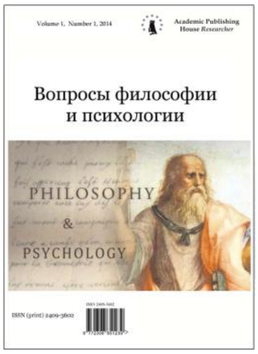

Published in the Russian Federation
Voprosy filosofii i psikhologii
Has been issued since 1889.
ISSN 2409-3602
Vol. 4, Is. 2, pp. 100-112, 2015

DOI: 10.13187/vfp.2015.4.100
www.ejournal20.com

UDC 1

Principles of Mathematic Theories

Sergey A. Lebedev

Bauman Moscow State Technical University, Russian Federation
5, 2-nd Baumanskaya, Moscow, 105005
Doctor of Philosophy, Professor
E-mail: saleb@rambler.ru

Abstract

A necessary element of the structure of scientific theories, along with a certain set of its ideal objects, axioms and theorems, are also principles [17]. Unlike axioms and laws of scientific theory, its principles are of particular content and functions. Their contents are shared ideas about the theoretical structure of reality and how it can adequately describe. The principles theories perform the following cognitive functions: 1) selection of ideas in the design of the subject of theory and 2) systematic organization of the content of theoretical knowledge. There are two kinds of principles of scientific theories: ontological and epistemological. Ontological principles of a scientific theory are general hypotheses about the properties and relations of theoretical reality. Epistemological principles of a scientific theory are general ideas about the nature of theoretical knowledge, methods build, test and support. The principles of scientific theories are not empirical statements or generalizations of facts. They are introduced in the structure of scientific theories by thinking scientists, by reflecting general idea about the ideals and norms of theoretical knowledge. The principles of scientific theories are different (and sometimes alternative) not only in different fields of science (mathematics, natural sciences, social sciences and humanities, technical sciences), but in the same area of scientific knowledge, in its various theories. Consider the example of mathematics.

Keywords: mathematics, mathematical theory, mathematical reality, mathematical object, mathematical knowledge, principles of mathematical theories.

1. Онтологические принципы математических теорий. Онтологические принципы математических теорий – это представления математиков о природе и структуре математической реальности как особом виде научной реальности, являющемся непосредственным предметом различных математических теорий. Обычно математическая реальность определяется как множество возможных и действительных количественных отношений между объектами, независимо от содержания объектов, или, как иногда говорят, количественных отношений, взятых «в чистом виде» (Вейерштрасс, Колмогоров А.Н. и др.)[6]. Таким образом, центральной категорией при определении понятия «математическая реальность» является понятие количества или количественных отношений. Это понятие является бинарной оппозицией другой категории философской онтологии – категории «качество». Под «качеством» объектов, явлений, процессов в философии понимают то, чем объекты отличаются друг от друга. Например, очевидно, что такие объекты как яблоки, столы, деревья имеют качественно разное содержание. Но при этом с количественной стороны они могут быть тождественными между собой (пять яблок, пять столов, пять деревьев, «пять яблок больше двух и ровно на три », «пять столов больше двух и ровно на три», «пять деревьев больше трех деревьев и ровно на три» и др.). А это означает, что количественные свойства и отношения образуют реальность, относительно независимую от качества. Поэтому эта реальность может изучаться сама по себе, независимо от того, количеством какого качества она может быть или является. Другое понимание математической реальности основана на противопоставлении таких онтологических категорий как «содержание» и «форма». Здесь под «формой» имеется в виду способ организации некоторого содержания или его структура, которая может быть одной и той же у разных содержаний (например, форму кристаллов могут иметь и снежинки и некоторые минералы). Форма может быть как численно измеримой, например, иметь вид некоторой линейной зависимости между элементами содержания, так и нет (например, иметь некую геометрическую форму - квадрата, окружности, конуса, спирали т.д.). В таком случае математическую реальность понимают как множество самых различных форм или абстрактных структур (Н. Бурбаки, А.А. Марков)[2]. Третья концепция математической реальности исходит из конструктивистского понимания и рассматривает ее не как аспект объективной реальности, абстрагированный мышлением от других ее аспектов («качества» или «содержания» объектов), а как результат свободного творчества математиков по созданию логически возможных миров из элементарных, абсолютно определенных и интуитивно очевидных элементов (Л. Кронекер, А. Гейтинг)[3]. И в этом с точки зрения конструктивистов заключается главное отличие математической реальности от другого вида научной реальности – физической реальности. Физическая теоретическая реальность создается путем абстрагирующей и идеализирующей деятельности мышления, отталкивающегося всегда при этом от объективной реальности. При создании мышлением математической реальности такое «отталкивание» не обязательно. Математическая реальность может быть введена мышлением чисто конструктивно. Все рассмотренные выше концепции на природу математической реальности могут быть объединены путем введения понятия «математической формы», понимаемой как возможные количественные отношения между объектами любой природы. Так понимаемая «математическая форма» по своему смыслу и значению почти тождественна понятию «математическая функция» как количественной зависимости между некоторыми величинами как ее аргументами. Поскольку вырожденным (наиболее простым) видом функции является одноместная функция, характеризующая возможную интенсивность некоторого свойства в интервале {0…1}, постольку в объем понятия «математическая форма» попадают не только обычные двухместные функции, но и разные виды чисел (натуральные, рациональные, действительные, мнимые, комплексные, матричные), разные пространственные формы, а также разного рода множества (конечные, бесконечные, счетные, не-счетные). Тогда математическая реальность как предмет математики может быть определена следующим образом. Математическая реальность это совокупность математических форм самых разных видов [10].

