UDC 517.5

# MORERA-TYPE THEOREM IN THE UNIT CIRCLE

V. Silenko, Candidate of Mathematical and Physical sciences, senior lecturer
Donetsk National University of Economics and Trade named after M. Tugan-Baranovsky, Ukraine

New generalizations of the Morera function holomorphy theorem have been obtained. The precise conditions of growth of $f \in C(\mathbf{H}^2)$ under which the boundary of some hyperbolic rectangle, or the boundary of some hyperbolic four-sided set have the Morera property for the group *NA* of the translations of the hyperbolic plane $\mathbf{H}^2$ have been determined. The cases of two hyperbolic rectangles and two hyperbolic four-sided sets have also been established.

**Keywords:** Pompeiu problem, Pompeiu set, hyperbolic plane, hyperbolic rectangle, hyperbolic four-sided set, Morera type theorem, holomorphy function.

Conference participant, National championship in scientific analytics, Open European and Asian research analytics championship

УДК 517.5

# ТЕОРЕМЫ ТИПА МОРЕРЫ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Силенко В.Е., канд.физ.-мат. наук
Донецкий национальный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, Украина

Получены новые обобщения теоремы Мореры о голоморфности функции. Для группы “сдвигов” *NA* гиперболической плоскости $\mathbf{H}^2$ определены точные условия на рост функций $f \in C(\mathbf{H}^2)$, для которых граница гиперболического прямоугольника или граница гиперболического четырехсторонника являются множествами Мореры. Также рассмотрены случаи двух гиперболических прямоугольников и двух гиперболических четырехсторонников. Найдены примеры функций с нулевыми интегралами по границам гиперболических прямоугольников и функций с нулевыми интегралами по границам гиперболических четырехсторонников, подтверждающие точность полученных условий.

**Ключевые слова:** проблема Помпейю, множество Помпейю, гиперболическая плоскость, гиперболический прямоугольник, гиперболический четырехсторонник, теорема Мореры, голоморфность функции.

Участник конференции, Национального первенства по научной аналитике, Открытого Европейско-Азиатского первенства по научной аналитике

Классическая теорема Мореры характеризует голоморфные функции одной комплексной переменной в терминах интегральных условий. Рассмотрим проблему Мореры на вещественной гиперболической плоскости $H^2$, реализованной в единичном круге $D = \{z \in \mathbf{C}: |z|<1\}$, где C – комплексная плоскость. В модели Пуанкаре гиперболической плоскости $H^2$ единичный круг $D$ трактуется как плоскость Лобачевского с неевклидовым расстоянием:

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-\bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1-\bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}$$

между точками $z_1, z_2 \in D$ и мерой:

$$d\omega = \frac{dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}(z = x+iy).$$

Расстояние $d$ и мера $d\omega$ являются инвариантными относительно группы дробно-линейных автоморфизмов круга $D$.

Группа $G = SU(1,1)$ конформных автоморфизмов круга $D$ состоит из комплексных матриц

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

$|a|^2 - |b|^2 = 1$ и действует транзитивно на $D$ посредством отображений ($z \in D$).

$$g \circ z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}(z \in D).$$

Разложение Ивасавы группы $G$ имеет вид $G = KAN$, где $K = SO(2)$ – группа вращений $\mathbf{C}$,

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\},$$

$$N = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1+is & -is \\ is & 1-is \end{pmatrix} : s \in \mathbf{R} \right\}$$

(см., например, [1, с. 92] ). Подгруппа *NA*, действующая транзитивно на $D$, состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,t + ise^{-t} & \mathrm{ch}\,t - ise^{-t} \\ \mathrm{sh}\,t + ise^{-t} & \mathrm{sh}\,t - ise^{-t} \end{pmatrix},$$

где $s, t \in \mathbf{R}$.

