УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В ПОЛУМАРКОВСКОЙ СРЕДЕ

В. А. Вавилов

RESEARCH OF THE RETRIAL QUEUEING SYSTEMS OPERATING IN SEMI-MARKOV ENVIRONMENT

V. A. Vavilov

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований. Проект № 11-01-90720-моб_ст.

В работе предлагаются математические модели систем с повторными вызовами (RQ-систем, Retrial Queueing Systems), функционирующих в полумарковской среде. Исследуются асимптотические средние характеристики, величины отклонения количества заявок в источнике повторных вызовов от их асимптотического среднего значения. Проводится глобальная аппроксимация процесса изменения числа заявок в системе и исследуется плотность распределения вероятностей значений этого процесса.

The paper is devoted to the mathematical models of retrial queueing systems concerning semi-Markov environment influence on the repeated calls source and services. The asymptotical average characteristics of the considered systems and deviation numbers of applications in the repeated calls source depending on their asymptotical average are investigated. The author provides the global approximationof the process of changing applications number in the repeated calls source, and investigates the density of distribution of the probabilities of the process values.

Ключевые слова: системы с повторными вызовами, RQ-системы, случайная среда, источник повторных вызовов, вероятностные характеристики систем массового обслуживания, метод асимптотического анализа.

Keywords: retrial queueing systems, random environment, source of repeated calls, probability characteristics of mass service system, method of asymptotic analysis.

Введение

В настоящее время исследованию систем с повторными вызовами [7] (RQ-систем, Retrial Queueing Systems) посвящается достаточно много трудов [1 – 2; 6 – 9]. Причинами являются необходимость оценки производительности и разработки новых, более эффективных локальных компьютерных сетей, радиосетей, сетей сотовой связи. Общим моментом является наличие единого передающего ресурса со случайным доступом к нему со стороны абонентских станций и, как следствие, необходимость повторной передачи в случае возникновения коллизий.

Проектирование и построение наиболее эффективно функционирующих сетей связи невозможно без учёта случайной среды, то есть неконтролируемых внешних воздействий в процессе передачи данных по каналу [1].

В данной работе проводится построение и исследование математических моделей систем с повторными вызовами, в которых изменение параметров функционирования происходит под влиянием внешнего фактора – случайной среды. Инструментом моделирования такого рода систем является аппарат теории массового обслуживания [5], позволяющий изучить вероятностно-временные характеристики функционирования систем.

Постановка задачи и построение математической модели

Рассмотрим однолинейную RQ-систему, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Прибор этой системы может находиться в одном из двух состояний: $k=0$, если он свободен; $k=1$, если он занят обслуживанием заявки. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Если в течение обслуживания этой заявки другие требования на прибор не поступают, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает новая заявка, то она переходит в источник повторных вызовов. Число заявок в источнике повторных вызовов обозначим i.

RQ-система функционирует в случайной среде. В качестве математической модели случайной среды рассмотрим полумарковский процесс $s(t)$ с непрерывным временем t, то есть такой дискретный случайный процесс, который принимает значения из конечного множества состояний $s=1,2,...,S$ и для которого вложенная по моментам времени t_n изменения состояний цепь $s(t_n)$ является марковской. Времена пребывания этого процесса в различных состояниях являются условно независимыми случайными величинами, распределение вероятностей значений которых зависит лишь от номера состояния полумарковского процесса.

Для определения полумарковского процесса [4] $s(t)$ зададим стохастическую матрицу одношаговых вероятностей $p_{s_1s_2}$ переходов вложенной цепи Маркова:

$$p_{s_1s_2}=P(s(t_{n+1})=s_2\,|\,s(t_n)=s_1),$$

при этом будем полагать, что $p_{ss}=0$.

Заметим, что

$$\sum_{s_2=1}^{S}p_{s_1s_2}=1,\ s=1,2,...,S. \qquad (1)$$

Также зададим набор функций распределения $G_s(x)$ значений времени пребывания полумарковского процесса в s -м состоянии.