Второй общей онтологической проблемой математики является вопрос о том, какие объекты математики можно и должно считать реально существующими. Эта проблема известна в философии математики как проблема существования в математике. Поскольку математика не является эмпирическим знанием, постольку проблема реального существования (не-существования) ее объектов не может быть решена путем апелляции к данным чувственного опыта, наблюдения и эксперимента. Для решения этой проблемы в распоряжении математиков имеются только разные виды мышления (абстрагирование, идеализация, гипотеза, конструирование, логические выводы) и интуиция. Разное понимание веса и значения мышления и интуиции в решении проблемы существования математических объектов привело к разным вариантам решения проблемы существования в математике. Первый вариант – **платонизм** или объективный идеализм (Платон, Пифагор, Вейерштрасс, Кантор и др.). Согласно платонизму математические объекты существуют столь же объективно, как и материальные объекты. Поэтому содержание математики столь же объективно, сколь и других наук. Математические объекты существуют вне и независимо от материальных объектов, будучи особым видом и уровнем объективной реальности. В отличие от материальных объектов математические объекты (числа, точки, линии и их возможные сочетания) непосредственно не воспринимаемы чувствами и могут быть предметом только мышления. Критериями существования математических объектов является их мысленная очевидность и логическая непротиворечивость. Главными возражениями платонистской концепции существования математических объектов являются: а) противопоставление математической реальности и материальной реальности как онтологически двух разных видов реальности, б) существование в математике плюрализма в представлении содержания одних и тех же математических объектов (эвклидовы и неевклидовы геометрии, коммутативные и некоммутативные алгебры, дедуктивно-аксиоматические и конструктивные математические теории). Вторым вариантом решения проблемы существования математических объектов является **концептуализм** (Эвклид, Аристотель, Евдокс, Гаусс и др.). Согласно концептуализму математические объекты создаются мышлением путем абстрагирования и идеализации свойств материальных объектов, как единственного вида реальности. В частности, с этой позиции числа как основные математические объекты арифметики и алгебры – это идеализации количества материальных объектов. Геометрическая точка – это идеализация материального объекта предельно малого размера. Геометрическая прямая – это идеализация физических прямых линий (туго натянутой нити, тонкого стержня, луча света и т.п.).

Концептуалистская концепция природы математических объектов также встречается с рядом трудностей в ее последовательном проведении. Например, в теории чисел принципиальной трудностью для концептуального реализма является существование таких видов чисел как действительные (иррациональные) числа, отрицательные числа, мнимые числа, комплексные числа. Очевидным вызовом концептуализму в области геометрии стало создание неевклидовых геометрий, проективной геометрии и др. Следующей концепцией в решении проблемы существования математических объектов является **априоризм** (Декарт, Кант и др.). Основанием существования математических объектов и идей здесь считается их априорная (врожденная) «встроенность» в структуру человеческого сознания в качестве его необходимых элементов, а естественным следствием – возможность их интуитивного восприятия мышлением («интеллектуальная интуиция»). Например, Декарт утверждал, что идеи натуральных чисел и простых геометрических объектов имеют врожденный характер, а потому самые простые истины о них (аксиомы) для мышления очевидны и не требуют никаких иных доказательств. Кант также утверждал априорный характер арифметики и эвклидовой геометрии и считал совершенно естественным и очевидным с интуитивной точки зрения постулат о параллельных линиях эвклидовой геометрии. Утверждая, что для человеческого сознания невозможна другая истинная геометрия кроме эвклидовой, Кант аргументировал это тем, что невозможно представить, чтобы две параллельные линии на плоскости когда-либо пересеклись при их продолжении. Основными аргументами против априоризма и «интуиционизма» являются: 1) построение в математике наряду с эвклидовой геометрией неевклидовых геометрий, а также множества других теорий, абсолютно неочевидных с точки зрения элементарной арифметической или геометрической интуиции; 2) понятие интуиции и математической интуиции, в частности, является нестрогим и субъективным, а апелляция к нему – обесценивающей строгость и доказательность математики как главных отличительных черт и преимуществ этой науки. Следующая концепция природы математических объектов – **логицизм** (Г. Фреге, Б. Рассел и др.). Согласно логицизму в математике должны признаваться существующими любые объекты (числа, пространственные формы, функции, множества и др.), если они определимы в понятиях логики. Логические же понятия являются чисто аналитическими и не зависят от содержания объективного мира. С позиций логицизма «математика это просто сложная или развитая формальная логика, а логика – еще незрелая математика (Б. Рассел). Непротиворечивость математического объекта это не только необходимое, но и достаточное условие его существования. Возражениями логицистскому решению проблемы существования в математике являются: а) несводимость к логике и ее понятиям даже самой элементарной математической теории – арифметики натуральных чисел (К. Гедель)[9].

