УДК 514.116.3 DOI: 10.15507/VMU.025.201501.024

К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПОЛОЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В. И. Никонов, В. Д. Антошкин

В статье предлагается решение задачи оптимизации расположения треугольной сети средствами аналитической геометрии на сфере. Рассматривается задача о вписании в произвольный сферический треугольник равностороннего сферического треугольника наименьшей площади. Данная задача формулируется путем введения полярной системы координат на сфере и использованием некоторых результатов аналитической геометрии. Переход от полярной системы координат к тангенциальной через введение новых переменных позволяет свести исходную задачу к решению ряда более простых задач и получить аналитическое решение. Полученное решение дает более точные расчеты в задачах оптимизации при конструировании сборных сферических оболочек.

***Ключевые слова*:** сборная сферическая оболочка, треугольная сеть, сферический треугольник, сферическое расстояние, площадь сферического треугольника.

ON THE PROBLEM OF OPTIMIZING OF THE ARRANGEMENT OF SPHERICAL TRIANGLES

V. I. Nikonov, V. D. Antoshkin

The paper proposes a solution for the problem of optimizing of location of a triangular network using analytic geometry on a sphere. The authors consider the problem of refinement of equilateral spherical triangle of the smallest area in an equilateral spherical triangle. This problem can be formulated by introducing a polar coordinate system on the sphere and using of some of the results of analytical geometry. The transition from a polar coordinate system to the tangential by introducing the new variables allows to convert the original problem to the solution of a number of simpler problems and to receive an analytical solution. The resulting solution allows for more accurate calculations in optimization problems in the construction of prefabricated spherical shells.

***Keywords*:** spherical segmental shell, triangular net, spherical triangle, spherical distance, area of a spherical triangle.

При конструировании сборных сферических оболочек возникает задача оптимального расположения треугольной сети на сфере с целью минимальности числа типоразмеров. В работах [3–4] были предложены некоторые варианты решения этой задачи.

В данной работе приводятся математическая постановка задачи оптимизации и способы ее решения.

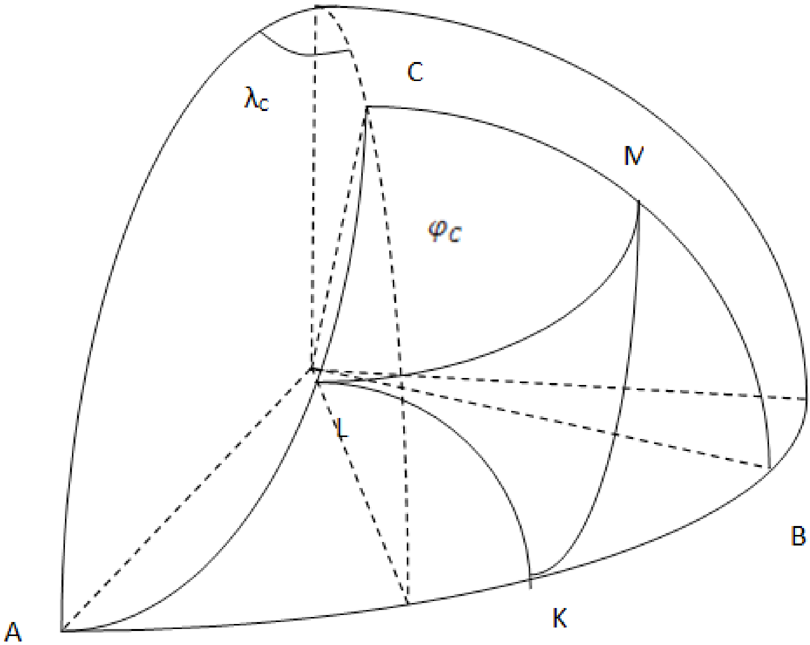
Пусть имеется произвольный сферический треугольник ABC, внутренние углы которого равны соответственно A, B и C. Как известно [1–2], всякий такой треугольник определяется по каким-либо трем заданным параметрам.

Постановка задачи. В треугольник ABC требуется вписать равносторонний сферический треугольник наименьшей площади.

Для решения поставленной задачи воспользуемся результатами аналитической геометрии на сфере [1]. Подобно прямоугольным координатам на плоскости, введем координаты на сфере. Возьмем точку A данного треугольника и назовем ее началом системы координат. Две взаимно перпендикулярные окружности больших кругов, проходящих через точку A, будут являться координатными осями. Таким образом, произвольная точка на сфере будет однозначно определена

© Никонов В. И., Антошкин В. Д., 2015

двумя координатами – широтой φ и долготой λ (рисунок). Данную систему координат можно назвать полярной системой сферических координат.



