

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПЛАСТИН ДЛЯ  
РАСЧЕТА ПЛИТ, РАБОТАЮЩИХ НА ПРОДАВЛИВАНИЕ В КОНТЕКСТЕ  
ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

USING OF THE CLASSICAL ELASTICITY THEORY OF PLATES FOR CALCULATING  
OF PUNCHING SHEAR OF SLABS IN THE CONTEXT OF ENSURING OF  
SUSTAINABLE DEVELOPMENT IN CONSTRUCTION



ДЕМЧИНА Кристина  
DEMCHYNA Khrystyna  
[dklviv@gmail.com](mailto:dklviv@gmail.com)

Национальный университет «Львовская политехника», Институт  
строительства и инженерии окружающей среды, кафедра  
строительного производства,  
ул. Карпинского, 6, Львов, 79013, Украина



ОСАДЧУК Тарас  
OSADCHUK Taras  
[osadchuktaras92@gmail.com](mailto:osadchuktaras92@gmail.com)

Национальный университет «Львовская политехника», Институт  
строительства и инженерии окружающей среды, кафедра  
строительных конструкций и мостов,  
ул. Карпинского, 6, Львов, 79013, Украина

Приведен метод достижения устойчивого развития в строительстве путем использования теории упругости пластин для расчета пенобетонных плит, армированных стальными сетками с различной анкерровкой, работающих на продавливание. Согласно схеме испытания было принято свободное опирание плит с предположением их разной работы в двух взаимно перпендикулярных направлениях в соответствии с размещением анкерровки арматурных стержней в верхнюю зону плит по торцам. В связи с тем, что экспериментальные значения соотношений между моментами по двум направлениям превышают полученные расчетным путем на 18,6% (>15%), что связано со значительной пластичностью пенобетона, использование теории упругости пластин требует особых дополнительных подходов. В свою очередь, для материалов более упругих (бетон и стекло), эту теорию можно применять.

**Ключевые слова:** устойчивое развитие, пенобетон, стекло, продавливание, теория упругости пластин.

A method for achieving of sustainable development in construction by using of the elasticity theory of plates for calculation of reinforced by steel nets with different anchoring foam concrete slabs, which working on punching shear, is proposed. Local crumpling and punching shear of the road base material, foundation slabs and floors in the junctions with walls, columns or equipment, in case of foam concrete, are insufficiently studied and actual for researches. According to a test scheme free bearing plates with the assumption of their different work in two mutually perpendicular directions in accordance with the placement of anchoring reinforcing bars in the upper zone plates on end faces was made. Due to the fact that relations between the experimental values of moments on the two directions and obtained by calculation exceed 18.6% (> 15%), which is associated with significant plasticity of foam concrete, using the elasticity theory of plates requires special additional approaches. In turn, for more resilient materials (such as concrete and glass), this theory can be applied.

**Keywords:** sustainable development, foam concrete, glass, punching shear, elasticity theory of plates

**Introduction.** The current tendency to simplify the manufacturing process, reduction of material consumption and cost of

construction products is an important direction of ensuring of sustainable development, which determine the relevance

of the use of foam concrete as a modern building material.

Effectiveness of non-autoclave foam concrete is associated with the minimum energy consumption of foaming equipment (5 - 10 kW), low consumption of materials (air acts as a placeholder), relative homogeneity and variability properties (from the thermal insulation foam concrete with a density grade D150 to structural - to density grade D1200) [6].

In road construction the use of foam concrete road base [5], as a substitute for the classic base with tamped sand and gravel, especially in the construction of roads in marshy, peat soils and undermined territories, reduces the complexity, duration and cost of construction of roads, load on the underlying soil.

In civil engineering [3] foam concrete is used as a structural, thermal and sound insulation material, with a density grade more D600 in foundations, floor and wall constructions.

Local crumpling and punching shear of foam concrete as base material of the road base, foundation slabs and floors in the junctions with walls, columns or equipment are insufficiently studied. However, these aspects are relevant for research in connection with a possible reconstruction of buildings or increase the payload in the case of foam concrete for ensuring of sustainable development in the construction (increasing reliability, reducing material consumption and cost of construction products).

