УДК517.9:532.5

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РАСЧЕТУ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ СТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ЛАМТЮГОВА С.Н.

Рассматривается и обосновывается применение методов R-функций, последовательных приближений и Бубнова-Галёркина к расчету стационарного обтекания тел вращения и цилиндрических тел вязкой несжимаемой жидкостью.

Ключевые слова: вязкая жидкость, функция тока, метод *R*-функций, метод последовательных приближений, метод Бубнова-Галёркина.

Key words: viscous fluid, stream function, the *R*-functions method, the method of successive approximations, the Bubnov-Galerkin method.

Введение

Актуальность исследования. В последнее время математическое моделирование и численный анализ все активнее используются при изучении динамики вязкой жидкости. Необходимость моделировать вязкие течения возникает, например, в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Описывающие их уравнения Навье-Стокса [1 – 3] имеют существенные особенности – нелинейность и наличие малого параметра при старшей производной. Поэтому часто на предварительном этапе анализа ограничиваются линейным приближением. Полное пренебрежение нелинейными членами в системе уравнений Навье-Стокса приводит к системе уравнений Стокса [4, 5]. Однако для задачи двумерного поперечного обтекания цилиндра потоком неограниченной жидкости не существует решения уравнений Стокса (парадокс Стокса) [5, 6]. В этом случае используют линейную систему уравнений Озеена [5].

Если рассматриваемая задача обладает свойствами симметрии и может быть сведена к двумерной, то вместо компонент скоростей жидкости удобно ввести функцию тока [4, 6, 7]. Методы решения внешних задач для уравнения относительно функции тока разработаны недостаточно, что объясняется высоким порядком этого уравнения, его нелинейностью и неограниченностью области, в которой уравнение рассматривается. На наш взгляд привлекательным является использование для решения этого класса задач проекционных методов, поскольку они дают приближенное решение в аналитическом виде, что облегчает дальнейшее применение функции тока для нахождения различных характеристик течения. При этом точно учесть геометрическую информацию, входящую в постановку задачи, позволит использование конструктивного аппарата теории *R*-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [8].

Метод *R*-функций в задачах гидродинамики применялся в работах [9 – 13], но задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью с использованием метода *R*-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования и численного анализа стационарных задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью методом *R*-функций является актуальной научной проблемой.

Эта работа опирается на применение метода *R*-функций к расчету стационарных задач обтекания тел идеальной жидкостью [14].

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является разработка и обоснование нового метода численного анализа стационарных задач обтекания тел вращения и цилиндрических тел вязкой несжимаемой жидкостью. Этот метод основан на совместном применении метода последовательных приближений, структурного метода *R*-функций и проекционного метода Бубнова-Галёркина.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– построить на основании методов теории *R*-функций полную структуру решения краевых задач для функции тока;

– применить метод Бубнова-Галёркина для аппроксимации неопределенных компонент в структуре линейных задач;

– применить метод последовательных приближений и метод Бубнова-Галёркина для аппроксимации неопределенных компонент в структуре нелинейных задач;

– исследовать вопросы сходимости предложенных методов.

1. Описание области течения

Основная сложность при построении численного метода анализа в задачах обтекания связана с бесконечностью области, в которой рассматривается течение. Для построения вычислительного алгоритма, который бы позволил вести расчеты в конечной области, нам понадобится функция [14]

$$f_M(x)=\begin{cases}1-\exp\dfrac{Mx}{x-M}, & 0\le x<M;\\ 1, & x\ge M\quad (M=\mathrm{const}>0).\end{cases}$$

Легко проверить, что она удовлетворяет следующим условиям:

а) $f_M(0)=0$; б) $f'_M(0)=1$;

в) $f'_M(x)\ge 0\ \forall x\ge 0$; г) $f_M(x)\equiv 1\ \forall x\ge M$.

Кроме того, $f_M(x)\in C^{\infty}[0,+\infty)$.