Еще одним вариантом решения проблемы существования математических объектов является **структурализм** (Н. Бурбаки и др.)[2]. Согласно структуралистам математика вообще не имеет дело с какими-то особыми объектами как предметом своего изучения и описания. Предмет математики – различные возможные типы отношений или абстрактные структуры, безотносительно к конкретной области объектов, в которой эти структуры могут иметь место. Математика – формальная наука, не зависящая от содержания объектов какой-либо области. И в этой «безобъектности» заключается не просто главная особенность, но и сила математики. Именно поэтому математика имеет универсальный характер, являясь языком всех других наук, имеющих дело уже с конкретным типом объектов. Весьма близок к структуралистской концепции математики **формализм** (Д. Гильберт и др.)[4]. Согласно формалистам, математические теории, хотя и не дают явных определений содержания описываемых ими объектов, все же делают это неявно, через употребление названий (имен) этих объектов, фигурирующих в аксиомах конкретных математических теорий (арифметических, алгебраических, геометрических и др.). Поэтому любая математическая теория, хотя и не фиксирует конкретную область своей применимости, все же не является универсально применимой ко всем возможным объектам действительности. Главным возражением структурализму и формализму («аксиомофилам» – В.И. Арнольд [1]) является содержательно-интуитивный характер любых математических теорий и представлений о их возможной применимости (К. Гедель). Следующим онтологическим принципом природы математических объектов является **конвенционализм** (А. Пуанкаре и др.) [12; 15]. Согласно конвенционализму математические объекты это результат математического творчества, они вводятся математиками, хотя и на основе усвоенных ими математических знаний и собственной интуиции, но на основе математической воли как некие условные и гипотетические сущности. Их принятие является делом конвенции, а оправданием их введения «по определению» является успешность и эффективность их применения для решения имеющихся математических проблем. Главным возражением конвенционализму является невероятная эффективность применения математики в других науках, инженерной деятельности и на практике, рационально не объяснимая с точки зрения конвенционализма (Е. Вигнер). Часто используемое в таких случаях положение о существовании некоей предустановленной гармонии между математическим мышлением и объективной реальностью является не более чем некоей философской метафорой или метафизической верой. Сегодня наиболее распространенной концепцией природы математических объектов является **конструктивизм,** наиболее существенный вклад в разработку которого внесли А. Гейтинг, Г. Вейль, А.А. Марков [3; 16]. Согласно конструктивистам в математике должны считаться существующими объекты только двух видов: а) непосредственно созерцаемые исходные символы математических теорий и б) все другие объекты, или строчки символов, которые построены или могут быть конструктивно построены из исходных объектов. Конструктивно построенными объектами математики считаются такие, для которых имеется алгоритм их построения из других математических объектов в конечное количество шагов и за конечное время. В частности, на этом основании конструктивисты не признают реально существующими любые актуально бесконечные множества. Законными математическими объектами являются с их точки зрения только конечные множества, в том числе и потенциально бесконечные: конечные множества, но которые могут быть всегда увеличены.

Главным возражением конструктивизму является следующее: конструктивистское понимание существования математических объектов существенно обедняет содержание реальной математики и резко ограничивает творческий потенциал математического мышления. Какой же выход может быть найден из многообразия рассмотренных выше концепций и онтологических принципов существования математических объектов? Дело в том, что, с одной стороны, каждый из рассмотренных выше критериев существования в математике отражает реальную практику математического мышления, получившую воплощение в реально работающих математических теориях. Но, с другой стороны, совершенно очевидно, что ни один из них не является ни общепринятым, ни универсальным в реально существующей математике. Особенно если учесть наличие, как в истории математики, так и в современной математике различных математических школ и направлений, каждое из которых отстаивает свою правоту, часто доказывая это своими успехами в развитии математического знания или его применении. Мы полагаем, что из указанного выше плюрализма есть только один разумный выход: синтез указанных подходов как частных в рамках более общего подхода. Поскольку предложенные в рамках рассмотренных концепций критерии существования математических объектов логически не противоречат друг другу, постольку они могут быть объединены в один критерий, хотя и более сложный. Таким критерием может быть такой: в математике должны признаваться существующими все объекты, которые отвечают трем требованиям: а) логической непротиворечивости, б) интуитивной очевидности исходных объектов, а также всех элементарных шагов доказательства, в) алгоритмической конструктивности для производных математических объектов. Обобщенное же определение математического существования может быть дано следующее: существовать в математике – значит быть элементом математической реальности. Это означает, что в развитой математике вся построенная математиками математическая реальность определяет реальность или нереальность любого ее элемента. Ясно, что такое решение всегда было и будет исторически относительным и консенсуальным. Такая подвижность в оценке статуса любых математических объектов имеет своей основой то, что математическое знание и математическая реальность являются исторически развивающимися системами. Общими онтологическими принципами современной математики являются следующие: 1) математическая реальность – это реальность, созданная и создаваемая математиками; 2) это чисто мысленная (идеальная) реальность; 3) объекты математической реальности связаны между собой не причинными, а логическими связями и отношениями; 4) математическая реальность – это субординированная система, все объекты и отношения которой разделены на исходные и производные; 5) математическая реальность – это количественно (численно) измеримая реальность; 6) математическая реальность имеет уровневую организацию, где имеются более фундаментальные и менее фундаментальные структуры, причем последние должны быть сводимы (редуцируемы) к первым; 7) математическая реальность является открытой и эволюционирующей системой благодаря конструктивной мыслительной деятельности математиков; 8) хотя математическая реальность и создается мышлением математиков, однако после своего создания она становится объективной, не являясь при этом ни априорной реальностью, ни эмпирической.

2. Гносеологические принципы математических теорий.

Наряду с онтологическими принципами в структуре любой математической теории имеются также определенные общие или частные гносеологические принципы. Это – общие или частные представления математиков о требованиях к математическому знанию и способам построения математических теорий. Рассмотрим некоторые из них.