**Вступление.** На сегодняшний день тенденция к упрощению технологии изготовления, уменьшению материалоемкости и себестоимости строительной продукции является важным направлением обеспечения устойчивого развития в строительстве и предопределяет актуальность использования пенобетона, как современного строительного материала.

Эффективность неавтоклавого пенобетона связана с минимальным энергопотреблением пенообразующего оборудования (5 - 10 кВт), низкой материалоемкостью (воздух играет роль заполнителя), относительной

однородностью и вариативностью свойств (от теплоизоляционного пенобетона с маркой по плотности D150 до конструктивного D1200) [6].

В дорожном строительстве применение пенобетонного дорожного основания [5], как замены классического основания из трамбованного песка и щебня, особенно при строительстве дорог на болотистых, торфяных грунтах и на подрабатываемых территориях, приводит к уменьшению трудоемкости, продолжительности и стоимости строительства дорог, уменьшению нагрузки на нижележащие грунты.

В гражданском строительстве [3] пенобетон используется как конструктивный, тепло- и звукоизоляционный материал, с маркой по плотности больше D600 в фундаментах, конструкциях перекрытий и стенах.

Местное смятие и продавливание пенобетона, как материала для дорожного основания, фундаментных плит и перекрытий в узлах соединения со стенами, колоннами или оборудованием мало изучены. Вместе с тем для обеспечения устойчивого развития в строительстве (увеличение надежности, уменьшение материалоемкости и себестоимости строительной продукции) эти аспекты актуальны для исследований в связи с возможной реконструкцией зданий или увеличением полезной нагрузки в случае применения пенобетона.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Для решения конструктивных и теплоизоляционных задач строительства с применением пенобетона в НУ «Львовская политехника» были проведены исследования пенобетонных армированных и неармированных плит [2, 4, 5, 6].

**Формулировка цели и задач статьи.** Цель работы - изучение возможности использования классической теории упругости пластин для расчета пенобетонных плит армированных стальными сетками с различной анкерровкой в двух взаимно перпендикулярных направлениях при

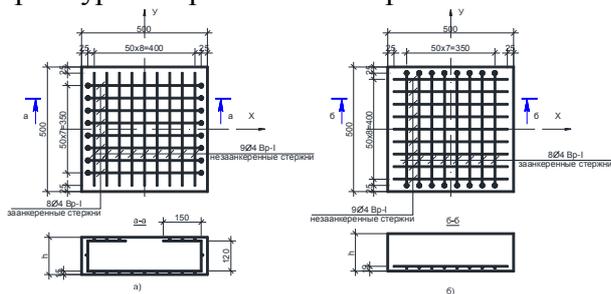
работе их на продавливание.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие задачи:

1) исследовать на продавливание пенобетонные плиты, армированные стальными сетками с различной анкерровкой, для установления соотношений в распределении моментов в двух взаимно перпендикулярных направлениях через деформации пенобетона в сжатой зоне;

2) проверить возможность использования классической теории упругости пластин для расчета усилий в армированных пенобетонных плитах, работающих на продавливание.

**Методика исследования.** Разработана методика экспериментальных исследований [5, 6] на продавливание пенобетонных плит размерами 500x500x150 мм (рис.1), армированных стальными сетками с ячейкой 50x50 мм с арматурной проволоки Ø4Вр-I.



**Рис. 1. Геометрические размеры опытных образцов и их армирование: а) для плит марок П-27, П-29; б) для плит марок П-28, П-30**

●→ - арматурный стержень с анкерровкой в верхнюю зону плиты

Плиты марок П-27, П-28 были изготовлены из пенобетона проектной марки D800, а плиты П-29, П-30 - из пенобетона проектной марки D1000. Все плиты исследовались на испытательном стенде, установленном между плитами пресса марки П-500 (рис.2, а).