Пусть Ω – область течения, а $\partial\Omega$ – граница обтекаемого тела. Если с помощью конструктивного аппарата теории *R*-функций построена достаточно гладкая функция ω такая, что $\omega = 0$ – нормализованное уравнение $\partial\Omega$, то функция $\omega_M = f_M(\omega)$ такова, что:

1) $\omega_M > 0$ в Ω; 2) $\omega_M\big|_{\partial\Omega} = 0$;

3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -1$, где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$;

4) $\omega_M \equiv 1$, если $\omega_M \ge M$.

Обобщенные решения рассмотренных далее задач будем искать в классе F функций v, которые имеют обобщенные производные до второго порядка включительно и квадратично суммируемы вместе с производными по Ω_1, где Ω_1 – любая конечная часть Ω; на границе $\partial\Omega$ они удовлетворяют однородным краевым условиям соответствующих задач [15].

2. Метод численного анализа задачи расчета обтекания цилиндрического тела

Рассмотрим стационарное обтекание цилиндрического тела потоком вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат (r, φ, z) [3, 4]. В этом случае вектор скорости можно искать в виде

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\ \ v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r},\ \ v_z = 0,$$

где $\psi = \psi(r,\varphi)$ – функция тока.

В линейном приближении (линеаризация Озеена) течение описывается следующей задачей для ψ:

$$\nu\Delta^2\psi + U_\infty A\left(\Delta\psi\right) = 0 \ \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \psi\cdot r^{-1} = U_\infty \sin\varphi, \tag{3}$$

здесь ν – коэффициент вязкости; Δ – оператор Лапласа; $A\zeta = -\cos\varphi\dfrac{\partial\zeta}{\partial r} + \dfrac{\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial\zeta}{\partial\varphi} = -\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$; U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

В задаче (1) – (3) сделаем замену

$$\psi = \omega_M^2\psi_0 + u,$$

где $\psi_0 = U_\infty(r - R^2 r^{-1})\sin\varphi$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R; u – новая неизвестная функция.

Выбор такой замены обусловлен тем, что функция $\omega_M^2\psi_0$ удовлетворяет краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3).

Тогда функция u является решением задачи

$$\nu\,\Delta^2 u + U_\infty\, A(\Delta u) = f \ \text{ в } \Omega, \tag{4}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-1}u = 0, \tag{6}$$

где $f = -\nu\,\Delta^2(\omega_M^2\,\psi_0) - U_\infty\, A(\Delta(\omega_M^2\,\psi_0))$. Заметим, что $f \equiv 0$ в области $\{\omega(r,\varphi) \ge M\}$.

Обобщенным решением задачи (4) – (6) назовем функцию $u \in F$, удовлетворяющую для любой $v \in F$ интегральному тождеству

$$\int_\Omega (\nu\,\Delta u\cdot\Delta v - U_\infty\,\Delta u\cdot Av + \nu\,\Delta(\omega_M^2\psi_0)\cdot\Delta v -$$

$$-U_\infty\,\Delta(\omega_M^2\psi_0)\cdot Av)d\Omega = 0.$$

Обобщенное решение u найдем как предел при $n\to\infty$ решений u_n уравнения (4), рассматриваемого в $\Omega_n = \{(x,y)\in\Omega\big|\ 0 < \omega(x,y) < M_n\} \subset \Omega$. Здесь $\{M_n\}$ – любая возрастающая неограниченная сверху последовательность. Таким образом, последовательность областей $\{\Omega_n\}$ является монотонным исчерпыванием бесконечной области Ω.

В областях Ω_n рассмотрим краевые задачи

$$\nu\,\Delta^2 u_n + U_\infty\, A(\Delta u_n) = f \ \text{ в } \Omega_n, \tag{7}$$

$$u_n\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u_n}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

причем u_n, следуя О.А. Ладыженской [16], продолжены нулем вне Ω_n.