Принцип глобальной интуиции в математике – требование к способу построения математического знания, согласно которому гарантом строгости и обоснованности математического знания может быть только его опора на глобальную интуицию. Это требование впервые было четко сформулировано в рамках интуиционизма (Л. Кронекер, Л. Брауэр, А. Гейтинг, Г. Вейль и др.), хотя необходимая опора в математике на интуицию неявно подразумевалась в ней всегда, начиная с Пифагора и Платона. Однако необходимо отличать просто математическую интуицию от глобальной интуиции. Последний вид интуиции является более простым, фундаментальным и строгим понятием, чем просто интуиция, которое является достаточно неопределенным, выступая лишь бинарной оппозицией эмпирическому опыту и логике как возможным источникам математического знания. Глобальная интуиция – это способность чувственного восприятия различать или отождествлять элементарные математические и логические символы, являющихся материальными обозначениями (знаками) математических объектов и логических операций, а также порядка следования одних символов за другими, отличая правильные, законные последовательности от неправильных. Согласно интуиционистам, о существовании любого математического объекта нельзя говорить до тех пор, пока он не построен в конечное количество шагов за конечное время из простейших элементарных объектов. При этом каждый шаг и каждая операция, применяемая при построении сложного объекта из элементарных и исходных объектов, должна находиться под контролем глобальной интуиции. Самым элементарным и исходным объектом математики является единица. Затем путем добавления к ней все новых и новых единиц (метод итерации) должен быть построен ряд натуральных чисел, являющийся фундаментом всей математики, всех ее теорий [3]. Согласно интуиционистам, в теории чисел не должны использоваться три вещи: понятие актуальной бесконечности, закон исключенного третьего и закон двойного отрицания при рассуждениях о бесконечных множествах. Использование этих интуитивно неясных понятий неминуемо ведет к появлению в математике логических противоречий, что недопустимо в принципе. Такое понимание математики стало отправной точкой построения современной вычислительной и компьютерной математики.

Принцип логической непротиворечивости – требование недопущения в любой математической теории синтаксической конструкции «А и не-А». Такие высказывания запрещаются логикой, так как обессмысливают научность любой системы знания. В таких системах выводимо все, что угодно, и поэтому они перестают служить основанием определенности при осуществлении научной деятельности. Обнаружение в какой-либо математической теории логического противоречия однозначно оценивается как ее полная несостоятельность. Например, первоначальная или «наивная» теория множеств Г. Кантора является несостоятельной в силу имеющихся в ней логических противоречий [7].

Принцип редукции – требования к взаимосвязи понятий и утверждений любой математической теории. Все понятия и утверждения математической теории должны быть разбиты на два подмножества: исходное и производное. Все производные понятия любой математической должны быть представлены как логические комбинации ее исходных понятий и только их. Например, исходными понятиями (и соответственно исходными объектами) эвклидовой геометрии являются только два: геометрическая точка и прямая. Все остальные объекты геометрии должны быть построены только из этих исходных объектов, возможно путем step by step. Применительно к теории чисел это требование звучит так: все возможные числа (разных видов и сложности) должны быть построены и определены только как определенные комбинации натуральных чисел. Все виды вероятности имеют право на существование только в том случае, если смогут быть представлены как усложнение аксиоматического определенного понятия вероятности. Тот же тип редукционных отношений должен иметь место и между всеми высказываниями любой математической теории. Они также должны быть разбиты на два непересекающихся множества, исчерпывающих все истинные высказывания данной теории. Одно относительное небольшое множество этих высказываний (аксиомы) должно быть положено в основу теории, все остальные ее истинные высказывания (подавляющее большинство) должны быть представлены как логические следствия аксиом теории (теоремы). Например, в геометрии Эвклида имелось всего пять аксиом и более 300 теорем. В аксиоматически построенной арифметике натуральных чисел (Бельтрами) имелось всего четыре аксиомы. Благодаря установлению редукционных отношений между понятиями и высказываниями математической теории возможно ее построение как логически доказательной системы.

Дедуктивно-аксиоматический принцип. Этот принцип был основным при построении различных теорий классической математики (эвклидова и неэвклидовы геометрии, арифметика натуральных чисел, математический анализ, теория множеств, теория вероятностей, теория структур и др.). Первой научной теорией, построенной этим методом, была геометрия Эвклида. Рассмотрим реализацию этого принципа на примере геометрии Эвклида и аксиоматической теории вероятности А.Н. Колмогорова. В геометрии Эвклида было только два исходных понятия: точка и прямая. Все остальные понятия геометрии Эвклида определялись только через эти понятия. Так, например, окружность определялась как непрерывное множество точек, равноудаленных от некоторой другой точки как центра окружности. Шар уже мог быть определен на основе понятия окружности и ее вращения вокруг диаметра как оси вращения. Треугольник определялся как пересечение трех прямых линий на плоскости, исходящих из ее трех разных точек. И т.д. Множество аксиом геометрии состояло из пяти утверждений: 1) отрезок прямой может быть продолжен в обе стороны сколь угодно далеко; 2) через две точки на плоскости всегда можно провести прямую линию и притом только одну; 3) из точки как из центра можно провести окружность любого радиуса; 4) все прямые углы равны; 5) если две прямые на плоскости пересечены третьей прямой, то они пересекутся с той стороны этой третьей прямой, где сумма ее внутренних односторонних углов с данными прямыми меньше 2d (аксиома параллельности)[5]. Из этих пяти аксиом Эвклид постарался чисто логически вывести все остальные утверждения своей геометрии (более трехсот). Построить теорию на основе дедуктивно-аксиоматического принципа означает логически замкнуть все ее высказывания друг на друга.