Рисунок

Прямой на сфере будем называть любую окружность большого радиуса. Тогда уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(\varphi_1, \lambda_2)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$, имеет вид:

$$tg\varphi = \frac{tg\varphi_1 \sin(\lambda - \lambda_2) - tg\varphi_2 \sin(\lambda - \lambda_1)}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad (1)$$

а расстояние s между этими точками, которое называется сферическим, определяется из соотношения:

$$\cos s = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 +$$
$$+ \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (2)$$

Таким образом, данный сферический треугольник в выбранной системе координат определяется точками.

$$A(0,0), B(0,\lambda_B), C(\varphi_c, \lambda_c),$$

$$0 \le \varphi_c < \frac{\pi}{2}, 0 \le \lambda_c \le \lambda_B < \frac{\pi}{2}.$$

Составив уравнения сторон треугольника ABC по формуле (1), получим следующее:

$$AB - \mathrm{tg}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, 0 \le \lambda \le \lambda_B,$$

$$AC - \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{tg}\varphi_C}{\sin\lambda_C} \sin\lambda, 0 \le \lambda \le \lambda_C,$$

$$BC - \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{tg}\varphi_C}{\sin(\lambda_C - \lambda_B)} \sin(\lambda - \lambda_B),$$

$$\lambda_C \le \lambda \le \lambda_B.$$

Предположим, что MNK – искомый вписанный равносторонний треугольник. Обозначим внутренний угол этого треугольника D, длину стороны – s. С учетом системы координат, получаем: $K(0, \lambda_k), L(\varphi_L, \lambda_L), M(\varphi_M, \lambda_M)$. Тогда из (2) определим сферическое расстояние между этими точками:

$$LK - \cos s = \cos\varphi_L \cos\left(\lambda_K - \lambda_L\right),$$
$$MK - \cos s = \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_K\right),$$
$$LM - \cos s = \sin\varphi_L \sin\varphi_M +$$
$$+\cos\varphi_L \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_L\right).$$

Для того чтобы всякий треугольник, вписанный в треугольник *ABC*, был равносторонним, необходимо выполнение ряда условий:

$$\begin{cases} \cos\varphi_L \cos\left(\lambda_K - \lambda_L\right) = \\ = \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_K\right), \\ \cos\varphi_L \cos\left(\lambda_K - \lambda_L\right) = \sin\varphi_L \sin\varphi_M + \\ + \cos\varphi_L \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_L\right). \end{cases} \tag{3}$$

При этом

$$L \in AC \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi_L = \frac{\mathrm{tg}\varphi_C}{\sin\lambda_C}\sin\lambda_L,$$
$$0 \le \lambda_L \le \lambda_B,$$
$$K \in AB \Rightarrow \varphi_K = 0, \lambda =$$
$$= \lambda_K, 0 \le \lambda_K \le \lambda_B,$$

$$M \in BC \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi_M =$$
$$= \frac{\mathrm{tg}\varphi_C}{\sin\left(\lambda_C - \lambda_B\right)}\sin\left(\lambda_M - \lambda_B\right).$$

Определяя взаимосвязь внутреннего угла со сферическим расстоянием равностороннего треугольника, получаем соотношение:

$$\cos D = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \dfrac{s}{2}}{2},$$

из которого определяется связь с введенными координатами:

$$\cos D = \frac{\cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_K\right)}{1 + \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_K\right)}.$$

Пусть S_{KLM} – площадь треугольника *KLM,* тогда

$S_{KLM} = 3D - \pi$ (для сферы радиуса R=1).

Из этого очевидно, что площадь будет наименьшей при наименьшем угле *D*.

Таким образом, поставленная задача свелась к задаче минимизации угла сферического равностороннего треугольника, как функции введенных координат $D = D\left(\varphi_M, \lambda_K, \lambda_M\right)$, удовлетворяющие условиям (3).

Задача условной минимизации:

Найти наименьшее значение функции:

$$D = \arccos\frac{\cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_K\right)}{1 + \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_K\right)},$$

удовлетворяющей системе условий:

$$U : \begin{cases} 0 \le \varphi_L \le \varphi_C, 0 \le \varphi_M \le \varphi_C, \\ 0 \le \lambda_K \le \lambda_B, 0 \le \lambda_L \le \lambda_C, \\ \lambda_C \le \lambda_M \le \lambda_B, \cos\varphi_L \cos\left(\lambda_K - \lambda_L\right) = \\ = \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_K\right), \cos\varphi_L \\ \cos\left(\lambda_K - \lambda_L\right) = \sin\varphi_L \sin\varphi_M + \\ + \cos\varphi_L \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_L\right). \end{cases}$$