Для решения задач (7) – (8) применим метод Бубнова-Галёркина [17]. Оператор этих краевых задач представим в виде $B = \nu A_0 + U_\infty K$, где $A_0 = \Delta^2$, $K = A(\Delta)$. Оператор A_0 будем рассматривать на множестве $D_0 \subset L_2(\Omega_n)$ функций $u \in C^4(\Omega_n)\bigcap C^1(\bar{\Omega}_n)$, удовлетворяющих краевым условиям (8). На D_0 введем скалярное произведение $[u,v] = \int_\Omega \Delta u\Delta v\, d\Omega$.

Пополнив D_0 в метрике, порожденной этим скалярным произведением, получим энергетическое пространство H_0 с нормой $\|u\|_0^2 = \int\limits_{\Omega_n} (\Delta u)^2 \, d\Omega$. Как следует из результатов работы [17] оператор A_0 является симметричным, положительно-определенным.

Выберем координатную систему $\{\varphi_k\}$, подчинив ее следующим условиям:

1) $\{\varphi_k\} \in H_0$;

2) $\forall N$ элементы $\varphi_1, ..., \varphi_N$ – линейно независимы;

3) координатная система $\{\varphi_k\}$ полна в H_0.

Приближенное решение задач (7) – (8) согласно методу Бубнова-Галёркина будем искать в виде

$$u_{n,N} = \sum_{j=1}^{N} c_{n,j} \varphi_j , \tag{9}$$

где $c_{n,j}$, $j = 1, ..., N$, – решение СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{N} c_{n,j} \{\nu[\varphi_j, \varphi_i] + U_\infty (K\varphi_j, \varphi_i)\} = (f, \varphi_i), \tag{10}$$

$$(f, \varphi_i) = -\nu \int\limits_{\Omega_n} \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \cdot \Delta\varphi_i d\Omega +$$

$$+U_\infty \cdot \int\limits_{\Omega_n} \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \cdot A\varphi_i d\Omega, \quad i = \overline{1, N}.$$

В работе [17] было доказано, что оператор A_0 имеет дискретный спектр, а оператор A_0^{-1} вполне непрерывен в пространстве $L_2(\Omega_n)$. Тогда из результатов статьи С.Г. Михлина [18] следует, что оператор $A_0^{-1}K$ вполне непрерывен в H_0. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Галеркинские приближения $u_{n,N}$ вида (9) при $N \to \infty$ сходятся к обобщенному решению задач (7) – (8), которое определяется интегральным тождеством*

$$\int\limits_{\Omega_n} \Big(\nu \, \Delta u_n \cdot \Delta v - U_\infty \, \Delta u_n \cdot Av + \nu \, \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \cdot \Delta v -$$

$$-U_\infty \, \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \cdot Av\Big) d\Omega = 0. \tag{11}$$

Оценим решение задач (7) – (8) в норме $\|\cdot\|_0$.

Умножив (7) в $L_2(\Omega_n)$ на u_n, получим

$$\nu \|u_n\|_0^2 = -U_\infty \, (A(\Delta u_n), u_n)_{L_2(\Omega_n)} + (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}.$$

Применив первую формулу Грина, формулу Остроградского-Гаусса и учитывая краевые условия, получим, что $(A(\Delta u_n), u_n)_{L_2(\Omega_n)} = 0$. Тогда

$$\nu \|u_n\|_0^2 = (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}.$$

Применив неравенство Коши-Буняковского, неравенство [16]

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega_n)} \le c_1 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega_n)} = c_1 \|u\|_0 \tag{12}$$

и неравенство Юнга, получим оценку

$$\|u_n\|_0 \le \frac{c_1}{\nu} \|f\|_{L_2(\Omega_n)}.$$

Для построения координатной последовательности воспользуемся полной системой частных решений уравнения $\Delta^2 u = 0$ [19] и структурным методом *R*-функций [8].

