МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

DOI: 10.15507/VMU.025.201501.013

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДРЕВОВИДНЫХ И РОМБОВИДНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В. Д. Ширяев, Е. В. Анощенкова, Р. Р. Бикмурзина

В статье рассматриваются статические модели иерархических систем управления. Практика создания и функционирования различных организационных, в том числе эколого-экономических, систем показывает, что процедура управления в них должна быть построена по иерархическому принципу. Задачи анализа и синтеза иерархических систем не укладываются в рамки обычной теории оптимального управления, так как в условиях взаимодействия подсистем становится неоднозначным само понятие оптимальности. Управление в рамках эколого-экономической системы, как правило, предполагает наличие иерархической структуры, отдельные элементы которой имеют собственные цели, не совпадающие с целью развития системы в целом. Нами рассматриваются древовидные и ромбовидные системы управления. Конфликтно-управляемые системы с иерархической структурой сводятся к иерархическим играм. Общий анализ двухуровневой модели иерархической системы управления сводится к нахождению решения игры. Древовидная система управления формализуется как бескоалиционная игра (n+1) лица (административного центра и производственных подразделений B_1, …, B_n), а ромбовидная система управления – как бескоалиционная игра четырех лиц в нормальной форме. В качестве принципа оптимальности в бескоалиционном случае используется равновесие по Нэшу. Приводятся конструктивные методы нахождения оптимальных решений для таких систем. При этом наблюдалась множественность ситуаций равновесия по Нэшу, что объясняется доминирующей ролью центра A_0 в игре.
Существование доминирующего игрока возможно и в других задачах конфликтного управления, однако мы ограничились лишь рассмотрением древовидных и ромбовидных систем управления.

***Ключевые слова*:** древовидная система управления, ромбовидная система управления, иерархическая игра, оптимальная стратегия, равновесие по Нэшу, задача параметрического программирования.

GAME-THEORETIC MODELS OF TREE-STRUCTURE AND DIAMOND-STRUCTURE SYSTEMS OF MANAGEMENT FUNCTIONING

V. D. Shiryayev, E. V. Anoshchenkova, R. R. Bikmurzina

Static models of hierarchical systems of management are considered in this research. The practice of creating and functioning of various organizational systems (including economic systems) shows that the process of their management should be based on the hierarchical principle. The goals of analysis and synthesis of hierarchical systems go beyond general optimal control theory, as with subsystems interacting, the very notion of optimality gets ambiguous. As a rule, the management within the scope of an economic system implies the presence of a hierarchical structure, the individual elements of which have their own goals, that could be different from the goal of the system's development in whole.
Tree-structure and diamond-structure systems of management are studied in this research. Conflict-controlled systems with hierarchical structure are added up to hierarchical games. In rather general conditions the analysis of a two-level model of hierarchical system of management comes to finding of the solution for a game. Tree-structure system of man-

agement is formalized as a non-cooperative game (n+1) of a player (administrative center and operating departments $B_1, \ldots, B_n$). Diamond-structure system of management is formalized as a non-cooperative game with four players in its normal form. Nash equilibrium is used as a principle of optimality in a noncooperative game. Constructive methods of finding optimal solutions for these kinds of systems are provided. Multiplicity of Nash equilibria encountered is determined by dominating role of the core A_0 in the game.
It goes without saying that the existence of a dominant player is possible in other tasks of conflict management. In our research, however, we confine ourselves to studying tree – structure and diamond-structure system of management only.

Keywords**:** tree-structure system of management, diamond-structure system of management, hierarchical game, optimal strategy, Nash equilibrium, parametric programming task.

Иерархическая структура управления (ИСУ) – это система управления, состоящая из последовательности уровней управления, следующих друг за другом в порядке определенного приоритета. Между элементами различных уровней иерархии могут быть как вертикальные, так и горизонтальные связи, выражаемые в обмене информацией, выборе согласованных решений и т. д. ИСУ характеризуются тем, что подразделения нижних уровней выбирают свои управления в рамках ограничений, наложенных подразделениями вышестоящих уровней, имеющих с ними вертикальные связи.

Основной причиной возникновения иерархической структуры управления является невозможность своевременного сбора и переработки большого объема информации об управляемых процессах единым управляющим центром, что может привести к принятию решений по неполной или устаревшей информации [1; 3; 5; 7; 10]. Обработка информации и принятие решений отдельными элементами системы (подсистемами) позволяет обычно уменьшать влияние такого рода неопределенности.

Практика создания и функционирования организационных систем показывает, что процедуры управления в них должны быть построены по иерархическому принципу. Типичным примером системы управления с иерархической структурой является система расчета народнохозяйственных планов капитальных вложений, начиная от отдела сводного планирования капитальных вложений (первый уровень иерархии) и заканчивая соответствующими отделами городских и районных исполнительных комитетов (последний уровень иерархии). Промежуточными уровнями управления здесь являются подотделы планирования капитальных вложений отраслевых отделов, подразделений НИИ и др.

Задачи анализа и синтеза иерархических систем не укладываются в рамки обычной теории оптимального управления, так как в условиях взаимодействия подсистем становится неоднозначным само понятие «оптимальность». Необходимость учета несовпадения интересов элементов экономической системы, наличия неопределенных факторов и различной степени информированности на разных уровнях признана экономистами и специалистами в области исследования операций.