Будем полагать, что влияние случайной среды на функционирование сети определяется зависимостью интенсивности γ обслуживания заявок в источнике повторных вызовов от состояний s случайной среды, то есть $\gamma = \gamma(s)$. Вероятность обращения заявок на прибор из источника повторных вызовов за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\gamma(s)\Delta t + o(t)$, при условии, что среда находится в состоянии s. Также влияние среды сказывается на интенсивности μ обслуживания заявок на приборе, то есть $\mu = \mu(s)$, где s – текущее состояние случайной среды. Вероятность окончания обслуживания заявки на приборе за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\mu(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

В силу свойств приведенной математической модели трехмерный случайный вектор $\{k(t), i(t), s(t)\}$ изменения во времени состояний $\{k(t), i(t)\}$ математической модели ссистемы и состояний $\{s(t)\}$ математической модели случайной среды является полумарковским процессом [4].

Для исследования описанной математической модели марковизируем процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ методом дополнительной переменной [5]. Введём переменную $\zeta(t)$, имеющую смысл длины интервала времени от момента t до момента смены текущего состояния случайной среды, тогда процесс изменения значений вектора $\{k(t), i(t), s(t), \zeta(t)\}$ является марковским процессом.

Обозначим

$$P(k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s, \zeta(t) < \zeta) = \\ = P(k, i, s, \zeta, t).$$

В любой момент времени должно выполняться условие нормировки: $\sum_{k=0}^{1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{S} P(k, i, s, \infty, t) = 1$.

Представим интенсивность $\gamma(s)$ обращения заявок на прибор из источника повторных вызовов в виде $\gamma(s) = \gamma\sigma(s)$. Для распределения вероятностей $P(k, i, s, \zeta, t)$ можно составить следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(0,i,s,\zeta,t)}{\partial t} + \big(\lambda + i\gamma\sigma(s)\big)P(0,i,s,\zeta,t) = \\ = \frac{\partial P(0,i,s,\zeta,t)}{\partial \zeta} - \frac{\partial P(0,i,s,0,t)}{\partial \zeta} + \\ + \mu(s)P(1,i,s,\zeta,t) + G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial P(0,i,s_1,0,t)}{\partial \zeta} p_{s_1 s},$$

$$\frac{\partial P(1,i,s,\zeta,t)}{\partial t} + \big(\lambda + \mu(s)\big)P(1,i,s,\zeta,t) = \\ = \frac{\partial P(1,i,s,\zeta,t)}{\partial \zeta} - \frac{\partial P(1,i,s,0,t)}{\partial \zeta} + \\ + \lambda P(0,i,s,\zeta,t) + \\ + (i+1)\gamma\sigma(s)P(0,i+1,s,\zeta,t) + \\ + \lambda P(1,i-1,s,\zeta,t) + \\ + G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial P(1,i,s_1,0,t)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}. \qquad (2)$$

Решение $P(k, i, s, \zeta, t)$ системы (1) будем искать методом асимптотического анализа [3] в условиях большой задержки $\gamma \to 0$.

Обозначим

$$\gamma = \varepsilon^2,\ \varepsilon^2 t = \tau \qquad (3)$$

и рассмотрим предельный процесс $x(\tau) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left(\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)\right)$, характеризующий асимптотическое среднее нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов.

Рассмотрим также процесс

$$y(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\left(\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) - x(\tau)\right)/\varepsilon\right),$$

который характеризует изменение величин отклонения нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов от их асимптотического среднего и покажем, что он является диффузионным процессом авторегрессии. Процесс изменения состояний канала $k(\tau/\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$ является дискретным марковским процессом, независимым от процесса $y(\tau)$.

Используя предельные процессы $x(\tau)$ и $y(\tau)$ для достаточно малых значений параметра ε, рассмотрим процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, который аппроксимирует процесс изменения числа заявок в системе $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$, и покажем, что он является однородным диффузионным процессом.

В системе (2) выполним замены

$$\varepsilon^2 i = x + \varepsilon y,\ \frac{1}{\varepsilon}P(k,i,s,\zeta,t) = H(k,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon), \qquad (4)$$

будем иметь:

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \\ + (\lambda + \sigma(s)(x+\varepsilon y))H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) = \\ = \frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H(0,y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} + \\ + \mu(s)H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) + \\ + G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(0,y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s},$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \\ + (\lambda + \sigma(s)(x+\varepsilon y) + \mu(s))H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) = \\ = \frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H(1,y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} + \\ + \lambda H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) + \\ + \sigma(s)(x+\varepsilon(y+\varepsilon))H(0,y+\varepsilon,s,\zeta,\tau,\varepsilon) + \\ + \lambda H(1,y-\varepsilon,s,\zeta,\tau,\varepsilon) +$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(1,y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\,. \qquad (5)$$

Дальнейшие исследования будем проводить, основываясь на этой системе.