Теорема 2 [20, 21]. *При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot r^{-1} \to 0$ при $r \to +\infty$) краевым условиям (5) и условию на бесконечности (6) точно удовлетворяет функция вида*

$$u = \omega_M^2 \Phi_1 + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2. \tag{13}$$

Аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 структуры (13) будем искать в виде

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k, \quad \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j,$$

где

$$\{\varphi_k(r, \varphi)\} = \{r^{-k} \cos k\varphi, r^{-k} \sin k\varphi; k = 1, 2, ...;$$

$$r^{2-k} \cos k\varphi, r^{2-k} \sin k\varphi, \ k = 3, 4, ...\},$$

$$\{\tau_j(r, \varphi)\} = \{\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, r^j \cos j\varphi, r^j \sin j\varphi,$$

$$r^{j+2} \cos j\varphi, r^{j+2} \sin j\varphi, j = 1, 2, ...\}.$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\{\varphi_i(r, \varphi)\} = \{\omega_M^2(r, \varphi) \varphi_k(r, \varphi),$$

$$\omega_M^2(r, \varphi)(1 - \omega_M(r, \varphi)) \tau_j(r, \varphi)\}. \tag{14}$$

Значения коэффициентов α_k $(k = 1, 2, ..., m_1)$ и β_j $(j = 1, 2, ..., m_2)$ в соответствии с методом Бубнова-Галёркина найдем из условия ортогональности невязки первым N $(N = m_1 + m_2)$ элементам последовательности (14). Это приводит к СЛАУ вида (10).

Последовательность $\{u_n\}$ является слабокомпактной в H_0, значит, из неё можно выделить сходящуюся к некоторой $u^* \in H_0$ подпоследовательность. Переходя по этой подпоследовательности к пределу в интегральном тождестве (11), получим, что u^* является обобщенным решением задачи (4) – (6). Кроме того, из результатов работы [16] следует единственность решения линейной задачи (4) – (6), а значит, вся последовательность $\{u_n\}$ сходится к u^*.

Теорема 3. *Функции* u_n *при* $M_n \to \infty$ *сходятся к единственному обобщенному решению задачи* (4) – (6).

Рассмотрим теперь общую (нелинейную) задачу для ψ [7]:

$$\nu\Delta^2\psi = J(\Delta\psi, \psi) \text{ в } \Omega, \tag{15}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \psi\cdot r^{-1} = U_\infty \sin\varphi, \tag{17}$$

где $J(\Delta\psi, \psi)$ – якобиан функций $\Delta\psi$ и ψ.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методами последовательных приближений, *R*-функций и Бубнова-Галёркина.

В задаче (15) – (17) сделаем замену $\psi = u_0 + u$, где u – новая неизвестная функция, а u_0 – решение задачи:

$$\nu\Delta^2 u_0 + U_\infty A(\Delta u_0) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{18}$$

$$u_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-1} u_0 = U_\infty \sin\varphi. \tag{20}$$

Задача (18) – (20) может быть решена с помощью метода, описанного выше.

Тогда для функции u получим краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\nu\Delta^2 u = J(\Delta(u_0+u), u_0+u) + U_\infty A(\Delta u_0) \text{ в } \Omega, \tag{21}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{22}$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-1} u = 0. \tag{23}$$

Обобщенным решением задачи (21) – (23) назовём функцию $u \in F$, удовлетворяющую для любой $v \in F$ интегральному тождеству

$$\nu\int_\Omega \Delta u \Delta v \, d\Omega = \int_\Omega J(u_0+u, v)\Delta(u_0+u)\, d\Omega +$$

$$+U_\infty \int_\Omega A u_0 \Delta v \, d\Omega. \tag{24}$$

Обобщенное решение u задачи (21) – (23) найдем как предел при $n\to\infty$ решений u_n уравнения (21), рассматриваемого в последовательности областей $\{\Omega_n\}$, которая является монотонным исчерпыванием бесконечной области Ω.