В математической постановке иерархические системы обычно классифицируются по числу уровней и характеру вертикальных связей. В настоящее время наиболее разработанная область теории ИСУ – двухуровневые иерархические системы [2; 4; 6; 8]. Структуру такой системы образуют «центр» (подсистема, осуществляющая управление в системе) и *n* подчиненных центру подсистем («производителей»). В этом случае центр является единственным элементом верхнего уровня, а *n* «производителей» составляют *n* элементов нижнего уровня. Структуру ИСУ удобно задавать графом связей. Вершины графа соответствуют элементам системы, дуги графа могут отражать как материальные, так и информационные связи. На рис. 1 изображена двухуровневая ИСУ, состоящая из центра и *n* «производителей».

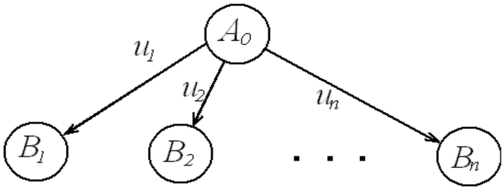


Рис. 1

Управление центра A_0 обозначим через $u=(u_1, u_2,..., u_n)$, где u_i – управляющее воздействие центра на подчиненное ему подразделение B_i, находящееся на втором уровне иерархии, а пространство управлений – U. Будем считать, что подсистемы обладают определенными правами принятия решений, т. е. B_i выбирают управления $v_i \in U_i(u)$, где $U_i(u)$ – пространство управлений подразделения B_i, предопределенное управлением $u \in U$, которое выбирается центром A_0. Векторы v_i – это продукты, т. е. результаты функционирования нижней ступени иерархии.

Будем считать, что центр A_0 сам ничего не «производит», а «интересуется» совокупным результатом производства, «производители» же заинтересованы в своих результатах. Тогда критерий эффективности для центра можно выразить в виде $h_0(u, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ($h_0 \geq 0$). Критерий эффективности i-й подсистемы в конечном счете представляет собой функцию $h_i(u_i, v_i)$, ($h_i \geq 0$), $i=\overline{1,n}$, т. е. h_i зависит только от управления центра и управления данной подсистемы. В этом случае говорят, что модель двухуровневой иерархической системы имеет «веерную» структуру. При этом все исследования значительно упрощаются.

Для определенности будем считать, что центр и «производители» стремятся максимизировать свои критерии эффективности. Далее везде множества U и U_i, $i=\overline{1,n}$, а следовательно, и $\prod_{i=1}^{n} U_i$ предполагаются компактными, а функции h_0 и h_i, $i=\overline{1,n}$, – непрерывными. Важнейшая особенность иерархических систем состоит в том, что первый ход делает центр, выбирая и сообщая каждому B_i значение u_i.

В общей постановке анализ двухуровневой модели ИСУ сводится к нахождению решения игры (n+1) лица [4; 6; 8]. При этом можно рассматривать как бескоалиционный, так и кооперативный варианты игры. Для формального описания игры необходимо определить ее участников, их критерии эффективности, стратегии и ограничения на поведение игроков. Задав описание игры, необходимо выбрать принцип оптимальности (принцип рационального поведения), что, в свою очередь, позволяет определить решение игры. В дальнейшем в качестве принципа оптимальности в бескоалиционном случае мы будем использовать равновесие по Нэшу.

Сообщая о своем управлении подчиненным подразделениям, центр тем самым входит в некоторую кооперацию с ними. В связи с этим практически более содержательным подходом является применение к данной задаче формализма кооперативных игр. Использование методологии кооперативной теории к ИСУ является естественным и по той причине, что во многих практических ситуациях принятия решений иерархическая система рассматривается как единый организм. При моделировании ИСУ кооперативными играми мы имеем дело с двумя элементами игры: характеристической функцией, измеряющей потенциальные силы коалиций, и векторами выигрышей игроков как дележей из С-ядра. Выбор С-ядра в качестве решения кооперативной игры как модели ИСУ объясняется тем, что недоминируемые дележи являются наиболее подходящими объектами достижения соглашений между индивидуумами, имеющими различные предпочтения. Однако применение этого принципа оптимальности затрудняется тем, что для многих игр С-ядро оказывается пустым. В связи с этим важной задачей является определение условий существования непустого С-ядра.

1. *Древовидная система управления*

Перейдем теперь к исследованию конкретных ИСУ. Различия между обычными двух- и трехуровневыми системами управления не являются принципиальными. Обобщая схему двухуровневых систем для трехуровневых, получаем (рис. 2) для:

$$A_0: h\left(u, v_1, \ldots, v_n, \varphi_{11}, \ldots, \varphi_{ij}, \ldots, \varphi_{nm_n}\right) \to \max_{u \in U},$$

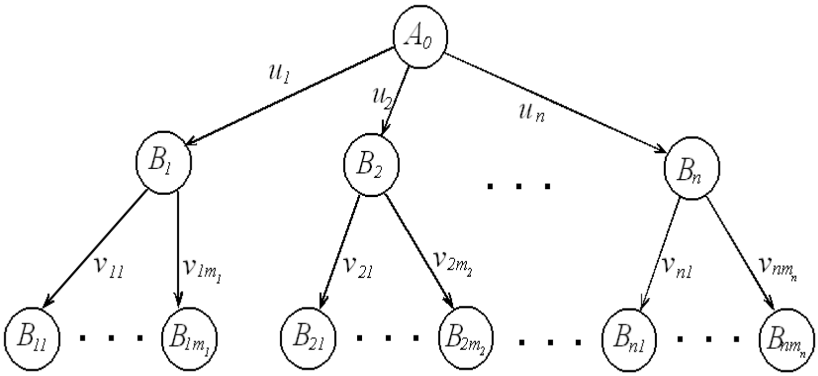
где φ_{ij} – управляющее воздействие подразделения третьего уровня иерархии B_{ij};

$$B_i: h_i\left(u_i, v_i, \varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{im_i}\right) \to \max_{v_i \in U_i(u)}, \ i=1,2,\ldots, n,$$

где $v_i = \left(v_{i1}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{im_i}\right)$, v_{ij} – воздействие B_i на B_{ij};

$$B_{ij}: h_{ij}\left(v_{ij}, \varphi_{ij}\right) \to \max_{\varphi_{ij} \in U_{ij}(v_i)},$$

где $U_{ij}(v_i)$ – множество управлений B_{ij}, предопределенное выбором управления v_i подразделения B_i.