Исследование асимптотических средних характеристик RQ-систем

Под асимптотическими средними характеристиками будем понимать распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний канала сети связи и функцию $x(\tau)$.

Теорема 1. Асимптотическое при $\gamma\to 0$ среднее значение нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов $x(\tau)$ есть детерминированная функция, определяемая обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$x'(\tau)=-x\psi_0R_0(x)+\lambda R_1(x)\,, \qquad (6)$$

здесь $R_k(x)$ определяются равенством

$$R_k(x)=\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}Q_k(x,s,\zeta)\,, \qquad (7)$$

в котором функции $Q_k(x,s,\zeta)$ определяются системой (11) и условием нормировки(12).

Доказательство. В системе (5) перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ и, полагая, что существуют конечные пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}H(k,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=H(k,y,s,\zeta,\tau)\,, \qquad (8)$$

получим систему:

$$(\lambda+\sigma(s)x)H(0,y,s,\zeta,\tau)=\frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-$$
$$-\frac{\partial H(0,y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+\mu(s)H(1,y,s,\zeta,\tau)+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(0,y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\,,$$
$$\mu(s)H(1,y,s,\zeta,\tau)=\frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-$$
$$-\frac{\partial H(1,y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+(\lambda+\sigma(s)x)H(0,y,s,\zeta,\tau)$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(1,y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\,. \qquad (9)$$

Решение $H(k,y,s,\zeta,\tau)$ системы (9) будем искать в виде:

$$H(k,y,s,\zeta,\tau)=Q_k(x,s,\zeta)H(y,\tau)\,. \qquad (10)$$

С учётом (10) функция $Q_k(x,s,\zeta)$, имеющая смысл условного совместного распределения вероятностей состояний k канала и s среды при условии $x(\tau)=x$, как следует из (9), определяется системой вида:

$$(\lambda+\sigma(s)x)Q_0(x,s,\zeta)=\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-$$
$$-\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial\zeta}+\mu(s)Q_1(x,s,\zeta)+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\,,$$
$$\mu(s)Q_1(x,s,\zeta)=\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-$$
$$-\frac{\partial Q_1(x,s,0)}{\partial\zeta}+(\lambda+\sigma(s)x)Q_0(x,s,\zeta)+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial Q_1(x,s,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\,, \qquad (11)$$

и условием нормировки:

$$\sum_{k=0}^{1}\sum_{s=1}^{S}Q_k(x,s,\infty)=1\,. \qquad (12)$$

Будем полагать, что $Q_k(x,s,\zeta)$ известны, если удается решить систему (11).

Далее покажем, что $x=x(\tau)$ является детерминированной функцией.

В системе (5) функции $H_k(y\pm\varepsilon,s,\tau,\varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon)$, получим:

$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+$$
$$+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=$$
$$=\frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H(0,y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}+$$
$$+\mu(s)H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(0,y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\,,$$
$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+\mu(s)H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=$$
$$=\frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H(1y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}+$$
$$+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{x\sigma(s)H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)-\lambda H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\}+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(1,y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s}+o(\varepsilon)\,. \quad (13)$$

Все уравнения системы (13) просуммируем по k и по s, учтем (1) и при $\zeta\to\infty$ получим:

$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_{k=0}^{1}\sum_{s=1}^{S}H(k,y,s,\infty,\tau,\varepsilon)\right\}=$$
$$=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left\{x\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)H(0,y,s,\infty,\tau,\varepsilon)-\right.$$
$$\left.-\lambda\sum_{s=1}^{S}H(1,y,s,\infty,\tau,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon)\,.$$

Поделим на ε обе части полученного уравнения, выполним предельный переход (8), учтем (10), получим:

$$-x'(\tau)\sum_{k=0}^{1}\sum_{s=1}^{S}Q_k(x,s,\infty)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}=$$

$$=\left\{x\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)Q_0(x,s,\infty)-\right.$$

$$\left.-\lambda\sum_{s=1}^{S}Q_1(x,s,\infty)\right\}\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}.$$