Для решения задачи (21) – (23) в области Ω_n построим итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности. Пусть начальное приближение $u_n^{(0)}$ задано. Если k-е приближение $u_n^{(k)}$ построено, то новое $(k+1)$-е приближение $u_n^{(k+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\nu\Delta^2 u_n^{(k+1)} = J(\Delta(u_0+u_n^{(k)}), u_0+u_n^{(k)}) +$$

$$+U_\infty A(\Delta u_0) \text{ в } \Omega_n, \tag{25}$$

$$u_n^{(k+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u_n^{(k+1)}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{26}$$

продолженное нулем вне Ω_n.

Умножив уравнение (25) скалярно в $L_2(\Omega_n)$ на $u_n^{(k+1)}$, используя свойство якобиана [22]: для любых $u, v \in W_2^2(\Omega)$, $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega J(u,v) w\,dxdy = \int_\Omega J(v,w) u\,dxdy, \tag{27}$$

вторую формулу Грина для последнего слагаемого, получим:

$$\nu\left\|u_n^{(k+1)}\right\|_0^2 = \left(J(u_0+u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0+u_n^{(k)})\right)_{L_2(\Omega_n)} +$$

$$+U_\infty (Au_0, \Delta u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)}. \tag{28}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (28) используем неравенство [22]

$$\left|(J(u,v), \Delta u)_{L_2(\Omega_n)}\right| \le$$

$$\le c\|v\|_{W_2^2(\Omega_n)} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_n)} \|\Delta u\|_{L_2(\Omega_n)},$$

$$u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_n),$$

неравенство (12) и неравенство Юнга, второе слагаемое справа оценим, используя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Юнга. В результате получим оценку

$$\left\|u_n^{(k+1)}\right\|_0^2 \le \frac{8c^2c_1^4}{\nu^2}\left(\|u_0\|_0^4 + \left\|u_n^{(k)}\right\|_0^4\right) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2}\|u_0\|_0^2 .$$

Пусть $\|u_0\|_0 \le L_0$, $\left\|u_n^{(k)}\right\|_0 \le L$, тогда

$$\left\|u_n^{(k+1)}\right\|_0^2 \le \frac{8c^2c_1^4}{\nu^2}(L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2}L_0^2 .$$

Значит, условие ограниченности $\left\|u_n^{(k+1)}\right\|_0 \le L$ будет выполнено, если $\frac{8c^2c_1^4}{\nu^2}(L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2}L_0^2 \le L^2$, откуда

$$\frac{1}{\nu} \le \frac{L}{2c_1\sqrt{2c^2c_1^2(L_0^4 + L^4) + U_\infty^2 L_0^2}} . \tag{29}$$

Таким образом, при соответствующем выборе начального приближения $u_n^{(0)}$ и при выполнении условия (29) решение $u_n^{(k+1)}$ на каждом шаге итерационного процесса (25) – (26) ограничено в норме $\|\cdot\|_0$.

Для доказательства сходимости последовательности $u_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, рассмотрим разности $\delta u_n^{(k+1)} = u_n^{(k+1)} - u_n^{(k)}$. Они удовлетворяют уравнению

$$\nu\Delta^2 \delta u_n^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) -$$

$$-J(\Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}) \text{ в } \Omega_n ,$$

и краевым условиям

$$\left.\delta u_n^{(k+1)}\right|_{\partial\Omega} = 0 , \quad \left.\frac{\partial \delta u_n^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0 \cdot$$

Для оценки $\delta u_n^{(k+1)}$ по норме $\|\cdot\|_0$ было использовано равенство

$$J(u_1, v_1) - J(u_2, v_2) = J(u_1, v_1 - v_2) + J(u_1 - u_2, v_2),$$

свойство (27), неравенство [22]

$$\left|(J(u,v), w)_{L_2(\Omega)}\right| \le c_0 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)} ,$$

$$u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), \quad w \in L_2(\Omega)$$

и неравенство Юнга. Получено, что

$$\left\|\delta u_n^{(k+1)}\right\|_0 \le \frac{2c_0}{\nu}(L_0 + L)\left\|\delta u_n^{(k)}\right\| .$$