Гиперболические прямые представляют собой дуги окружностей (и диаметры) в $D$, ортогональные единичной окружности $\partial D$, орициклы – евклидовы окружности в $D$, касающиеся $\partial D$. Эквидистанты – дуги евклидовых окружностей, пересекающих $\partial D$. Пусть $s_0, t_0 \in \mathbf{R}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R}: x > 0\}$. Будем называть гиперболическими прямоугольниками множества

$$\{z = e^{i\varphi} \cdot n_s a_t \circ 0:\ s_0 \le s \le s_0 + \alpha,\ t_0 \le t \le t_0 + \beta\},$$

а гиперболическими четырехсторонниками – множества

$$\{z = e^{i\varphi} \cdot n_s a_t \circ 0:\ s_0 \le s \le s_0 + \alpha e^{2t},\ t_0 \le t \le t_0 + \beta\}$$

и обозначим

$$Q_\alpha = \{z = n_s a_t \circ 0:\ 0 \le s \le \alpha,\ 0 \le t \le 1\},$$

$$K_\alpha = \{z = a_t n_s \circ 0:\ 0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le \alpha\} = \{z = n_s a_t \circ 0:\ 0 \le s \le e^{2t},\ 0 \le t \le \alpha\}.$$

Нетрудно видеть, что гиперболический прямоугольник $Q_\alpha$ представляет собой часть круга $D$, размещенную между двумя орициклами с общей точкой $z_0 = 1$, и двумя гиперболическими прямыми, входящими в эту точку. Гиперболический четырехсторонник $K_\alpha$ ограничен двумя орициклами с общей точкой $z_0 = 1$, а также гиперболической прямой и эквидистантой, входящими в эту точку.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f \in C(D)$ и для некоторой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\gamma \in D$

$$\int_{g\gamma} f(z)dz = 0 \text{ для всех } g \in G. \qquad (1)$$

Следует ли отсюда, что $f$ голоморфна в $D$? В общем случае ответ отрицательный (см., например, [2]), но при некоторых дополнительных предположениях голоморфность $f$ имеет место.

Для общих кривых наиболее известен следующий результат, полученный К.А. Беренстейном и М. Шахшахани в [3]. Пусть $P \subset D$ – область Липшица-Жордана, граница которой $\gamma = \partial P$ не является вещественно-аналитической кривой. Тогда если функция $f \in C(D)$ удовлетворяет (1), то она голоморфна в $D$.

Из результата К.А. Беренстейна и М. Шахшахани таким образом следует, что для любого $\alpha \in \mathbf{R}_+$ граница гиперболического прямоугольника $\partial Q_\alpha$, как и граница гиперболического четырехсторонника $\partial K_\alpha$ обладают свойством Мореры.

Однако, если вместо всей группы движений $G$ рассматривать только подгруппу “сдвигов” $NA$, ситуация меняется. Так, если $f \in C(D)$ и для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}_+$

$$\int_{\partial(gQ_\alpha)} f(z)dz = 0$$

для всех $g \in NA$, то отсюда в общем случае не следует, что $f$ голоморфна в $D$. В связи с этим возникают обобщения проблемы Мореры в двух направлениях: исследование нескольких множеств (например, двух гиперболических прямоугольников) и установление дополнительных ограничений на рассматриваемые функции.

Одним из таких ограничений является условие $f \in L^2(D)$, полученное М.Л. Аграновским в [4, теорема 1]. Это условие, являясь весьма общим, неточно для некоторых конкретных контуров. Например, в случае, когда $\gamma$ – окружность, неулучшаемые условия получены В.В. Волчковым в [2, теорема 1].

В следующих двух теоремах рассмотрены функции с нулевыми интегралами по границам гиперболических прямоугольников и четырехсторонников и найдены точные условия, обеспечивающие голоморфность таких функций.

С помощью сведения к проблеме Помпейю показано, что условие $f \in L^2(D)$, накладывающее ограничения на поведение функции вблизи всей границы круга $D$, можно заменить ограничениями на рост функции лишь в окрестности $z_0 = 1$.

По поводу других результатов, связанных с теоремой Мореры, см. [5] – [10] и обширную библиографию к этим работам.