**Рис. 2. Общий вид исследовательского оборудования: а) испытательный стенд; б) размещение приборов в верхней зоне (на примере плиты марки П-30)**

Испытательный стенд состоял из опорного столика, изготовленного из металлических уголков L 50x5. Схема испытания отвечала свободному опиранию плит с обеспечением надежной и равномерной установки образцов за счет гипсового раствора по периметру опорного столика. Согласно схеме армирования исследуемых плит (см. рис.1), для решения поставленной задачи было принято предположение, что в направлении достаточной анкерровки арматурных стержней в верхнюю зону плита работала как защемленная, а в направлении отсутствия такой анкерровки как свободно опертая.

**Результаты исследований плит и их анализ.** Для описания работы сжатого пенобетона плит в зависимости от направления размещения заанкеренной горизонтальной арматуры были применены коэффициенты соотношения деформаций  $k_{\epsilon,i}$ .

Коэффициенты  $k_{\epsilon,i}$  определялись как:

$$k_{\epsilon,i} = \frac{\epsilon_{\dot{\epsilon}a-3} \times 10^{-5}}{(\epsilon_{\dot{\epsilon}a-1} + \epsilon_{\dot{\epsilon}a-2}) \times 10^{-5}}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_{\dot{\epsilon}a-1}$ ,  $\epsilon_{\dot{\epsilon}a-2}$ ,  $\epsilon_{\dot{\epsilon}a-3}$  - деформации в верхней зоне плит, вычислены согласно показаниям соответствующих приборов, причем в плитах П-27, П-29 вдоль заанкеренной арматуры располагался микроиндикатор Ив-3, а в плитах П-28, П-30 - Ив-1 и Ив-2.

Исследование деформаций в пенобетоне в верхней зоне плит в двух взаимно перпендикулярных направлениях показали одинаковый характер кривых их соотношений в зависимости от нагрузки (рис.3).

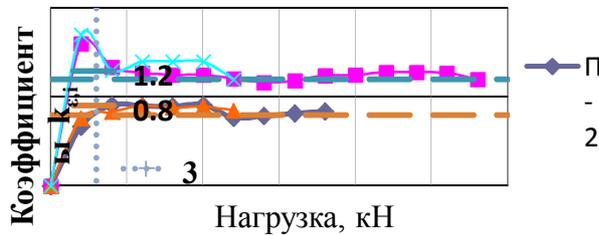


Рис. 3. Изменение коэффициентов соотношения деформаций  $k_{\epsilon,i}$  в зависимости от внешней нагрузки

Соотношение сжимающих деформаций для плит П-27, П-29 составляли  $k_{\epsilon,27} = k_{\epsilon,29} \approx 0,8$ , а для плит П-28, П-30 -  $k_{\epsilon,28} = k_{\epsilon,30} \approx 1,2$ . В связи с этим было выдвинуто предположение, что моменты, которые возникают в плитах от продавливания можно распределить между двумя направлениями –  $M_y$  и  $M_x$  прямо пропорционально деформациям пенобетона в сжатой зоне плит согласно направлению анкеровки арматуры:

$$\frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}} \approx \frac{k_{\epsilon,28;\epsilon,30}}{k_{\epsilon,27;\epsilon,29}} = \frac{1,2}{0,8} = 1,5 \quad (2)$$

Расчетный характер распределения моментов в пенобетонной плите получен в результате расчета ее как тонкой упругой пластины [1, с.421-434; 8, с. 158-164, 217-219].

Продавливание пенобетонной плиты представлено как случай изгиба тонкой прямоугольной пластины, две противоположные грани которой свободно опираются ( $\delta = \pm \frac{a}{2}$ ), а две другие ( $y = \pm \frac{b}{2}$ ) - зашумлены, под действием нагрузки, равномерно распределенной под штампом размером  $u \times v$ . В этом случае, учитывая размеры исследуемых плит и штампа, получаем схему, показанную на рис.4.