Пусть $\frac{2c_0(L_0 + L)}{\nu} \le \alpha < 1$, т.е.

$$\frac{1}{\nu} \le \frac{\alpha}{2c_0(L_0 + L)} . \tag{30}$$

Тогда $\left\|\delta u_n^{(k+1)}\right\|_0 \le \alpha\left\|\delta u_n^{(k)}\right\|_0 \le \ldots \le \alpha^k \left\|\delta u_n^{(1)}\right\|_0$ и

$$\left\|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\right\|_0 < \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\gamma , \tag{31}$$

где $\gamma = \left\|\delta u_n^{(1)}\right\|_0$. Поскольку $\alpha < 1$, то $\left\|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\right\|_0 \to 0$ при $k \to \infty$, т.е. последовательность $\{u_n^{(k)}\}$ является фундаментальной. В силу полноты пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_n)$ это означает, что последовательность $\{u_n^{(k)}\}$ сходится (с геометрической скоростью), т.е. существует функция $u_n^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_n)$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_n^{(k)} = u_n^*$.

Устремив в неравенстве (31) p к ∞, получим оценку для k -го приближения:

$$\left\|u_n^* - u_n^{(k)}\right\|_0 \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\gamma . \tag{32}$$

Предельная функция u_n^* является единственным обобщенным решением задачи (21) – (23) в ограниченной области Ω_n, имеет место равенство

$$\nu\left\|u_n^*\right\|_0^2 = \left(J(u_0 + u_n^*, u_n^*), \Delta(u_0 + u_n^*)\right)_{L_2(\Omega_n)} +$$

$$+U_\infty\,(Au_0, \Delta u_n^*)_{L_2(\Omega_n)}$$

и оценка

$$\left\|u_n^*\right\|_0^2 \le \frac{8c^2c_1^4}{\nu^2}(L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2}L_0^2 . \tag{33}$$

Объединив условия (29) и (30) для $1/\nu \sim \mathrm{Re}$, получим оценку

$$1/\nu <$$

$$< \min\left\{\frac{L}{2c_1\sqrt{2c^2c_1^2(L_0^4 + L^4) + U_\infty^2 L_0^2}},\ \frac{\alpha}{2c_0(L_0 + L)}\right\} . \tag{34}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Последовательные приближения, формируемые по схеме (25) – (26), сходятся при малых числах Рейнольдса к единственному обобщенному* *решению* $u_n^* \in F$ *задачи* (21) – (23), *рассматриваемой в ограниченной области* Ω_n, *причем для* k*-го приближения оценка погрешности имеет вид* (32). *Условие малости формулируется в виде неравенства* (34).

Структура решения краевой задачи (21) – (23) имеет вид (13). Неопределенные компоненты структуры аппроксимируем как и в линейной задаче. Итак, на каждой итерации в области Ω_n приближенное решение задачи (25) – (26) будем искать в виде

$$u_{n,N}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{N} c_{n,j}^{(k+1)} \varphi_j ,$$

где $c_{n,j}^{(k+1)}$, $j = 1,...,N$, являются решением СЛАУ:

$$\sum_{j=1}^{N} c_{n,j}^{(k+1)} \nu[\varphi_j, \varphi_i] = (f^{(k+1)}, \varphi_i), \quad i = \overline{1,N}, \tag{35}$$

здесь

$$(f^{(k+1)}, \varphi_i) =$$

$$= \int_{\Omega_n} [J(u_0 + u_n^{(k)}, \varphi_i)\Delta(u_0 + u_n^{(k)}) + U_\infty A u_0 \Delta\varphi_i] d\Omega .$$

Отметим, что матрица системы (35) не изменяется от итерации к итерации, вычисляется лишь один раз на первой итерации, а затем на каждой итерации пересчитывается лишь правая часть $(f^{(k+1)}, \varphi_i)$.