Р и с. 2

В приведенных простейших схемах (см. рис.1–2) предполагается, что множество управлений и целевых функций подразделения i-го уровня зависит только от подразделений, предшествующих ему по иерархической линии, и не зависят от других подразделений i-го уровня (вертикальные связи). Под такое описание попадают, например, системы с последовательным подчинением подразделений.

Для простоты ограничимся рассмотрением двухуровневых систем, так как основные положения можно обобщить для более сложных систем. Рассмотрим древовидную систему управления с одним управляющим центром A_0 и n подчиненными производственными подразделениями (см. рис. 1). Математически задача формулируется следующим образом [6–7].

Центр A_0 распределяет ресурсы между производственными подразделениями $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые используют эти ресурсы для производства продукции. Выигрыши управляющего центра A_0 и n производственных подразделений $B_1, B_2, \ldots, B_n$ зависят от продукции, производимой $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Вектор ресурсов, имеющийся в распоряжении центра A_0, обозначим через b. Центр A_0 выбирает вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ из множества:

$$U = \Big\{u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \mid u_k \geq 0,$$

$$u_k \in R^l, k = \overline{1,n}; \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \mathrm{b}, b \geq 0\Big\}.$$

Здесь u_k интерпретируется как вектор ресурса, выделяемый центром A_0 производственному подразделению B_k. Возможности предприятия B_k определяются ресурсом u_k, получаемым от A_0, т. е. предприятие B_k выбирает свою производственную программу из множества $U_k(u)$ неотрицательных векторов: $v_k \in U_k(u) \subset R^m$.

Пусть $v = (v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$. Множество векторов $\{v\}$ стеснено ограничениями: $v_k A_k \leq u_k + \alpha_k$, $v_k \geq 0$, $k=1, 2, \ldots, n$. (1)

Здесь вектор v_k интерпретируется как производственная программа k-го производственного подразделения по различным видам продукции; A_k – производственная, или технологическая, матрица k-го производственного подразделения ($A_k \geq 0$); α_k – вектор наличных ресурсов k-го производственного подразделения $(\alpha_k \geq 0)$

Формализуем задачу как бескоалиционную игру (n+1) лица – административного центра A_0 и производственных подразделений B_1, B_2, …, B_n. Множество участников-игроков и множества их стратегий мы уже определили. Определим функции выигрыша. Для игрока A_0:

$$K_0\left(u, v_1\left(u_1\right), \ldots, v_n\left(u_n\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i, v_i\left(u\right)\right),$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – стратегия игрока A_0; $v_i\left(u_i\right)$ (производственная программа B_i зависит от ресурса u_i, выделяемого ему центром A_0, поэтому его стратегия есть функция от параметра u_i или в общем случае от u) – стратегия игрока B_i, удовлетворяющая условию (1);

$a_i (a_i \geq 0, a_i \in R^l, i = \overline{1,n})$ – вектор полезности центра A_0 от продукции, выпускаемой i-м производственным подразделением;

$(a_i, v_i(u))$– скалярное произведение векторов a_i и $v_i(u)$. Функция выигрыша игрока B_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$:

$$K_i\left(u, v_1\left(u_1\right), \ldots, v_n\left(u_n\right)\right) = \left(c_i, v_i\left(u\right)\right),$$

где $c_i (c_i \geq 0, c_i \in R^l, i = \overline{1,n})$ – вектор полезности B_i от своей продукции.

Каждый из игроков естественно стремится максимизировать свой выигрыш. Таким образом, мы определили бескоалиционную игру (n+1) лица в нормальной форме:

$$\Gamma = \left\langle \left\{A_0, B_1, \ldots, B_n\right\}, U, \left\{U_i\left(u\right)\right\}_{i\in[1,n]}, \left\{K_i\left(\bullet\right)\right\}_{i\in[0,n]} \right\rangle.$$

2. *Ситуация равновесия по Нэшу в древовидной иерархической игре*

Заметим, что игроки B_i, $i = \overline{1,n}$, выбирают свои стратегии (производственные программы) в зависимости от стратегии игрока A_0. Рассматриваемая игра является игрой с полной информацией и, следовательно, в ней существует ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Найдем ситуацию равновесия в описанной выше бескоалиционной игре. Рассмотрим задачу параметрического программирования (параметром является вектор u):

$$\max_{v_i}(c_i, v_i(u)) \tag{2}$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} v_i A_i &\leq u_i + \alpha_i, \\ v_i &\geq 0, u_i \geq 0, \alpha_i \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Решение задачи (2) – (3) $v_i^* = v_i^*(u)$ оказывается функцией параметра u и определяет оптимальную стратегию игрока B_i. Выигрыш игрока B_i в ситуации $v_i^*(u)$ равен $\left(c_i, v_i^*\left(u\right)\right)$.