Как известно из истории геометрии, математиками постоянно предпринимались попытки вывести пятый постулат эвклидовой геометрии как наименее очевидный по сравнению с четырьмя остальными аксиомами в качестве их следствия, то есть доказать его как теорему и таким образом перевести в ранг производных истинных высказываний. Путь к этому виделся лишь один – доказательство логической противоречивости системы аксиом, в которых пятый постулат Эвклида был бы заменен его отрицанием. Для этого были предприняты шаги по замене пятого постулата Эвклида на тождественное ему по содержанию, но при этом более простое для восприятия высказывание. Таких замен постулата о параллельных было предложено две: 1. Через точку на плоскости нельзя провести более одной прямой, параллельной данной прямой. 2. Через точку на плоскости можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой. Именно этот вариант постулата о параллельных и войдет во все учебники геометрии, начиная с XVIII века [5]. В попытках доказать истинность пятого постулата путем доказательства от противного уже геометры XVIII века, такие, как Саккери, Ламберт и Лежандр продвинулись достаточно далеко. Ими было выведено много следствий из системы аксиом Эвклида, где пятый постулат был заменен его отрицание, но логического противоречия в такой системе так и не было обнаружено. Правда оставалась возможность и вера, что рано или поздно, но оно появится. Но ряду философов и математиков, таких как Лейбниц, Гаусс, Лобачевский, Бойяи, постулат Эвклида о параллельных отнюдь не казался очевидно истинным. Сомнения в его истинности и привели, в конечном счете, к созданию неевклидовых геометрий. И первопроходцами на этом пути, стали, как известно, русский математик Н.И. Лобачевский и венгр Я. Бойяи, построившие первые системы неевклидовых геометрий. В этих геометриях пятый постулат гласил, что через точку на плоскости по отношению к данной прямой можно провести более одной параллельной ей прямой. Но при этом никакого противоречия в новой системе опять не было получено, а позже будет доказано, что оно и не может там возникнуть в принципе, так как в самой геометрии Эвклида (правда, не в ее планиметрии, а в стереометрии) имеются объекты (непрерывные поверхности с постоянной отрицательной кривизной), на которых выполняются положения геометрии Лобачевского – Бойяи. А, следовательно, последняя столь же непротиворечива, сколь и геометрия Эвклида. А из этого следовал ряд важных гносеологических выводов, а именно: а) интуитивная очевидность аксиом научной теории не может рассматриваться в качестве критерия их истинности; б) интуитивная очевидность не является чем-то объективным, она формируется в процессе обучения математике и является делом привычки. Более того, как убедительно показал дальнейший опыт построения геометрических теорий, различение в них аксиом и теорем во многом является делом условным и конвенциональным. Например, в геометрии Эвклида в качестве пятого постулата можно принять утверждение, что сумма углов любого треугольника равна 2π. В такой системе эвклидовой геометрии постулат о параллельных может быть получен уже в качестве теоремы. Одной из центральных проблем при использовании дедуктивно-аксиоматического принципа их построения является доказательство полноты принятой в теории системы аксиом. То, что это далеко не тривиальная проблема, впервые достаточно убедительно показал в конце XIX века Д. Гильберт в отношении той же эвклидовой геометрии. А именно он доказал, что привычная система аксиом геометрии Эвклида является заведомо и сильно неполной системой. Но это стало возможным только при формализации этой теории [4].

Так, в эвклидовой геометрии не было четко определено содержание таких геометрических понятий, как «принадлежать», «равно», «находиться на», «пересекаться», «быть непрерывными» и др., которые использовались лишь на интуитивном уровне как нечто само собой разумеющееся. Но это противоречит самой идее дедуктивно-аксиоматического способа построения теории. Поэтому при доказательстве многих теорем эвклидовой геометрии неявно (так сказать, «контрабандой») использовались положения (в основном благодаря использованию чертежей), содержание которых не было зафиксировано явным и четким образом. Поэтому она и являлась, несмотря на все заявления ее адептов, строго доказательной теорией. Главным же достоинством формального способа к построению математических теорий является то, что при таком подходе полностью исключается опора на неявное знание и интуицию при доказательстве теорем. Ибо при формализации любой содержательной математической теории все ее понятия превращаются или отображаются в множество символов, которые требуют для фиксации своего существования лишь их чувственное восприятие, различение и отождествление. Осуществив формализацию эвклидовой геометрии, Гильберт показал, что дедуктивно-аксиоматическое построение этой теории требует введения двадцати аксиом, а отнюдь не пяти, как думали многие геометры, начиная с Эвклида [4].

Подобная ситуация в истории математики имела место и с теорией вероятности, вплоть до формально-аксиоматического построения этой теории выдающимся отечественным математиком А.Н. Колмогоровым. И это было сделано только в 1930-х гг. Большую подготовительную работу для решающего шага в этом направлении осуществили Дж. Гиббс, Г. Рейхенбах, Э. Борель, С.Н. Бернштейн [6; 13; 14].