Из теорем сходимости метода Бубнова-Галёркина [17] и результатов для линейной задачи следует, что при $N \to \infty$ последовательность $u_{n,N}^{(k)}$ сходится к $u_n^{(k)}$, а $u_n^{(k)}$ при числах Рейнольдса, удовлетворяющих (34), сходится к u_n^*, причем функция u_n^* удовлетворяет интегральному тождеству (24), записанному для Ω_n, и имеет место оценка (33).

Следуя работам О.А. Ладыженской [15, 16], из последовательности $\{u_n^*\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_j}^*\}$. Переходя к пределу при $n_j \to \infty$ в интегральном тождестве, определяющем решение $u_{n_j}^*$, получим, что предельная функция u^* удовлетворяет тождеству (24) при любой $v \in F$, т.е. является обобщенным решением задачи (21) – (23).

Теорема 5. *Функции* u_n *при* $M_n \to \infty$ *сходятся к обобщенному решению задачи* (21) – (23).

Вычислительный эксперимент [20] показал, что в задачах обтекания кругового и эллиптического цилиндров последовательные приближения сходятся при $Re \le 10$. При реализации метода последовательных приближений в качестве $u_n^{(0)}$ выбирались решения линейных задач, полученные в [20].

3. Метод численного анализа задачи расчета обтекания тел вращения

Рассмотрим теперь стационарное обтекание тела вращения потоком вязкой несжимаемой жидкости в сферической системе координат (r, θ, φ) [3, 4]. В этом случае вектор скорости можно искать в виде

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0,$$

где $\psi = \psi(r, \theta)$ – функция тока.

В линейном приближении (линеаризация Стокса) течение описывается следующей задачей для ψ [3, 4]:

$$E^2\psi = 0 \text{ в } \Omega, \tag{36}$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{37}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \psi \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2\theta, \tag{38}$$

а общая (нелинейная) задача для ψ имеет вид [5 – 7]

$$\nu E^2\psi = B\psi \text{ в } \Omega, \tag{39}$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{40}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \psi \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2\theta . \tag{41}$$

Здесь ν – коэффициент вязкости, U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности,

$$E\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right),$$

$$B\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E\psi}{\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\,\text{ctg}\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E\psi .$$

Исследование разрешимости задач (36) – (38) и (39) – (41), а также исследование применимости методов *R*-функций, последовательных приближений и Бубнова-Галёркина проводится по аналогичным п. 2 схемам.

В линейной задаче (36) – (38) делаем замену

$$\psi = \omega_M^2 \psi_0 + u ,$$

где $\psi_0 = 0,25 U_\infty (r-R)^2 (2 + Rr^{-1}) \sin^2 \theta$ – решение Стокса для задачи про обтекание сферы радиуса R, u – новая неизвестная функция.

Тогда линейная задача в ограниченной области Ω_n имеет вид:

$$E^2 u_n = f \text{ в } \Omega_n , \quad (42)$$

$$u_n\big|_{\partial\Omega} = 0 , \ \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 , \quad (43)$$

где $f = -E^2(\omega_M^2 \psi_0)$, u_n продолжены нулем вне Ω_n.

Для решения задачи (42) – (43) также имеет место теорема о сходимости галёркинских приближений и справедлива оценка

$$\|u_n\|_0 \le c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_n)} .$$

Для нелинейной задачи (39) – (41) делаем замену $\psi = u_0 + u$, где u – новая неизвестная функция, а u_0 – решение задачи:

$$E^2 u_0 = 0 \text{ в } \Omega ,$$

$$u_0\big|_{\partial\Omega} = 0 , \ \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 ,$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-2} u_0 = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2 \theta .$$

Тогда получим нелинейную задачу в ограниченной области

$$\nu E^2 u = B(u_0 + u) \text{ в } \Omega_n , \quad (44)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 , \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 . \quad (45)$$