Учтем условие нормировки (12), обозначим:

$$R_k(x)=\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}Q_k(x,s,\zeta),\ k=0,1,$$

$$\psi R_0(x)=\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta), \quad (14)$$

заметим, что $R_k(x)$ имеет смысл распределения вероятностей состояний канала, получим:

$$\{x'(\tau)+\psi xR_0(x)-\lambda R_1(x)\}\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}=0.$$

Поскольку производная плотности распределения $H(y,\tau)$ не может тождественно равняться нулю, следовательно, функция $x=x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(\tau)=-\psi xR_0(x)+\lambda R_1(x), \quad (15)$$

здесь $R_k(x)$ есть распределение вероятностей состояний канала, определяемое равенством (14), в котором $Q_k(x,s,\zeta)$ есть двумерное распределение вероятностей состояний k канала и состояний s случайной среды, которое определяется системой (11) и условием нормировки (12). Таким образом, (15) совпадает с (6). ***Теорема доказана.***

Исследование величин отклонения числа заявок в источнике повторных вызовов от их асимптотического среднего

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Асимптотически при $\gamma\to 0$ случайный процесс $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида:

$$dy(\tau)=A'_x(x)y(\tau)d\tau+B(x)dw(\tau), \quad (16)$$

где $w(\tau)$ есть стандартный винеровский процесс, $A'(x)$ определяется производной по x от правой части дифференциального уравнения (6), а функция $B(x)$ определяется равенством:

$$B^2(x)=\psi xR_0(x)+\lambda R_1(x)+2\Big(\eta xh_0^{(1)}(x)-$$

$$-\lambda h_1^{(1)}(x)+x'(\tau)(h_0^{(1)}(x)+h_1^{(1)}(x))\Big), \quad (17)$$

если выражение в правой части больше нуля, здесь параметры a и λ заданы, $R_k(x)$ определяются равенствами (7), x определяется дифференциальным уравнением (6), $h_k^{(1)}(x)$ определяются равенством:

$$\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}h_k^{(1)}(x,s,\zeta)=h_k^{(1)}(x),$$

в котором $h_k^{(1)}(x,s,\zeta)$ есть решение системы (21).

Доказательство. Будем искать решение $H(k,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)$ системы (13) в виде следующего разложения:

$$H(k,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=Q_k(x,s,\zeta)H(y,\tau)+$$

$$+\varepsilon h_k(y,s,\zeta,\tau)+o(\varepsilon). \quad (18)$$

Подставим в систему (13) разложение (18), учтем (11) и запишем полученную систему, сократив на ε все уравнения в следующем виде:

$$-(\lambda+\sigma(s)x)h_0(y,s,\zeta,\tau)+\mu(s)h_1(y,s,\zeta,\tau)+$$

$$+\frac{\partial h_0(y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_0(y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_0(y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=$$

$$=\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta)yH(y,\tau)-$$

$$-x'(\tau)Q_0(x,s,\zeta)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y},$$

$$-\mu(s)h_1(y,s,\zeta,\tau))+(\lambda+\sigma(s)x)h_0(y,s,\zeta,\tau)+$$

$$+\frac{\partial h_1(y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_1(y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_1(y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=$$

$$=-\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta)yH(y,\tau)-$$

$$-\big(x'(\tau)Q_1(x,s,\zeta)+\sigma(s)xQ_0(x,s,\zeta)-$$

$$-\lambda Q_1(x,s,\zeta)\big)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}. \quad (19)$$