Пусть далее $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$ – решение задачи:

$$\max_{u} \sum_{i=1}^{n}\left(a_i, v_i^*\left(u\right)\right) \tag{4}$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} u_i &\leq b, \\ u_i &\geq 0, i = \overline{1,n}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Заметим, что задача (4) – (5) является задачей нелинейного программирования с существенно разрывной целевой функцией (максимизация ведется по u, а $v_i^*(u)$ – разрывная функция параметра u). Вектор $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$ определяет оптимальный план распределения ресурсов, с точки зрения игрока A_0.

Теорема 1. Совокупность

$$(u^*, v_1^*\left(u\right), \ldots, v_i^*\left(u\right), \ldots, v_n^*\left(u\right)), \tag{6}$$

где u^* – решение задачи (4) – (5), а $v_i^*(u)$ – решение задачи (2) – (3) при параметре u, является ситуацией равновесия в рассматриваемой игре.

Доказательство. По определению решения задачи (4) – (5) для всех $u \in U$:

$$K_0\left(u^*,v_1^*\left(u^*\right),\ldots,v_n^*\left(u^*\right)\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^n\left(a_i,v_i^*\left(u^*\right)\right)\geq\sum_{i=1}^n\left(a_i,v_i^*\left(u\right)\right)=$$
$$=K_0\left(u,v_1^*\left(u\right),\ldots,v_n^*\left(u\right)\right),$$

по определению же решения задачи (2) – (3) для всех $v_i\in U_i\left(u_i\right)$:

$$K_i\left(u^*,v_1^*\left(u^*\right),\ldots,v_i^*\left(u^*\right),\ldots,v_n^*\left(u^*\right)\right)=$$
$$=\left(c_i,v_i^*\left(u^*\right)\right)\geq\left(c_i,v_i\left(u^*\right)\right)=$$
$$=K_i\left(u^*,v_1^*\left(u^*\right),\ldots,v_{i-1}^*\left(u^*\right),\right.$$
$$\left.v_i\left(u^*\right),v_{i+1}^*\left(u^*\right),\ldots,v_n^*\left(u^*\right)\right),i=\overline{1,n}.$$

Таким образом, каждому из игроков $A_0,B_1,...,B_n$ невыгодно в одностороннем порядке отклоняться от ситуации (6), т. е. она является равновесной.

Эта ситуация устойчива к отклонению от нее любой коалиции $S\subset\left\{B_1,\ldots,B_n\right\}$. Действительно, пусть $S=\left\{B_{i_1},\ldots,B_{i_q}\right\}$ – произвольная группа игроков (без A_0). Для любого $\left\{B_{i_k}\right\}\in S,k=\overline{1,q}$, и любой стратегии $\overline{v}^S=\left(\overline{v}_{i_1},\ldots,\overline{v}_{i_q}\right)$ имеем:

$$K_{ik}\left(u^*,v_1^*\left(u^*\right),\ldots,v_i^*\left(u^*\right),\ldots,v_n^*\left(u^*\right)\right)=$$
$$=\left(c_{i_k},v_{i_k}^*\left(u^*\right)\right)\geq\left(c_{i_k},\overline{v}_{i_k}\left(u^*\right)\right)=$$
$$=K_{i_k}\left(u^*,v^*\left(\overline{u}^*\right)\|\,\overline{v}^s\left(u^*\right)\right).$$

Итак, групповое отклонение от ситуации равновесия (6) невыгодно ни для одного из игроков $B_1,...,B_n$. Следовательно, ситуация (6) будет сильно равновесной, если предполагать, что в коалицию будут вступать лишь игроки $B_1,...,B_n$, и почти сильно равновесной, если в коалицию может вступить и игрок A_0 [8].

Построим еще одну ситуацию равновесия в игре Г. Рассмотрим задачу нелинейного программирования:

$$\max_{v_i}\left(c_i,v_i\left(0\right)\right)\tag{7}$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{array}{r}v_iA_i\leq\alpha_i,\\ v_i\geq 0,\alpha_i\geq 0.\end{array}\right\}\tag{8}$$

Пусть $v_i^*\left(0\right)$ – решение задачи (7) – (8). Положим $\left(c_i,v_i^*\left(0\right)\right)=\beta_i$. Пусть далее $\overline{u}=\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\ldots,\overline{u}_n\right)$ и $\overline{v}=\left(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_n\right)$ – решение задачи:

$$\max_u\max_{v_i,\,i\in[1,n]}\sum_{i=1}^n\left(a_i,v_i\left(u\right)\right)\tag{9}$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{i=1}^n u_i\leq b,\\ \left(c_i,v_i\left(u\right)\right)\geq\beta_i,i=\overline{1,n},\\ u_i\geq 0,v_i\geq 0,i=\overline{1,n}.\end{array}\right\}\tag{10}$$

Определим стратегию $\left[u^H\right]^*=\left(\left[u_1^H\right]^*,\left[u_2^H\right]^*,\ldots,\left[u_n^H\right]^*\right)$, где

$$\left[u_i^H\right]^*=\begin{cases}\overline{u}_i,\ \textit{если}\ v_i=\overline{v}_i,\\ 0,\ \textit{если}\ v_i\neq\overline{v}_i.\end{cases}$$

Эту стратегию будем называть стратегией «наказания», смысл происхождения которой ясен из определения. Положим

$$\overline{\overline{v}}_i\left(u\right)=\begin{cases}\overline{v}_i,\ \textit{если}\ u=\overline{u}\\ \textit{произвольная функция}\ v_i(u),\\ \textit{удовлетворяющая ограничениям}\ (3)\\ \textit{если}\ u\neq\overline{u}.\end{cases}$$

Теорема 2. Совокупность

$$\left(\left[u^H\right]^*,\overline{\overline{v}}_1(\overline{u}),\ldots,\overline{\overline{v}}_i(\overline{u}),\ldots,\overline{\overline{v}}_n(\overline{u})\right)\tag{11}$$

является ситуацией равновесия в рассматриваемой игре.