В построенной А.Н. Колмогоровым аксиоматической теории вероятности сначала вводится абстрактное понятие – «множество (пространство) случайных событий». Под случайными событиями понимаются такие, которые могут произойти, а могут и не произойти. При аксиоматическом построении теории вероятности значением вероятностной функции, определяемой соответствующими аксиомами, является действительное число в интервале {0,1}. Вероятностная же функция понималась тоже чрезвычайно абстрактно, а именно как возможность произойти некоторому случайному событию при определенных условиях. Формально она понималась как особая функция, подчиняющаяся следующим аксиомам:

1. $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(A+B)=p(A)+p(B)$, где A и B – независимые друг от друга случайные события
3. $p(A+A)=1$ (вероятность необходимого события)
4. $p(A \cdot A)=0$ (вероятность невозможного события) [6].

Таким образом, при формально-аксиоматическом построении теории вероятностей вероятность в ней не определяется явным образом. Точно также как не определялись явным образом понятия «точки», «прямой» и плоскости в формально-аксиоматической системе эвклидовой геометрии Д. Гильберта. С точки же зрения применимости аксиоматической теории вероятностей под «вероятностью» можно и должно понимать любое отношение, свойства которого отвечают аксиомам исчисления вероятности. Как оказалось, это может быть не только «относительная частота» некоторых событий по отношению к другому классу событий, но и «степень объективной возможности» реализации некоторого свойства при определенных условиях, и «степень подтверждения» одного высказывания (гипотезы) другими высказываниями (данными), и «степень уверенности» субъекта в истинности некоторой гипотезы или в наступление некоторого события. Благодаря аксиоматическому определению вероятности удалось примирить различные альтернативные понимания вероятности и показать, что они отнюдь не исключают, а лишь дополняют друг друга, будучи одинаково законными интерпретациями и способами применения аксиоматически определённого понятия вероятности [11; 14]. Если рассмотренные выше гносеологические принципы являются требованиями к построению математических теорий, к их структуре, то в математике имеются также гносеологические принципы, регулирующие динамику, развитие математического знания, смену одних математических теорий другими. Одним из таких принципов является принцип Ганкеля. Рассмотрим его содержание и гносеологические возможности [8; 9].

Принцип Ганкеля. Согласно этому принципу в ходе развития математического знания должно иметь место следующее: каждая последующая теория должна либо дополнять предшествующую ей, либо обобщать ее. В последнем случае предшествующая теория должна выводиться из новой теории в качестве ее частного случая. Например, применительно к развитию арифметики это означает, что арифметика натуральных чисел является частным случаем арифметики рациональных чисел, поскольку последние включают в себя в качестве своего подмножества натуральные (целые) числа. То же самое отношение должно иметь место между арифметикой рациональных чисел и арифметикой действительных чисел, поскольку последние включают в себя в качестве своего подмножества рациональные числа наряду с подмножеством иррациональных чисел. Однако, строгий логический анализ показывает, что принцип Ганкеля является слишком упрощенным пониманием реального отношения преемственности в развитии математического знания. Начнем с анализа соотношения арифметических теорий в ходе развития арифметики. Как известно, рациональные числа имеют вид $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа. Но это, строго говоря, означает, что рациональные числа суть отношения между натуральными числами, а не сами эти числа. Одним словом, рациональное число – это функция от двух переменных, и ее формальным синтаксическим эквивалентом является двухместный предикат A(x, y), где x и y – натуральные числа. Конечно, когда результатом деления $\frac{m}{n}$ является целое число, особенно в случаях n = 1, тогда **значением** функции $\frac{m}{n}$ является одно из натуральных чисел. Но «быть функцией» и «быть значением функции» это не одно и то же. Поэтому неверно говорить, что натуральные числа являются частным случаем рациональных чисел. Более правильно утверждать, что натуральные числа могут быть рассмотрены как множество чисел, равномощное одному из подмножеств множества рациональных чисел. Но это отнюдь не означает, что натуральные числа являются частью множества рациональных чисел, так как числа вида $\frac{m}{1}$ всегда остаются рациональными, а не натуральными числами. Другое дело, что каждому натуральному числу можно поставить в соответствие одно и только одно рациональное число вида $\frac{m}{1}$. В этом случае говорят, что множество натуральных чисел может быть «изоморфно вложено» в множество рациональных чисел. Обратное же неверно. Но быть «изоморфно вложенным» не означает быть «частным случаем». «Частным случаем» рациональных чисел является рациональные числа вида $\frac{m}{1}$ $\left(\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{4}{1},\dots\frac{100}{1},\dots\right)$, но это отнюдь не натуральные числа. То же самое с соответствующими поправками можно сказать и о соотношении рациональных и действительных чисел и, соответственно, о взаимосвязи арифметики рациональных чисел и арифметики действительных чисел. Действительные числа это числа вида $a_1, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$, где a_1, b_1, b_2, b_3, b_4 – любые натуральные числа. Действительные числа по своему синтаксическому представлению – это бесконечно-местные предикаты вида A (x, y, z, ...), тогда как рациональные – это только двухместные предикаты, двухместные функции, аргументами которых являются натуральные числа. Конечно, можно установить изоморфизм между подмножеством действительных чисел вида $a_1, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ (когда $b_1, b_2, b_3, b_4 \dots$ равно 0) и множеством рациональных чисел. Однако, все дело в том, что именно благодаря символу «....», означающему «бесконечность», множество действительных чисел не просто бесконечно (как множество натуральных и множество рациональных чисел), но несчетно бесконечно, тогда как множество рациональных чисел счетно бесконечно. И поэтому здесь принцип Ганкеля явно не работает: арифметика действительных чисел не является обобщением арифметики рациональных чисел, а последняя теория, соответственно, не является «частным случаем» первой. Теперь рассмотрим развитие другой области математики – геометрии и покажем, что и в этой области отношение преемственности геометрического знания не соответствует принципу Ганкеля.