Будем искать решение системы (19) в следующем виде:

$$h_k(y,s,\zeta,\tau)=h_k^{(1)}(x,s,\zeta)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}+$$

$$+h_k^{(2)}(x,s,\zeta)yH(y,\tau). \quad (20)$$

Подставим (20) в (19) и представим систему в виде двух систем:

$$-(\lambda+\sigma(s)x)h_0^{(1)}(x,s,\zeta)+\mu(s)h_1^{(1)}(x,s,\zeta)+$$

$$+\frac{\partial h_0^{(1)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_0^{(1)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_0^{(1)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=-x'(\tau)Q_0(x,s),$$

$$-\mu(s)h_1^{(1)}(x,s,\zeta)+(\lambda+\sigma(s)x)h_0^{(1)}(x,s,\zeta)+$$

$$+\frac{\partial h_1^{(1)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_1^{(1)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_1^{(1)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=$$

$$=-x'(\tau)Q_1(x,s,\zeta)-\sigma(s)xQ_0(x,s,\zeta) \quad (21)$$

и

$$-(\lambda+\sigma(s)x)h_0^{(2)}(x,s,\zeta)+\mu(s)h_1^{(2)}(x,s,\zeta)+$$
$$+\frac{\partial h_0^{(2)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_0^{(2)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_0^{(2)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta),$$
$$-\mu(s)h_1^{(2)}(x,s,\zeta)+(\lambda+\sigma(s)x)h_0^{(2)}(x,s,\zeta)+$$
$$+\frac{\partial h_1^{(2)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_1^{(2)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_1^{(2)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=$$
$$=-\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta). \quad (22)$$

Продифференцируем систему (11) по x, получим:

$$-(\lambda+\sigma(s)x)\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}+\mu(s)\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}\right\}-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial x}\right\}+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial x}\right\}p_{s_1s}=\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta),$$
$$-\mu(s)\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}+(\lambda+\sigma(s)x)\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}\right\}-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_1(x,s,0)}{\partial x}\right\}+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial x}\right\}p_{s_1s}=$$
$$=-\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta). \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что решение $h_k^{(2)}(x,s,\zeta)$ системы (22) имеет вид:

$$h_k^{(2)}(x,s,\zeta)=\frac{\partial Q_k(x,s,\zeta)}{\partial x}. \quad (24)$$

С учетом (24) и (10) разложение (18) примет вид:

$$H(k,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=Q_k(x,s,\zeta)H(y,\tau)+$$
$$+\varepsilon h_k^{(1)}(x,s,\zeta)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}+$$
$$+\varepsilon yH(y,\tau)\frac{\partial Q_k(x,s,\zeta)}{\partial x}+o(\varepsilon). \quad (25)$$

Теперь найдем вид функции $H(y,\tau)$. Для этого функции в правой части системы (5) разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon^2)$, получим:

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+$$
$$+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=$$
$$=\frac{\partial H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H(0,y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}+$$
$$+\mu(s)H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(0,y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s},$$
$$\varepsilon^2\frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+$$
$$+(\lambda+\mu(s))H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=$$
$$=\frac{\partial H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H(1,y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}+$$
$$+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\lambda H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{\sigma(s)(x+\varepsilon y)H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)-$$
$$-\lambda H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma(s)xH(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\lambda H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\}+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(1,y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s}+o(\varepsilon^2). \quad (26)$$

Сложим все уравнения системы (26) по k, получим:

$$\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\sum_{k=0}^{1}H(k,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\right\}-$$
$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_{k=0}^{1}H(k,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\right\}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\sum_{k=0}^{1}H(k,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\sum_{k=0}^{1}H(k,y,s,0,\tau,\varepsilon)\right\}-$$
$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{-\sigma(s)(x+\varepsilon y)H(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\lambda H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma(s)xH(0,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\lambda H(1,y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{k=0}^{1}\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(k,y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s}+o(\varepsilon^2).$$

Подставим в полученную систему разложение функций $H(k,y,s,\tau,\varepsilon)$ в виде (25), получим:

$$\varepsilon^2\left(\sum_{k=0}^{1}Q_k(x,s,\zeta)\right)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial\tau}-$$
$$-\varepsilon x'(\tau)\left(\sum_{k=0}^{1}Q_k(x,s,\zeta)\right)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}-$$
$$-\varepsilon^2x'(\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{k=0}^{1}Q_k(x,s,\zeta)\right\}\frac{\partial\{yH(y,\tau)\}}{\partial y}-$$

$$-\varepsilon^2 x'(\tau)\left(\sum_{k=0}^{1} h_k^{(1)}(x,s,\zeta)\right)\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\sum_{k=0}^{1} H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\right\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\sum_{k=0}^{1} H_k(y,s,0,\tau,\varepsilon)\right\}-$$