Доказательство. По определению решения задачи (9) – (10) для всех $u\in U$:

$$K_0\left(\left[u^H\right]^*, \bar{\bar{v}}_1(\bar{u}),\ldots,\bar{\bar{v}}_i(\bar{u}),\ldots,\bar{\bar{v}}_n(\bar{u})\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^n\left(a_i,\bar{v}_i(\bar{u})\right)\ge\sum_{i=1}^n\left(a_i,v_i(u)\right)=$$
$$=K_0\left(u,\bar{\bar{v}}_1(u),\ldots,\bar{\bar{v}}_i(u),\ldots,\bar{\bar{v}}_n(u)\right),$$

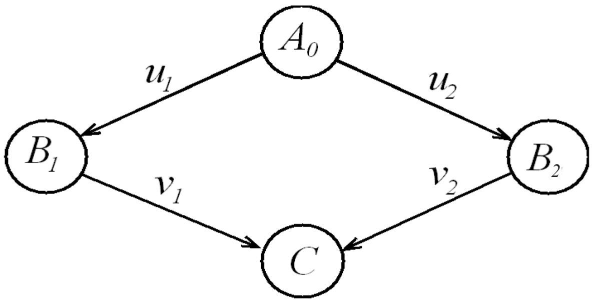
а для всех $v_i \in U_i(u_i)$:

$$K_i\left(\left[u^H\right]^*, \bar{\bar{v}}_1(\bar{u}),\ldots,\bar{\bar{v}}_i(\bar{u}),\ldots,\bar{\bar{v}}_n(\bar{u})\right)=$$
$$=\left(c_i,\bar{\bar{v}}_i(\bar{u})\right)\ge\left(c_i,v_i^*(0)\right)=\beta_i, i=\overline{1,n}.$$

Следовательно, ситуация (11) является равновесной по Нэшу в игре Г. Можно показать, что эта ситуация устойчива против отклонения от нее любой коалиции игроков $S\subset\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$.

3. *Ромбовидная система управления*

На практике часто встречаются организации двойного (параллельного) подчинения. Иерархические системы с подразделениями двойного подчинения называются ромбовидными [8; 10]. Простейшая схема ромбовидной системы управления приведена на рис. 3.



Р и с. 3

Управление подразделения двойного подчинения C зависит как от управления B_1, так и от управления B_2. Простейшая ромбовидная система управления является примером иерархической системы с тремя уровнями принятия решения. На высшем уровне находится административный центр, располагающий материальными и трудовыми ресурсами. Он воздействует на деятельность двух подчиненных ему административных центров, принадлежащих следующему уровню. От решений, принимаемых этими центрами, зависит объем производства предприятия, находящегося на нижнем уровне иерархической системы.

Построим теоретико-игровую модель этой системы управления. Будем рассматривать ее как игру четырех лиц. Задача состоит в построении оптимального плана действий административных центров A_0, B_1 и B_2.

Обозначим через b вектор ресурсов, которыми располагает игрок A_0. Переходя к игровой постановке, будем считать, что на первом шаге ходит игрок A_0 и выбирает элемент (стратегию) $u=(u_1,u_2)$ из множества:

$$U=\left\{u=(u_1,u_2)\middle| u_k\ge 0, u_k\in R^l,\right.$$
$$\left.k=1,2; u_1+u_2\le b, b\ge 0\right\}.$$

Вектор u_i интерпретируется как набор ресурсов l наименований, выделяемых центром A_0 для $B_i, i=1,2$. Множество U будем называть множеством стратегий игрока A_0. Элемент $u\in U$ ограничивает возможность выбора игроков B_1 и B_2 на следующем шаге. Другими словами, множество альтернатив игрока B_1 является функцией параметра u_1 (будем обозначать ее через $B_1(u_1)$) и аналогично множество альтернатив игрока B_2 оказывается функцией параметра u_2 ($B_2(u_2)$). Через $v_1\in B_1(u_1)$ и $v_2=B_2(u_2)$ обозначим элементы множеств альтернатив игроков B_1 и B_2 соответственно.

На третьем шаге ходит игрок C. Его выбор (производственная программа) зависит от ресурсов v_1 и v_2, т. е. множество альтернатив игрока C оказывается функцией параметров v_1 и v_2. Обозначим его через $C(v_1,v_2)$, а элементы этого множества (производственные программы) – через w:

$$C(v_1,v_2)=\left\{w\middle|wA\le z+\alpha, w\ge 0, w\in R^k\right\},$$

где A – технологическая матрица для игрока C $(A\ge 0)$, компоненты вектора $z=(v_1,v_2)$ являются компонентами вектора ресурсов, которые используются игроком C; α – вектор наличных ресурсов производственного подразделения C $(\alpha\ge 0)$.