Для $z \in D$ обозначим $m(z) = 1 - |z|^2$,

$$M_f(z) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |(f \cdot m)(n_u a_v \circ z)| dudv$$

и положим

$$\lambda_l(z) = \frac{e^{2l}(1-|z|^2) - (1+|z|^2 - 2z)}{e^{2l}(1-|z|^2) + (1+|z|^2 - 2\overline{z})} (l \in \mathbf{N}),$$

$$\eta_l(z) = \frac{l(1-|z|^2) + iz(1-\overline{z})}{l(1-|z|^2) + i(1-\overline{z})} (l \in \mathbf{Z}).$$

***Теорема 1.*** 1) Пусть $f \in C(D)$,

$$\forall z \in D \;\; M_f(\lambda_l(z)) = o(1) \text{ при } l \to +\infty, \;\; l \in \mathbf{N}, \qquad (2)$$

и для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+$

$$\int_{\partial(gQ_{\alpha_1})} f(z)dz = \int_{\partial(gQ_{\alpha_2})} f(z)dz = 0 \text{ для всех } g \in NA. \qquad (3)$$

Тогда если $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbf{Q}$, или

$$M_f(z) = o(1) \text{ при } z \to 1 \text{ по орициклам}, \qquad (4)$$

то $f(z)$ голоморфна в $D$.

2) Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+$ существует неголоморфная функция $f \in C^1(D)$, удовлетворяющая (3), (4) и такая, что

$$\forall z \in D \;\; M_f(\lambda_l(z)) = O(1) \text{ при } l \to +\infty, \; l \in \mathbf{N}.$$

3) Для любых соизмеримых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+$ существует неголоморфная функция $f \in C^1(D)$, удовлетворяющая (2), (3) и такая, что $M_f(z) = O(1)$ при $z \to 1$ по орициклам.

***Теорема 2.*** 1) Пусть $f \in C(D)$,

$$\forall z \in D \;\; M_f(\eta_l(z)) = o(1/l) \text{ при } l \to +\infty, \;\; l \in \mathbf{N}, \qquad (5)$$

и для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+$

$$\int_{\partial(gK_{\alpha_1})} f(z)dz = \int_{\partial(gK_{\alpha_2})} f(z)dz = 0 \text{ для всех } g \in NA. \qquad (6)$$

Тогда если $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbf{Q}$, или

$$M_f(\eta_1(z)), M_f(z) = o(1) \qquad (7)$$

при $z \to 1$ по гиперболическим прямым, то $f(z)$ голоморфна в $D$.

2) Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+$ существует неголоморфная функция $f \in C^1(D)$, удовлетворяющая (6), (7) и такая, что

$$\forall z \in D \;\; M_f(\eta_1(z)), M_f(z) = O(1/l) \text{ при } l \to +\infty, \;\; l \in \mathbf{N}.$$

3) Для любых соизмеримых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+$ существует неголоморфная функция $f \in C^1(D)$, удовлетворяющая (5), (6) и такая, что

$$M_f(z) = O(1), M_f(\eta_1(z)) = o(1),$$

при $z \to 1$ по гиперболическим прямым.

Заметим, что достаточным условием выполнения (2) является

$$M_f(z) = O(1) \qquad (8)$$

при $z \to 1$ по гиперболическим прямым

Соответственно (5) имеет место, если $M_f(z) = o(|1 - z|)$ при $z \to 1$ по орициклам.

Если же выполнено (8), то из условия $M_f(z) = o(1)$ при $z \to 1$ по эквидистантам, следует (7).

**References:**

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736 с.
2. Волчков В.В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. – 1993. – 53, вып.2. – С. 30–36.
3. Berenstein C.A. Harmonic analysis and the Pompeiu problem / C.A. Berenstein, M. Shahshahani // Amer. J. Math. – 1983. – Vol. 105. – P. 1217–1229.
4. Аграновский М.Л. Преобразование Фурье на $SL_2(R)$ и теоремы типа Морера // ДАН СССР. – 1978. – 243, № 6. – С.1353–1356.
5. Айзенберг Л.А. Вариации на тему теоремы Морера и проблемы Помпейю // Доклады АН России. – 1994. – 337, № 6. – С.709–712.
6. Волчков В.В. Преобразование Помпейю. – Донецк: ДонГУ, 1999. – 210 с.
7. Berenstein C.A. Variations on the theorem of Morera / C.A. Berenstein, D.C. Chang, D. Pascuas, L. Zalcman // Contemp. Math. – 1992. – 137. – P.63–78.
8. Volchkov V.V. Morera type theorems on the unit disk // Anal. Math. – 1997. – 20. – P.49–63.
9. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
10. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1972. – 47. – P.237–254.