$$-\varepsilon\big(-\sigma(s)xQ_0(x,s,\zeta)+$$

$$+\lambda Q_1(x,s,\zeta)\big)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}-\varepsilon^2\big(-\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta)-$$

$$-\sigma(s)x\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}+$$

$$+\lambda\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}\bigg)\frac{\partial\{yH(y,\tau)\}}{\partial y}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\big[\sigma(s)xQ_0(x,s,\zeta)+\lambda Q_1(x,s,\zeta)+$$

$$+2\big(\sigma(s)xh_0^{(1)}(x,s,\zeta)-\lambda h_1^{(1)}(x,s,\zeta)\big)\big]\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{k=0}^{1}\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H(k,y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1 s}+o(\varepsilon^2). \quad (27)$$

Просуммируем уравнения системы (27) по s, выполним предельный переход при $\zeta\to\infty$, воспользуемся условием нормировки (12), обозначением (14), также обозначим:

$$\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S} h_k^{(1)}(x,s,\zeta)=h_k^{(1)}(x),$$

$$\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S} h_0^{(1)}(x,s,\zeta)=\eta h_0^{(1)}(x), \quad (28)$$

учтем (1), получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial\tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}-$$

$$-\varepsilon^2 x'(\tau)\left(\sum_{k=0}^{2} h_k^{(1)}(x)\right)\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}=$$

$$=-\varepsilon(-\psi xR_0(x)+\lambda R_1(x))\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}-$$

$$-\varepsilon^2\bigg(-\psi R_0(x)-\psi x\frac{\partial R_0(x)}{\partial x}+$$

$$+\lambda\frac{\partial R_1(x)}{\partial x}\bigg)\frac{\partial\{yH(y,\tau)\}}{\partial y}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\big[\psi xR_0(x)+\lambda R_1(x)+$$

$$+2\big(\eta xh_0^{(1)}(x)-\lambda h_1^{(1)}(x)\big)\big]\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}+o(\varepsilon^2). \quad (29)$$

В силу дифференциального уравнения (6) уничтожим в (29) слагаемые порядка $o(\varepsilon)$, поделим обе части полученного уравнения на ε^2, выполним несложные преобразования, будем иметь:

$$\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial\tau}=-\bigg(-\psi R_0(x)-\psi x\frac{\partial R_0(x)}{\partial x}+$$

$$+\lambda\frac{\partial R_1(x)}{\partial x}\bigg)\frac{\partial\{yH(y,\tau)\}}{\partial y}+$$

$$+\frac{1}{2}\big(\psi xR_0(x)+\lambda R_1(x)+2\big[\eta xh_0^{(1)}(x)-$$

$$-\lambda h_1^{(1)}(x)+x'(\tau)(h_0^{(1)}(x)+$$

$$+h_1^{(1)}(x))\big]\big)\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}. \quad (30)$$

Получили уравнение Фоккера-Планка для плотности распределения вероятностей $H(y,\tau)$ значений диффузионного процесса авторегрессии $y(\tau)$. Обозначим коэффициент переноса уравнения (30) как $A'_x(x)$. Заметим, что $A'_x(x)$ является производной по x от правой части дифференциального уравнения (6), то есть:

$$A'_x(x)=\frac{\partial}{\partial x}\{-\psi xR_0(x)+\lambda R_1(x)\}. \quad (31)$$

Коэффициент диффузии обозначим следующим образом:

$$B^2(x)=\psi xR_0(x)+\lambda R_1(x)+2\big(\eta xh_0^{(1)}(x)-$$

$$-\lambda h_1^{(1)}(x)+x'(\tau)(h_0^{(1)}(x)+h_1^{(1)}(x))\big), \quad (32)$$

если выражение в правой части больше нуля.

Получили, что (32) совпадает с (17). Из (30) следует, что $H(y,\tau)$ является плотностью распределения вероятностей некоторого диффузионного процесса $y(\tau)$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy(\tau)=A'_x(x)y(\tau)d\tau+B(x)dw(\tau), \quad (33)$$

где $w(\tau)$ является стандартным винеровским процессом, $A'_x(x)$ определяется равенством (31), $B(x)$ – равенством (32), совпадающим с (17), следовательно, уравнение (33) совпадает с уравнением (16), а процесс $y(\tau)$ является процессом авторегрессии.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Решение $y(\tau)$ стохастического дифференциального уравнения (33) имеет вид:

$$y(\tau)=e^{\int_0^\tau A'_x(x(s))ds}\int_0^\tau B(x(u))e^{-\int_0^u A'_x(x(s))ds}dw(u), \quad (34)$$

где $A'(x)$ определяется равенством (31), $B(x)$ – равенством (17), $x(\tau)$ – дифференциальным уравнением (6), а $w(\tau)$ есть стандартный винеровский процесс.