Итак, стратегиями игрока A_0 являются элементы $u=(u_1,u_2)\in U$; стратегиями игроков B_1, B_2 и C – функции $v_1(u_1)$, $v_2(u_2)$ и $w(v_1,v_2)$ соответственно, со значениями в множествах $B_1(u_1)$, $B_2(u_2)$ и $C(v_1,v_2)$, которые каждому возможному выбору игрока (или игроков), находящегося на более высоком уровне, ставят в соответствие выбор альтернативы данного игрока.

Определим функции выигрыша игроков. Выигрыши всех игроков зависят только от производственной программы w, выбираемой игроком C. Пусть $\left((u_1,u_2),v_1(u_1),v_2(u_2),w(v_1,v_2)\right)$ – некоторая ситуация игры, т. е.

$$u=(u_1,u_2)\in U,\ v_1\in B_1(u_1),\ v_2\in B_2(u_2),\ w\in C(v_1,v_2).$$

Тогда функции выигрыша игроков A_0, B_1, B_2 и C будут равны соответственно:

$$J_{A_0}\left((u_1,u_2),v_1(u_1),v_2(u_2),w(v_1,v_2)\right)=f_1(w);$$
$$J_{B_1}\left((u_1,u_2),v_1(u_1),v_2(u_2),w(v_1,v_2)\right)=f_2(w);$$
$$J_{B_2}\left((u_1,u_2),v_1(u_1),v_2(u_2),w(v_1,v_2)\right)=f_3(w);$$
$$J_{C}\left((u_1,u_2),v_1(u_1),v_2(u_2),w(v_1,v_2)\right)=f_4(w).$$

Здесь мы предполагаем, что $f_i\ge 0$, $i=\overline{1,4}$, и существует такое $w_0\in C(v_1,v_2)$, что при всех $v_1\in B_1(u_1)$, $v_2\in B_2(u_2)$, $u\in U$

$$f_1(w_0)=f_2(w_0)=f_3(w_0)=f_4(w_0)=0.$$

Таким образом мы определим бескоалиционную игру четырех лиц в нормальной форме:

$$\Gamma=\left\langle\{A_0,B_1,B_2,C\},U,B_1(u_1),\right.$$
$$\left.B_2(u_2),C(v_1,v_2),f_1,f_2,f_3,f_4\right\rangle.$$

4. *Ситуация равновесия по Нэшу в ромбовидной иерархической игре*

Найдем ситуацию равновесия по Нэшу в построенной игре. Для каждой пары (v_1,v_2), где $v_1\in B_1(u_1)$, $v_2\in B_2(u_2)$, игрок C решает следующую задачу параметрического программирования:

$$\max_w f_4(w) \tag{12}$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} wA\le z+\alpha,\\ w\ge 0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Решение задачи (12) – (13) $w^*=w^*(v_1,v_2)$ оказывается функцией параметров v_1 и v_2 и определяет оптимальную стратегию игрока C. Выигрыш игрока C в ситуации w^* равен $f_4(w^*)$.

Рассмотрим вспомогательную параметрическую (с параметрами u_1, u_2) игру $\Gamma'(u_1,u_2)=\left\langle\{B_1,B_2\},B_1(u_1),B_2(u_2),f_2,f_3\right\rangle$ двух лиц B_1 и B_2, где $f_2=f_2\left(w(v_1,v_2)\right)$ и $f_3=f_3\left(w(v_1,v_2)\right)$ – функции выигрыша игроков B_1 и B_2 соответственно.

Предположим, что в игре $\Gamma'(u_1,u_2)$ существует ситуация равновесия по Нэшу – $\left(v_1^*(u_1,u_2),v_2^*(u_1,u_2)\right)$. Пусть пара (u_1^*,u_2^*) есть решение следующей задачи нелинейного программирования:

$$\max_{(u_1,u_2)} f_1\left(w^*\left(v_1^*(u_1,u_2),v_2^*(u_1,u_2)\right)\right) \tag{14}$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} u_1+u_2 &\le b,\\ u_1\ge 0, u_2 &\ge 0.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Решив эту задачу, найдем векторы u_1^*, u_2^*, определяющие оптимальные планы распределения ресурсов, с точки зрения игрока A_0.

Теорема 3. Совокупность

$$\left(\left(u_1^*, u_2^*\right), v_1^*, v_2^*, w^*\right), \qquad (16)$$

где $\left(u_1^*, u_2^*\right)$ – решение задачи (14) – (15); $\left(v_1^*, v_2^*\right)$ – ситуация равновесия в игре $\Gamma'\left(u_1^*, u_2^*\right)$; w^* – решение задачи (12) – (13) при параметрах v_1^*, v_2^*, является ситуацией равновесия по Нэшу в игре *Г*.

Доказательство. Для удобства введем следующие обозначения:

$$J_{A_0}\left(\left(u_1,u_2\right),v_1\left(u_1,u_2\right),v_2\left(u_1,u_2\right),w\left(v_1,v_2\right)\right)=$$
$$=f_1\left(w\left(v_1\left(u_1,u_2\right),v_2\left(u_1,u_2\right)\right)\right);$$
$$J_{B_1}\left(\left(u_1,u_2\right),v_1\left(u_1,u_2\right),\right.$$
$$\left.v_2\left(u_1,u_2\right),w\left(v_1,v_2\right)\right)=f_2\left(w\left(v_1,v_2\right)\right);$$
$$J_{B_2}\left(\left(u_1,u_2\right),v_1\left(u_1,u_2\right),\right.$$
$$\left.v_2\left(u_1,u_2\right),w\left(v_1,v_2\right)\right)=f_3\left(w\left(v_1,v_2\right)\right);$$
$$J_{C}\left(\left(u_1,u_2\right),v_1\left(u_1,u_2\right),\right.$$
$$\left.v_2\left(u_1,u_2\right),w\left(v_1,v_2\right)\right)=f_4\left(w\left(v_1,v_2\right)\right).$$

