Special Issue on Semistate Systems, 5 (1) (1986).

[12] *Circuits, Systems and Signal Processing*, Special Issue: Recent Advances in Singular Systems, 8 (3) (1989).

[13] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Quantitative Measures of Robustness of Generalized State Space Systems, *Proc. AMSE Conference on System Analysis, Control and Design*, Lyon, France (1994.a) 219–230.

[14] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, A. U. Grgić, S. A. Milinković, Further Results in Non-Lyapunov Stability Robustness of Generalized State Space Systems, *Proc. 1st IFAC Workshop on New Trends in Design of Control Systems*, Smolenice, Slovak Republic, 1 (1994.b) 255–260.

[15] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, A. U. Grgić, S. A. Milinković, Non-Lyapunov Stability and Instability Robustness Analysis for Linear Descriptor Systems, *AMSE Periodicals – Advances in Modeling and Analysis*, 49 (1) (1995.a) 59–64.

[16] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, A. U. Grgić, S. A. Milinković, Non-Lyapunov Stability and Instability Robustness Consideration for Linear Singular Systems, *Proc. ECC95*, Roma, Italy (1995.b) 3702–3707.

[17] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Application of Singular Systems Theory in Chemical Engineering*, MAPRET Lecture – Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha, Czech Republic (1996.a).

[18] Debeljković, Lj. D., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Continuous Singular Control Systems*, GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

[19] Debeljković, Lj. D., S. A. Milinković, M.B. Jovanović, Lj. A. Jacić, *Discrete Singular Control Systems*, GIP Kultura, Beograd, 1998a.

[20] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, T. Erić, S. A. Milinković, A Lyapunov Analsyis of Stability Robustness Consideration for Discrete Descriptor Systems, *IMA J. Math. Control and Information*, (15) (1998b) 53–62.

[21] Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, On Practical Stability, *Proc. MELECON Conference*, Madrid (Spain), October (1985) 103–105.

[22] Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems, *Proc. EUROCON Conference*, Paris (France), April (1986) 406–409.

[23] Đurović, K., *Analiza robusnosti stabilnosti Linearnih Vremenski neprekidnih Singularnih Sistema*, magistarski rad, Mašinski fakultet, Beograd, 1996.

[24] Lewis, F. L., A Survey of Linear Singular Systems, *Circ. Syst. Sig. Proc.*, 5 (1) (1986) 3–36.

[25] Lewis, F. L., Recent Work in Singular Systems, *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA (1987) 20–24.

[26] Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, Consistency and Liapunov Stability of Linear Decsriptor Systems: a Geometric Approach, *IMA Journal of Math. Control and Information*, (1985), No.2, 139–151.

[27] Stevens, B. L., *Modeling, Simulation and Analysis with State Variables*, Report LG84RR002, Lockheed – Georgia Co., Marietta, GA, 1984.

[28] Tseng, H. C., P. V. Kokotović, Optimal Control in Singularly Perturbed Systems: The Integral Manifold Approach, *IEEE Proc. on CDC*, Austin, TX (1988) 1177–1181.

[29] Yedavalli, R.K., Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Models, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, AC – 30 (6) (1985) 557–579.