Доказательство. Представим процесс $y(\tau)$ в следующем виде:

$$y(\tau)=e^{\int_0^\tau A'_x(x(s))ds}f(\tau), \quad (35)$$

тогда

$$f(\tau) = e^{-\int_0^\tau A'_x(x(s))\,ds}\, y(\tau), \qquad (36)$$

здесь $A'_x(x)$ определяется равенством (31), а функция $x(\tau)$ – дифференциальным уравнением (6).

Продифференцируем (36), используя формулы Ито, получим:

$$df(\tau) = -A'_x(x(\tau)) f(\tau) d\tau + e^{-\int_0^\tau A'_x(x(s))ds} dy .$$

Учитывая (35), получим:

$$df(\tau) = -A'_x(x(\tau)) e^{-\int_0^\tau A'_x(x(s))ds} y(\tau) d\tau +$$

$$+ e^{-\int_0^\tau A'_x(x(s))ds} [A'_x(x(\tau)) y(\tau) d\tau + B(x(\tau)) dw(\tau)] .$$

Выполним преобразования, будем иметь:

$$df(\tau) = B(x(\tau)) e^{-\int_0^\tau A'_x(x(s))ds} dw(\tau). \qquad (37)$$

Проинтегрируем (37), положив $f(0) = 0$, тогда исходное представление $y(\tau)$ в виде (35) примет вид:

$$y(\tau) = e^{\int_0^\tau A'_x(x(s))ds} \int_0^\tau B(x(u)) e^{-\int_0^u A'_x(x(s))ds} dw(u), \qquad (38)$$

где $A'_x(x)$ определяется равенством (31), $B(x)$ – равенством (17), $x(\tau)$ – дифференциальным уравнением (6), а $w(\tau)$ есть стандартный винеровский процесс, то есть (38) совпадает с (34). ***Следствие доказано.***

Глобальная аппроксимация процесса изменения состояний RQ-систем в полумарковской среде

Покажем, что для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$, является однородным диффузионным процессом. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. С точностью до $o(\varepsilon)$ случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения:

$$dz(\tau) = A(z)d\tau + \varepsilon B(z) dw(\tau), \qquad (39)$$

где $w(\tau)$ есть стандартный винеровский процесс, функция $A(z)$ определяется правой частью дифференциального уравнения (6), а функция $B(z)$ – равенством (17), то есть $z(\tau)$ является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(z)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(z)$.

Доказательство. Поскольку $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, то дифференцируя $z(\tau)$ по τ получаем:

$$dz(\tau) = x'(\tau) d\tau + \varepsilon dy. \qquad (40)$$

В силу (6) и (16) имеем:

$$dz(\tau) = [-\psi x R_0(x) + \lambda R_1(x)] d\tau +$$

$$+ \varepsilon y \frac{\partial}{\partial x}\{-\psi x R_0(x) + \lambda R_1(x)\} d\tau + \varepsilon B(x) dw(\tau) .$$

Так как правая часть содержит разложение в ряд по приращениям εy аргумента x, то можно записать:

$$dz(\tau) = [-\psi(x+\varepsilon y) R_0(x+\varepsilon y) + \lambda R_1(x+\varepsilon y)] d\tau +$$

$$+ \varepsilon B(z - \varepsilon y) dw(\tau) .$$

Заметим, что $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, тогда с точностью до $o(\varepsilon)$ имеем:

$$dz(\tau) = [-\psi z R_0(z) + \lambda R_1(z)] d\tau +$$

$$+ \varepsilon B(z) dw(\tau) + o(\varepsilon) .$$

С учетом (6) уравнение (40) окончательно примет вид: $dz(\tau) = A(z)d\tau + \varepsilon B(z) dw(\tau) + o(\varepsilon)$.