По определению решения задачи (14) – (15), для всех $\left(u_1, u_2\right)\in U$:

$$J_{A_0}\left(\left(u_1^*,u_2^*\right),v_1^*\left(u_1,u_2\right),v_2^*\left(u_1,u_2\right),w^*\left(v_1,v_2\right)\right)=$$
$$=\max_{\left(u_1,u_2\right)\in U} f_1\left(w^*\left(v_1^*\left(u_1,u_2\right),v_2^*\left(u_1,u_2\right)\right)\right)=$$
$$=f_1\left(w^*\left(v_1^*\left(u_1^*,u_2^*\right),v_2^*\left(u_1^*,u_2^*\right)\right)\right)\ge$$
$$\ge f_1\left(w^*\left(v_1^*\left(u_1,u_2\right),v_2^*\left(u_1,u_2\right)\right)\right)=$$
$$=J_{A_0}\left(\left(u_1,u_2\right),v_1^*\left(u_1,u_2\right),v_2^*\left(u_1,u_2\right),w^*\left(v_1,v_2\right)\right).$$

Поскольку v_1^* и v_2^* образуют ситуацию равновесия по Нэшу во вспомогательной игре $\Gamma'\left(u_1,u_2\right)$, то

$$J_{B_1}\left(\left(u_1^*,u_2^*\right),v_1^*\left(u_1,u_2\right),\right.$$
$$\left.v_2^*\left(u_1,u_2\right),w^*\left(v_1,v_2\right)\right)=f_2\left(w^*\left(v_1^*,v_2^*\right)\right)\ge$$
$$\ge f_2\left(w^*\left(v_1,v_2^*\right)\right)=J_{B_1}\left(\left(u_1^*,u_2^*\right),v_1\left(u_1,u_2\right),\right.$$
$$\left.v_2^*\left(u_1,u_2\right),w^*\left(v_1,v_2\right)\right)$$

для всех $v_1\in B_1\left(u_1\right)$,

$$J_{B_2}\left(\left(u_1^*,u_2^*\right),v_1^*\left(u_1,u_2\right),v_2^*\left(u_1,u_2\right),w^*\left(v_1,v_2\right)\right)=$$
$$=f_3\left(w^*\left(v_1^*,v_2^*\right)\right)\ge f_3\left(w^*\left(v_1^*,v_2\right)\right)=$$
$$=J_{B_2}\left(\left(u_1^*,u_2^*\right),v_1^*\left(u_1,u_2\right),v_2\left(u_1,u_2\right),w^*\left(v_1,v_2\right)\right)$$

для всех $v_2\in B_2\left(u_2\right)$.

По определению решения задачи (12) – (13), для всех $w\in C\left(v_1,v_2\right)$:

$$J_{C}\left(\left(u_1^*,u_2^*\right),v_1^*\left(u_1,u_2\right),\right.$$
$$\left.v_2^*\left(u_1,u_2\right),w^*\left(v_1,v_2\right)\right)=$$
$$=\max_{w\in C\left(v_1,v_2\right)} f_4\left(w\left(v_1,v_2\right)\right)=f_4\left(w^*\left(v_1,v_2\right)\right)\ge$$
$$\ge f_4\left(w\left(v_1,v_2\right)\right)=J_C\left(\left(u_1^*,u_2^*\right),v_1^*\left(u_1,u_2\right),\right.$$
$$\left.v_2^*\left(u_1,u_2\right),w\left(v_1,v_2\right)\right).$$

Следовательно, ситуация (16) действительно является равновесной по Нэшу в игре *Г* четырех лиц A_0, B_1, B_2 и C.

Аналогично тому, как это делалось в случае древовидной системы управления, можно показать, что эта ситуация устойчива и против отклонения от нее любой группы игроков $S\subset\left\{A_0,B_1,B_2\right\}$.

Таким образом, иерархические системы управления предполагают наличие нескольких сторон, каждая из которых стремится к достижению своей цели, т. е. это типичная конфликтно-управляемая система. Именно поэтому принятие решения в таких системах, с позиций теории игр многих лиц, вполне оправдано. Особенностью игр, служащих моделями иерархических систем, является то, что в них имеется один игрок, выбирающий свои стратегии независимо, а стратегии остальных зависят от выбора одного или нескольких игроков. При такой постановке для определения оптимальных стратегий игроков естественным образом возникают параметрические оптимизационные задачи. Это, безусловно, вносит дополнительные сложности, в первую очередь технического порядка. Между тем в настоящее время для решения параметрических задач имеются достаточно хорошо разработанные вычислительные алгоритмы и поэтому такой способ определения оптимальных стратегий игроков можно считать конструктивным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Гермейер, Ю. Б.** О некоторых задачах теории иерархических систем / Ю. Б. Гермейер, Н. Н. Моисеев // Проблемы прикладной математики и механики. – Москва : Наука, 1971. – С. 30–43.

2. **Горелик, В. А.** Иерархические оптимизационно-координирующие системы / В. А. Горелик // Кибернетика. – 1978. – № 1. – С. 87–94.

3. **Горелик, В. А.** Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах / В. А. Горелик, А. Ф. Кононенко. – Москва : Радио и связь, 1982. – 144 с.