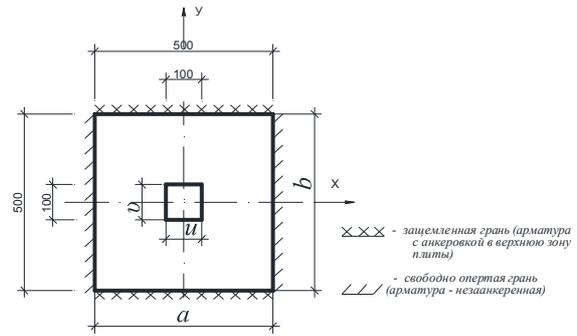


Рис. 4. Плита, свободно опертая по двум противоположным граням (вдоль оси Oy) и зашумленная по двум другим (вдоль оси Ox), под действием нагрузки, приложенной по площади штампа

Согласно [8, с. 158-164, 217-219] прогиб пластины и моменты, вызванные вертикальной нагрузкой можно получить, рассматривая сначала случай, когда все ее грани свободно опираются, а затем - прикладывая по краям  $y = \pm \frac{b}{2}$  изгибающие моменты такой величины, чтобы устранить повороты, вызванные на этих краях действием поперечной нагрузки.

Комбинируя таким способом два случая, свободно опертой по контуру и зашумленной по двум граням плиты, согласно расчетным формулам и табличными данными [1, с.421-434; 8, с. 158-164, 217-219] были рассчитаны соответствующие значения моментов в центре  $i$ -той плиты и их соотношение при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,17$ , полученном авторами для используемого пенобетона:

$$\frac{M_y}{M_x} = \frac{\beta_1 \cdot P}{\beta \cdot P} = \frac{0,175 \cdot P}{0,143 \cdot P} = 1,22, \quad (3)$$

где  $\frac{M_y}{M_x}$  - соотношение моментов для

плит марок П-27÷П-30;

$$M_x = (M_x)_{\max} = \beta(u \times v) \times q = \beta P;$$

$$M_y = (M_y)_{\max} = \beta_1(u \times v)q = \beta_1 P;$$

$\beta$  и  $\beta_1$  - коэффициенты, зависящие от соотношения сторон пластины и размеров прямоугольной (квадратной) площади нагружения.

Таким образом, было установлено, что теоретически, моменты, которые возникают в плитах от продавливания распределяются между двумя направлениями -  $M_y$  и  $M_x$  в соотношении немного меньшем, чем опытные деформации вдоль соответствующих осей:

$$\Delta = \frac{1,5 - 1,22}{1,5} = 0,186 = 18,6\%, \quad (4)$$

Расхождение  $\rho = 18,6\%$  достаточно близкое к максимально допустимому значению - 15% (допустимое расхождение между расчетными и экспериментальными характеристиками в строительной науке), можно объяснить работой пенобетона как материала значительно пластичнее по сравнению с бетоном.

Равенство  $\frac{\dot{I}_{\sigma}}{I_{\sigma}} = \frac{k_{\varepsilon,28;\varepsilon,30}}{k_{\varepsilon,27;\varepsilon,29}}$ , видимо,

возможно в зоне действия закона Гука при линейной зависимости между силами и деформациями (например, для таких материалов как бетон, стекло и др.), что объясняется упругой диаграммой деформирования (без проявления значительной пластичности) и описывается следующими зависимостями между деформациями и напряжениями в случае плоского напряженного состояния (на основе третьей гипотезы Кирхгофа -  $\sigma_z = 0$ ) [7; 9; 10]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, \quad (5)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $E$  - модуль упругости,  $G$  - модуль сдвига.

**Выводы.** Обеспечение устойчивого развития в строительстве в значительной мере определяется максимальной надежностью и по возможности минимальными значениями материалоемкости и себестоимости строительной продукции. Положения теории упругости пластин не позволяют в полной мере рассчитывать пенобетонные

плиты, которые находятся под действием усилий продавливания, в связи со значительной пластичностью пенобетона. Отсутствие четких рекомендаций по расчету пенобетонных элементов с учетом реальной диаграммы сжатия пенобетона требует дальнейших исследований в этом направлении.

Положения по расчету изгиба тонких пластин, которые в ряде случаев описаны в работах С. Тимошенко и С. Войновского - Кригера [8, с. 158-164, 217-219], Д. Вайнберга и Е. Вайнберг [1, с.421-434] и других ученых, возможно, справедливы при прямо пропорциональной зависимости между силами и деформациями (для упругой стадии работы материала), в частности для условно упругих (например, бетон) и хрупких (стекло) материалов, которые будут исследованы в дальнейшем.