Покажем это на примере соотношения эвклидовой геометрии и неэвклидовых геометрий. Последние не являются обобщением первой, так как синтаксически многие утверждения этих разных геометрий просто противоречат друг другу. Например, в эвклидовой геометрии: через точку на плоскости по отношению к данной прямой можно провести только одну параллельную ей прямую линию; сумма углов любого треугольника равна всегда 180°; отношение длины любой окружности к ее диаметру всегда равно в эвклидовой геометрии π. В геометрии же Лобачевского утверждается нечто другое, и даже противоречащее эвклидовой геометрии, а именно: через точку на плоскости по отношению к данной прямой можно провести более одной параллельной ей прямой линии; сумма углов любого треугольника всегда меньше 180°; отношение длины любой окружности к ее диаметру всегда больше π. Частная же риманова геометрия утверждает нечто противоречащее как геометрии Эвклида, так и геометрии Лобачевского, а именно: через точку на плоскости по отношению к данной прямой нельзя провести ни одной параллельной ей прямой линии; сумма углов любого треугольника всегда больше 180°, а отношение длины окружности к диаметру всегда меньше π. Конечно, ни о каком обобщении геометрий Лобачевского и Римана по отношению к геометрии Эвклида в данном случае говорить просто не приходится, так как они просто противоречат последней.

Правда, оказалось, что противоречия между ними можно избежать, если дополнительно ввести такой параметр, как кривизна непрерывной двухмерной поверхности. Тогда их удается «развести» по разным предметам. Утверждения геометрии Эвклида оказываются верными для поверхностей с коэффициентом кривизны 0 («старые добрые плоскости»). Положения геометрии Лобачевского выполняются на двумерных поверхностях с постоянной отрицательной кривизной (коэффициент кривизны имеет одно из фиксированных значений в континууме $\{0\dots -1\}$, исключая крайние значения). Утверждения же частной римановой геометрии, напротив, выполняются на двумерных поверхностях с постоянной положительной кривизной (коэффициент кривизны имеет одно из фиксированных значений в континуальном интервале $\{0\dots +1\}$, исключая крайние значения). Таким образом, возможна только одна эвклидова геометрия и бесконечное множество геометрий Лобачевского и Римана. Впоследствии Риман обобщил все эти случаи в построенной им общей римановой геометрии, где кривизна пространства является не постоянной, а переменной величиной. Однако, это чисто формальное обобщение, никак содержательно не влияющее на решение вопроса о соотношении эвклидовой геометрии и неэвклидовых геометрий. Итак, геометрия Эвклида не является частным случаем ни геометрии Лобачевского, ни геометрии Римана, так как последние «не имеют права» принимать значение коэффициента кривизны 0. Но, может быть, эвклидову геометрию можно истолковать как «предельный случай» неэвклидовых геометрий? Оказывается, тоже нет. Ибо, во-первых, понятие «предельного случая» является качественным и нестрогим. Во-вторых, конечно, можно сказать, что плоскость Эвклида является пределом внутренней или внешней поверхности шара, но с таким же правом можно утверждать, что эвклидова прямая есть «предельный случай» треугольника Лобачевского, а эвклидова окружность – «предельный случай» треугольника Римана. Ясно, что все такого рода утверждения являются столь же бессодержательными, сколь и нестрогими. Одним словом, понятие «предельного случая» призвано скрыть качественное различие между различными явлениями, ибо при желании все может быть названо «предельным случаем» другого. Метафоричность и не строгость данного понятия всегда позволяют это сделать. Общий вывод: в развитии математического знания и смене его теорий имеет место не только преемственность, но и качественные скачки, связанные с созданием принципиально новых типов математических объектов и отношений между ними [8; 9].

Принципы математических теорий являются необходимым элементом структуры этих теорий, наряду с математическими объектами, аксиомами и правилами вывода. Среди принципов математических теорий необходимо различать два их вида: онтологические и гносеологические. Они могут быть различными не только для содержательно разных математических теорий (например, арифметики, геометрии или алгебры), но и для одной и той же математической науки (например, эвклидова геометрия самого Эвклида и эвклидова геометрия Д. Гильберта). Наряду с принципами математических теорий, определяющими их структуру, в математике существуют также принципы, регулирующие динамику математических теорий в ходе развития той или иной математической дисциплины. Одним из таких принципов является принцип Ганкеля или принцип соответствия применительно к развитию математического знания. Однако, принцип Ганкеля делает акцент только на кумулятивном моменте развития математических теорий, абстрагируясь и явно недооценивая качественные скачки в смене математических теорий, научные революции в развитии математического знания.