По условию задачи, треугольник *KLM* – сферический равносторонний треугольник, поэтому угол *D* удовлетворяет условию:

$$\pi < 3D < 3\pi . \tag{4}$$

Отсюда приходим к условию:

$$\frac{\pi}{3} < D < \pi . \tag{5}$$

Тогда, если ввести обозначение

$$z = \cos\varphi_M \cos\left(\lambda_M - \lambda_K\right), \tag{6}$$

то функция

$$D = \arccos\frac{z}{1+z}$$

удовлетворяет (4), если

$$-\frac{1}{2} < z < 1. \qquad (7)$$

Следует отметить, что в области (5) выполняется условие

$$D' = -\frac{1}{\sqrt{1+2z}\left(1+z\right)} < 0,$$

следовательно, наименьшее значение функции $D = D\left(\varphi_M, \lambda_K, \lambda_M\right)$ в области (5) может принимать при наибольшем значении величины z.

Таким образом, исходная задача оптимизации принимает следующий вид:

$$\max_U z,$$
$$-\frac{1}{2} < z < 1.$$

Введя обозначения

$$p = \frac{\mathrm{tg}\varphi_C \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\lambda_C}}{\mathrm{tg}\lambda_C}, \qquad (8)$$
$$q = \frac{\mathrm{tg}\varphi_C \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\lambda_C}}{\mathrm{tg}\lambda_B - \mathrm{tg}\lambda_C}, k = \mathrm{tg}\lambda_B,$$

и проведя замену переменных

$x = \mathrm{tg}\lambda_L, y = \mathrm{tg}\lambda_M,$

получим соотношения:

$$\mathrm{tg}\varphi_L = \frac{px}{\sqrt{1+x^2}}, \mathrm{tg}\varphi_M = \frac{q\left(k-y\right)}{\sqrt{1+y^2}}.$$

При этом функцию z можно представить в следующем виде:

$$z = \frac{1+\mathrm{tg}\lambda_K x}{\sqrt{1+(1+p^2)x^2}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\lambda_K}}. \qquad (9)$$

Тогда условия равенства сторон *KL, LM* и *KM* треугольника *KLM* примут вид:

$$\begin{cases} tg\lambda_K = \dfrac{\sqrt{1+\left(1+p^2\right)x^2} - \sqrt{1+y^2+q^2(k-y)^2}}{x\sqrt{1+y^2+q^2(k-y)^2} - y\sqrt{1+\left(1+p^2\right)x^2}}, \\ \dfrac{1+\mathrm{tg}\lambda_K x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\lambda_K}} = \dfrac{pxy}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{1+xy}{\sqrt{1+y^2+q^2(k-y)^2}}. \end{cases}$$

Таким образом, исходная задача свелась к поиску максимума функции (9), удовлетворяющей условию (10) в области

$$0 \le x \le \mathrm{tg}\lambda_C, \mathrm{tg}\lambda_C \le y \le \mathrm{tg}\lambda_B.$$

Следует отметить, что система (9) определяет неявную функцию $y = y\left(x\right)$ или $x = x\left(y\right)$. Тогда $\mathrm{tg}\lambda_K$ также будет функцией одной переменной *x* или *y* В результате полученная задача условной оптимизации может быть сведена к нахождению максимального значения функции *z*=*z*(*y*) в области (11).

Случай произвольного остроугольного равнобедренного сферического треугольника

Предположим, что треугольник *ABC*– равнобедренный остроугольный треугольник. Тогда соотношения (8) принимают вид:

$$p = \frac{\mathrm{tg}\varphi_C \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\lambda_C}}{\mathrm{tg}\lambda_C},$$
$$q = \frac{p}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\lambda_C}}, k = \mathrm{tg}2\lambda_C.$$

Возможны два случая:

– точка *K* расположена на биссектрисе угла *C*;

– точка *K* расположена не на биссектрисе угла *C*.

Вначале рассмотрим 1-й случай.

Тогда $\mathrm{tg}\lambda_B = \mathrm{tg}2\lambda_C, \mathrm{tg}\lambda_K = \mathrm{tg}\lambda_C$ и система (10) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\mathrm{tg}\lambda_C x}{\sqrt{1+\left(1+p^2\right)x^2}} = \dfrac{1+\mathrm{tg}\lambda_C y}{\sqrt{1+y^2+q^2(k-y)^2}}, \\ \dfrac{1+\mathrm{tg}\lambda_C x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\lambda_C}} = \dfrac{\left(1-pq\right)xy - kpqx + 1}{\sqrt{1+y^2+q^2(k-y)^2}}. \end{cases} \qquad (12)$$

Функция Z при этом может быть представлена в виде

$$z = \frac{1 + \mathrm{tg}\lambda_C x}{\sqrt{1 + \left(1 + p^2\right)x^2}}.$$

Таким образом, следует найти максимум функции (13) при выполнении условий (12).