Таким образом, $z(\tau)$ является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(z)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(z)$ и определяется с точностью до $o(\varepsilon)$ стохастическим дифференциальным уравнением вида (39). ***Теорема доказана.***

Следствие 3.1. Плотность распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$ имеет вид:

$$F(z) = \frac{\dfrac{1}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du}}{\int_0^\infty \dfrac{1}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} dz}, \qquad (41)$$

где $A(z)$ определяется правой частью дифференциального уравнения (6), $B(z)$ – равенством (17).

Доказательство. Обозначим $F(z,\tau)$ плотность распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$, тогда можно записать уравнение Фоккера-Планка для плотности этого процесса:

$$\frac{\partial F(z,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}\{A(z) F(z,\tau)\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\{B^2(z) F(z,\tau)\},$$

где $A(z)$ определяется правой частью дифференциального уравнения (6), $B(z)$ – равенством (17). Рассмотрим функционирование процесса $z(\tau)$ в стационарном режиме, то есть $F(z,\tau) \equiv F(z)$, тогда стабильное распределение можно найти из уравнения Фоккера-Планка:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z}\{A(z) F(z)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\{B^2(z) F(z)\}. \qquad (42)$$

Уравнение [42] является однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Обозначим

$$B^2(z) F(z) = G(z) . \qquad (43)$$

Понизим порядок уравнения (43) и, положив константу, возникшую в результате интегрирования, равной нулю, запишем:

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z} = \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{A(z)}{B^2(z)} G(z) .$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$\int_0^z \frac{dG(u)}{G(u)}du = \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)}du + C_1,$$

выполним преобразования:

$$\ln|G(z)| = \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)}du + \ln|C|,$$

$$G(z) = C\cdot e^{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)}du}.$$

Учтем замену (43) и перепишем последнее уравнение в виде:

$$F(z) = \frac{C}{B^2(z)}e^{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)}du}. \qquad (44)$$

Константу C найдем из условия нормировки $\int_0^\infty F(z)dz = 1$, тогда

$$C = 1\Bigg/\int_0^\infty \frac{1}{B^2(z)}e^{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)}du}. \qquad (45)$$

Подставим (45) в (44), получим плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$ в виде (41). ***Следствие доказано.***

Таким образом, в данной работе найдено распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала в виде (7). Получено дифференциальное уравнение (6), определяющее асимптотическое среднее значение $x(\tau)$ нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов. Исследованы величины отклонения от этого среднего, показано, что процесс их изменения $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида (16). Найдено решение данного уравнения в виде (34). Доказано, что для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в системе $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$, является однородным диффузионным процессом. Найдена важнейшая из вероятностно-временных характеристик этого процесса – плотность распределения вероятностей $F(z)$ в виде (41).

Полученные результаты могут быть использованы при проведении анализа существующих систем с повторными вызовами, а также при проектировании новых сетей связи, реализующих более производительные протоколы передачи данных.

Литература

1. Вавилов В. А. Исследование RQ-систем с конечным числом обслуживающих приборов, функционирующих в случайной среде // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): матер. X Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. Ч. 1. С. 102 – 107.
2. Гарайшина И. Р., Моисеева С. П., Назаров А. А. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.
3. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
5. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.
6. Судыко Е. А., Назаров А. А. Исследование марковской RQ-системы с конфликтами заявок и простейшим входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительнаятехникаинформатика. 2010. № 4(12). С. 79 – 90.
7. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: a Computational Approach // Springer. 2008. 309 p.
8. Dudin A., Klimenok V. Queueing System BMAP|G|1 with Repeated Calls // Mathematical and Computer Modelling. 1999. № 30. P. 115 – 128.
9. Falin G. I. A diffusion approximation for retrial queueing systems // Theory of Probability and Its Application. 1991. Vol. 36. № 1. P. 149 – 152.

Информация об авторе:

Вавилов Вячеслав Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и математики филиала КемГУ в г. Анжеро-Судженске, vavilovv@yandex.ru.

Vyacheslav A. Vavilov – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Assistant Professor at the Department of Computer Science and Mathematics, Anzhero-Sudjensk Branch of Kemerovo State University.

Статья поступила в редколлегию 28 июля 2014 г.