Примечания:

1. Арнольд В.И. Что такое математика? М.: Издательство МЦНМО. 2004. 104 с.
2. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Ком Книга. 2006. 296 с.
3. Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука. 1989. 400 с.
4. Гильберт Д. Основания геометрии. М.-Л.: ОГИЗ. 1948. 491 с.
5. Каган В.Ф. Очерки по геометрии. М.: Издательство Московского университета. 1963. 571 с.
6. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука. 1991. 223 с.
7. Лебедев С.А. (ред.). Концепции современного естествознания. 4-е издание, исправленное и дополненное. Под общей редакцией С.А. Лебедева. М.: Юрайт. 2015.
8. Лебедев С.А. Основные модели развития научного знания // Вестник Российской академии наук. 2014. Т.84. №6. С. 506-512.
9. Лебедев С.А. Методология научного познания. М.: Проспект. 2015. 286 с.
10. Лебедев С.А.(ред.). Философия математики и технических наук. Учебное пособие. Под общей редакцией С.А. Лебедева. М.: Академический проект. 2006. 779 с.
11. Лебедев С.А. Философия науки. Учебное пособие. М.: Юрайт. 2011. 288 с.
12. Лебедев С.А., Коськов С.Н. Конвенционалистская философия науки // Вопросы философии. 2013. №5. С. 57-69.
13. Лебедев С.А., Кудрявцев И.К. Детерминизм и индетерминизм в развитии естествознания//Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2005. №6. С. 1-20.
14. Лебедев С.А., Чесалова М.В. Байесовский анализ, субъективная вероятность и индукция // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 1994. №3. С. 52-63.
15. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука. 1983.
16. Успенский В.А. Апология математики. СПб: Амфора. 2009. 554 с.
17. Lebedev S.A., Lebedev K.S. The principles of scientific theories // Journal of International Network Center for Fundamental and Applied Research. Vol.3, Is.1, pp. 22-33.

References:

1. Arnol'd V.I. Chto takoe matematika? M.: Izdatel'stvo MCNMO. 2004. 104 s.
2. Burbaki N. Ocherki po istorii matematiki. M.: Kom Kniga. 2006. 296 s.
3. Vejl' G. Matematicheskoe myshlenie. M.: Nauka. 1989. 400 s.
4. Gil'bert D. Osnovanija geometrii. M.-L.: OGIZ. 1948. 491 s.
5. Kagan V.F. Ocherki po geometrii. M.: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta. 1963. 571 s.
6. Kolmogorov A.N. Matematika v ee istoricheskom razvitii. M.: Nauka. 1991. 223 s.
7. Lebedev S.A. (red.). Koncepcii sovremennogo estestvoznanija. 4-e izdanie, ispravlennoe i dopolnennoe. Pod obshhej redakciej S.A. Lebedeva. M.: Jurajt. 2015.
8. Lebedev S.A. Osnovnye modeli razvitija nauchnogo znanija // Vestnik Rossijskoj akademii nauk. 2014. T.84. №6. S. 506-512.
9. Lebedev S.A. Metodologija nauchnogo poznanija. M.: Prospekt. 2015. 286 s.
10.Lebedev S.A.(red.). Filosofija matematiki i tehnicheskih nauk. Uchebnoe posobie. Pod obshhej redakciej S.A. Lebedeva. M.: Akademicheskij proekt. 2006. 779 s.
11. Lebedev S.A. Filosofija nauki. Uchebnoe posobie. M.: Jurajt. 2011. 288 s.
12.Lebedev S.A., Kos'kov S.N. Konvencionalistskaja filosofija nauki // Voprosy filosofii. 2013. №5. S. 57-69.
13. Lebedev S.A., Kudrjavcev I.K. Determinizm i indeterminizm v razvitii estestvoznanija // Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 7: Filosofija. 2005. №6. S. 1-20.

14. Lebedev S.A., Chesalova M.V. Bajesovskij analiz, sub#ektivnaja verojatnost' i indukcija // Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 7: Filosofija. 1994. №3. S. 52-63.
15. Puankare A. O nauke. M.: Nauka. 1983.
16. Uspenskij V.A. Apologija matematiki. SPb: Amfora. 2009. 554 s.
17. Lebedev S.A., Lebedev K.S. The principles of scientific theories // Journal of International Network Center for Fundamental and Applied Research. Vol.3, Is.1, pp. 22-33.

УДК 1

Принципы математических теорий

Сергей Александрович Лебедев

МГТУ им Н.Э. Баумана, Российская Федерация
Доктор философских наук, профессор
E-mail: saleb@rambler.ru

Аннотация. Необходимым элементом структуры научной теории, наряду с определенным множеством ее идеальных объектов, аксиомами и теоремами, являются также принципы. В отличие от аксиом и законов научной теории ее принципы имеют особое содержание и функции. Их содержанием являются общие представления о структуре теоретической реальности, а также методах ее адекватного описания. Принципы теорий выполняют следующие познавательные функции: 1) отбора идей при конструировании предмета теории и 2) системной организации содержания теоретического знания. Существует два вида принципов научных теорий: онтологические и гносеологические. Онтологические принципы научной теории это принимаемые в ней общие гипотезы о свойствах и отношениях теоретической реальности. Гносеологические принципы научной теории это принимаемые в ней общие представления о природе теоретического знания, методах его построения, проверки и обоснования. Принципы научных теорий не являются эмпирическими высказываниями или обобщениями фактов. Они вводятся в структуру научных теорий мышлением ученых, отражая их общие представления об идеалах и нормах теоретического познания. Принципы научных теорий являются различными (а иногда и альтернативными) не только в разных областях науки (математика, естествознание, социально-гуманитарные науки, технические науки), но и в одной и той же области научного познания, в ее различных теориях. Рассмотрим эти положения на примере математики.

Ключевые слова: математика, математическая теория, математическая реальность, математический объект, математическое знание, принципы математических теорий.