Следует отметить, что без учета условий (12) функция (13) принимает максимальное значение при

$$x = \frac{\mathrm{tg}\lambda_C}{1 + p^2} \in \left(0, \mathrm{tg}\lambda_C\right).$$

Второй случай.

Если ввести обозначение

$$Q_1 = \sqrt{1 + \left(1 + p^2\right)x^2}, Q_2 = \sqrt{1 + y^2 + q^2(k - y)^2},$$

то тогда оптимизируемую функцию z можно представить в виде

$$z = \frac{\left(1 - pq\right)xy + pqkx + 1}{Q_1 Q_2},$$

а условия (12) можно записать как

$$\begin{cases} z = f, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x} \end{cases},$$

где

$$f = \frac{y - x}{\sqrt{\left(x^2 + 1\right)Q_2{}^2 - 2\left(xy + 1\right)Q_1 Q_2 + (y^2 + 1)Q_1{}^2}}.$$

Применяя приведенные выше результаты к равнобедренному треугольнику с параметрами

$p = 2, q = \dfrac{7}{4}, k = \dfrac{\sqrt{15}}{7}$ (ребра треугольника -30, угол С=60),

имеем следующие результаты:

– для первого случая – равносторонний сферический треугольник со стороной 15,2036;

– для второго случая – треугольник со стороной 15,2033.

Таким образом, условию поставленной задачи удовлетворяет второй случай.

В результате проведенных исследований поставленная задача условной оптимизации функции нескольких переменных была сведена к исследованию функции одной переменной. Полученное решение позволит проводить более точные расчеты в задачах оптимизации при конструировании сборных сферических оболочек.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Вентцель, М. К.** Сферическая тригонометрия / М. К. Вентцель. – Москва : Изд-во геодез. и картограф. лит. – 1948. – 154 с.

2. **Степанов, Н. Н.** Сферическая тригонометрия / Н. Н. Степанов. – Ленинград ; Москва : ОГИЗ. – 1948. – 154 с.

3. Патент на полезную модель, Российская Федерация, № 129534. Сборная сферическая оболочка / В. И. Травуш, В. Д. Антошкин, В. Т. Ерофеев. – опубл. 27.06.2013 г.

4. Патент на изобретение, Российская Федерация, № 2012116363. Сборная сферическая оболочка / В. И. Травуш, В. Д. Антошкин, В. Т. Ерофеев. – опубл. 20.02.2014 г.

Поступила 01.12.2014 г.

Об авторах:

Никонов Владимир Иванович, доцент кафедры алгебры и геометрии факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, nik_vl_@mail.ru

Антошкин Василий Дмитриевич, заведующий кафедрой архитектуры архитектурно-строительного факультета ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат технических наук, antovd@mail.ru

Для цитирования: Никонов, В. И. К задаче оптимизации расположения сферических треугольников / В. И. Никонов, В. Д. Антошкин // Вестник Мордовского университета. – 2015. – Т. 25, № 1. – С. 24–29. DOI: 10.15507/VMU.025.201501.024

REFERENCES

1. Venttsel M. K. Sfericheskaya trigonometriya [Spherical trigonometry]. Moscow, Geodesic and Cartographic Literature Publ., 1948, 154 p.

2. Stepanov N. N. Sfericheskaya trigonometriya [Spherical trigonometry]. Leningrad, Moscow, OGIZ Publ., 1948, 154 p.

3. Travush V. I., Antoshkin V. D., Erofeev V. T. Sbornaya sfericheskaya obolochka. Patent na poleznuyu model RU №129534 ot 27.06.13 g. [Prefabricated spherical shells. Utility patent RU no. 129534 of 27.06.13].

4. Travush V. I., Antoshkin V. D., Erofeyev V. T. Sbornaya sfericheskaya obolochka [Patent] – Patent na izobretenie RU №2012116363 ot 20.02.14 g. [Prefabricated spherical shells. Invention patent RU no. 2012116363 of 20.02.14].

About the authors:

Nikonov Vladimir Ivanovich, associate professor (docent) of Algebra and Geometry chair of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya Str., Saransk, Russia), Candidate of Sciences (PhD) degree holder in Physico-Mathematical sciences, docent, nik_vl_@mail.ru

Antoshkin Vasiliy Dmitriyevich, head of Architecture chair of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya Str., Saransk, Russia), Candidate of Sciences (PhD) degree holder in Engineering sciences, antovd@mail.ru

For citation: Nikonov V. I., Antoshkin V. D. K zadache optimizatsii raspolozheniya sfericheskikh treugolnikov [On the problem of optimizing of the arrangement of spherical triangles]. *Vestnik Mordovskogo Universiteta* – Mordovia University Bulletin. 2015, vol. 25, no. 1, pp. 24–29. DOI: 10.15507/VMU.025.201501.024