Итерационный процесс решения задачи (44), (45) строится аналогично схеме (25), (26). Имеет место теорема о сходимости последовательных приближений при малых числах Рейнольдса в конечной области Ω_n. Условие малости числа Рейнольдса имеет вид

$$\frac{1}{\nu} < \min \left\{ \frac{L}{2\sqrt{c_0^2 + 4c_3^2 c_1^4}(1 + c_2 c_1)(L_0^2 + L^2)}, \right.$$

$$\left. \frac{\alpha}{4(1 + c_2 c_1)(L_0 + L)\sqrt{c_0^2 + 2c_3^2 c_1^4}} \right\} .$$

Структура решения задач (36) – (38) и (39) – (41) также дается формулой (13). Неопределенные компоненты аппроксимируются функциями, построенными на основании полной системы частных решений уравнения $E^2 u = 0$ [4, 23].

Вычислительный эксперимент показал, что в задачах обтекания сферы и эллипсоида вращения последовательные приближения сходятся при $\text{Re} < 10$. При реализации метода последовательных приближений в качестве $u_n^{(0)}$ выбирались решения линейных задач, полученные в [23].

Выводы

Впервые предложен и обоснован численный метод расчета стационарного обтекания тел вращения и цилиндрических тел вязкой несжимаемой жидкостью, основанный на совместном применении методов последовательных приближений, R-функций и Галёркина. Он отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает все краевые условия задачи, в том числе и условие на бесконечности. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных технологических и физико-механических процессов. Следует также отметить, что благодаря использованию структуры (13) получаемые приближенные решения u_n определены и вне Ω_n, причем на бесконечности выходят на асимптотику, которая входит в постановку задачи.

Сказанное выше определяет *научную новизну* и *практическую значимость* полученных результатов.

Литература: 1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: РХД, 2003. Т. 1. 452 с.; Т. 2. 452 с. **2.** *Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. 736 с. **3.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. **4.** *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А.* Химическая гидродинамика. М.: Квантум, 1996. 336 с. **5.** *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с. **6.** *Шкадов В.Я., Запрянов З.Д.* Течения вязкой жидкости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 200 с. **7.** *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с. **8.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **9.** *Колосова С.В.* Применение проекционных методов и метода *R*-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. … к.ф.-м.н.: 01.01.07 Вычислительная математика. Харьков: ХИРЭ, 1972. 85 с. **10.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение метода *R*–функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. 2003. № 602. С. 61–67. **11.** *Суворова И.Г.* Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. № 31. С. 141–148. **12.** *Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В.* Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 2. С. 50–57. **13.** *Максименко-Шейко К.В.* Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом *R*-функций // Доп. НАН України. 2005. № 9. С. 41–46. **14.** *Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л.* Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. № 9. 1972. С. 837–839. **15.** *Киселев А.А., Ладыженская О.А.* О решении линеаризованных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости // ДАН СССР. 1954. Т. XCV, № 6. С. 1161–1164. **16.** *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с. **17.** *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. **18.** *Михлин С.Г.* Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. н. 1950. Вып. 21, № 135. С. 3–23. **19.** *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с. **20.** *Ламтюгова С.Н., Сидоров М.В.* Математическое моделирование задач обтекания в цилиндрической системе координат // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2014. №1105, Вип. 24. С. 111–121. **21.** *Lamtyugova S.N., Sidorov M.V.* Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body applying the R-functions method and the Galerkin method // Econtechmod. 2014. Vol. 3, No. 3. P. 43-50. **22.** *Chueshov I., Duan J., Schmalfuss B.* Probabilistic dynamics of two-layer geophysical flows // Stochastics and dynamics. 2001. Vol. 1, No. 4. P. 451–475. **23.** *Lamtyugova S.N., Sidorov M.V.* Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R-function method // Journal of Engineering Mathematics, 2015. V. 91, No. 1. P. 59–79. (DOI: 10.1007/s10665-014-9746-x).

Поступила в редколлегию 15.06.2015

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Ламтюгова Светлана Николаевна, аспирантка каф. прикладной математики ХНУРЭ, ассистент каф. высшей математики ХНУГХ им. А.Н. Бекетова. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория *R*-функций и её приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +38 (057) 7021436.