**Conclusions.** Sustainable development in the construction of a large extent is determined by the maximum possible reliability and minimum values of the consumption of materials and cost of construction products. The elasticity theory of plates does not allow to fully calculate the foam concrete slabs, reinforced by steel nets with different anchoring, which working on punching shear, in connection with the foam concrete works in two mutually perpendicular directions with the presence of significant plastic deformation of the material. The lack of clear guidelines for calculation of foam concrete elements taking into account of the real chart compression foam concrete requires further researches in this direction.

Positions for calculation of bending of thin plates, in some cases are described by S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger [8, p. 158-164, 217-219], D. Weinberg and E. Weinberg [1, p.421-434] and other researchers, are just in proportionately relationship between forces and deformations (elastic stage), particularly for relatively resilient (concrete) and fragile (glass) materials and it will be investigate in future.

**Литература:** 1. Вайнберг Д.В. Пластинки, диски, балки-стенки (прочность, устойчивость, колебания) / Д.В.Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – К.: Гос. изд-во л-ры по стр-ву и архитектуре УССР, 1959. – 1048 с. 2. Верба В.Б. Взаємний зв'язок міцнісних та деформаційних характеристик без автоклавного пінобетону / Верба В.Б., Горніковська І.Б., Демчина Х.Б. та ін. // Сучасне промислове та цивільне будівництво. - Макіївка, ДонНАБА, 2012. - Том 8, Номер 1. - С. 27-35. 3. Демчина Х.Б. Дослідження зминання неавтоклавного пінобетону під штапом в процесі продавлювання плити // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону». - Київ, ДП «НДІБК», 2013, випуск 78, книга 2. - С. 290-297. 4. Демчина Х.Б., Литвиняк О.Я. Дослідження пінобетонних плит армованих фіброю на продавлювання // Науковий вісник будівництва 55: зб. наук. праць. - Харків, 2009. - с. 103-109. 5. Коваль П.М. Вплив армування пінобетонних зразків плит на їх несучу здатність при продавлюванні / Коваль П.М., Демчина Х.Б., Гладишев Г.М. // Дороги і мости: зб. наук. пр. - К., 2008. - с. 123-129. 6. Коваль П. М. Вплив виду армування пінобетонних плит на характер руйнування при продавлюванні / Коваль П.М., Демчина Х.Б., Гладишев Г.М. // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. - Рівне, 2008. - С.176-182. 7. Кузнецова Е.В. Изгиб пластин: Учебное-методическое пособие к решению задач и лабораторному практикуму по исследованию прогибов при нагружении прямоугольных и круглых пластин [Электронный ресурс]. - Перм. Гос. Техн. ун-т. Пермь, 2006. - 32 с. - Режим доступа: [http://pstu.ru/files/file/adm/fakultety/kuznecova\\_e\\_v\\_stroitel'naya\\_mehanika\\_izgib\\_plastin.pdf](http://pstu.ru/files/file/adm/fakultety/kuznecova_e_v_stroitel'naya_mehanika_izgib_plastin.pdf) 8. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки: пер. с англ. / Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. – М.: Наука, 1966. – 635 с. 9. Тимошенко С.П. Теория упругости [Электронный ресурс]: пер. с англ. / Тимошенко С. П., Гудьер Дж. - М.: Наука, 1975. - 576 с. - Режим доступа: [http://pnu.edu.ru/media/filer\\_public/2013/04/10/5-6\\_timoshenko1975.pdf](http://pnu.edu.ru/media/filer_public/2013/04/10/5-6_timoshenko1975.pdf) 10. Шутенко Л.Н. Основы теории упругости и пластичности [Электронный ресурс]: Учебное пособие для студентов строительных специальностей. / Шутенко Л.Н., Засядько Н.А., Чупрынин А.А. - Харьков: ХНАГХ, 2007. - 135 с. - Режим доступа: <http://eprints.kname.edu.ua/4307/4/3.doc>