4. **Кононенко, А. Ф.** Теоретико-игровой анализ двухуровневой иерархической системы управления / А. Ф. Кононенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – № 5. – С. 1161–1170.

5. **Кононенко, А. Ф.** Теория игр и иерархические структуры / А. Ф. Кононенко // Планирование и управление экономическими целенаправленными системами. – Новосибирск : Наука, 1974. – С. 63–72.

6. **Моисеев, Н. Н.** Иерархические структуры и теория игр / Н. Н. Моисеев // Техническая кибернетика. – 1973. – № 6. – С. 1–11.

7. **Петросян, Л. А.** Древовидные системы управления / Л. А. Петросян, В. Д. Ширяев // Качественная теория дифференциальных уравнений и теория управления движением. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 1985. – С. 80–90.

8. **Петросян, Л. А.** Иерархические игры : учебное пособие / Л. А. Петросян, В. Д. Ширяев. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 1986. – 92 с.

9. **Ширяев, В. Д.** Древовидная иерархическая модель управления : материалы Республиканской научно-практической конференции «Формирование инновационной модели развития региона» / В. Д. Ширяев, Т. Н. Нестерова. – Саранск, 2003. – Ч. 1. – С. 163–166.

10. **Ширяев, В. Д.** Ромбовидная иерархическая система управления : материалы Всероссийской научной конференции «Проблемы устойчивого социально-экономического и культурного развития регионов Российской Федерации» / В. Д. Ширяев, Т. Н. Нестерова. – Саранск : Тип. «Крас. Окт.», 2004. – С. 217–219.

Поступила 05.03.2014 г.

Об авторах:

Ширяев Виктор Дмитриевич, профессор кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, Shiryayevvd@mail.ru

Анощенкова Екатерина Васильевна, преподаватель кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), anoshehnkovaev@mail.ru

Бикмурзина Равиля Ряшитовна, доцент кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат педагогических наук, bravilya@mail.ru

Для цитирования: Ширяев, В. Д. Теоретико-игровые модели функционирования древовидных и ромбовидных систем управления / В. Д. Ширяев, Е. В. Анощенкова, Р. Р. Бикмурзина // Вестник Мордовского университета. – 2015. – Т. 25, № 1. – С. 13–23. DOI: 10.15507/VMU.025.201501.013

REFERENCES

1. Germeier Yu. B., Moiseev N. N. O nekotorykh zadachakh teorii ierarkhicheskikh sistem [On Some Problems of Hierarchical Systems Theory]. *Problemy prikladnoy matematiki i mekhaniki* – Problems of Applied Mathematics and Mechanics. Moscow, 1971, pp. 30–43.

2. Gorelik V. A. Ierarkhicheskie optimizatsionno-koordiniruyushchie sistemy [Hierarchical optimization and coordination systems]. *Cybernetics* – Kibernetika, 1978, no. 1, pp. 87–94.

3. Gorelik V. A., Kononenko A. F. Teoretiko-igrovye modeli prinyatiya resheniy v ekologo-ekonomicheskikh sistemakh [Game-theoretic models for decision-making in ecological and economic systems]. Moscow, Radio and Communications Publ., 1982, 144 p.

4. Kononenko A. F. Teoretiko-igrovoy analiz dvukhurovnevoy ierarkhicheskoy sistemy upravleniya [Game theoretic analysis of the two-level hierarchical structure of management]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* – The Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1974, no. 5, pp. 1161–1170.

5. Kononenko A. F. Teoriya igr i ierarkhicheskie struktury [Game theory and hierarchical structures]. *Planirovanie i upravlenie ekonomicheskimi ts yelenapravlennymi sistemami* – Planning and managing of economic intentional systems. Novosibirsk, Nauka Publ., 1974, pp. 63–72.

6. Moiseev N. N. Ierarkhicheskie struktury i teoriya igr [Hierarchical structures and game theory]. *Tekhnicheskaya kibernetika* – Technical Cybernetics. 1973, no. 6, pp. 1–11.

7. Petrosyan L. A., Shiryayev V. D. Drevovidnye sistemy upravleniya [Tree-structure systems of management]. *Kachestvennaya teoriya differentsialnykh uravneniy i teoriya upravleniya dvizheniem* – Qualitative theory of differential equations and motion control theory. Saransk, Mordovia State University Press Publ., 1985, pp. 80–90.

8. Petrosyan L. A., Shiryayev V. D. Ierarkhicheskie igry: uchebnoe posobie [Hierarchical Games: Tutorial]. Saransk, Mordovia State University Press Publ., 1986, 92 p.

9. Shiryayev V. D., Nesterova T. N. Drevovidnaya ierarkhicheskaya model upravleniya [Tree-structure hierarchical model of management]. *Materialy Respublikanskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Formirovanie innovatsionnoy modeli razvitiya regiona"* – Materials of Republican Theoretical and Practical Conference "Formation of an Innovation Model for Regional Development". Saransk, 2003, part 1, pp.163–166.

10. Shiryayev V. D., Nesterova T. N. Rombovidnaja ierarhicheskaja sistema upravlenija [Diamond-structure hierarchical system of management]. *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii* "*Problemy ustoychivogo sotsialno-ekonomicheskogo i kulturnogo razvitiya regionov Rossiyskoy Federatsii*" – Materials of All-Russian Scientific Conference "Problems of Stable Socio-Economic and Cultural Development of Russian Federation Regions". Saransk, Krasniy Oktyabr Publ., 2004, pp. 217–219.

About the authors:

Shiryayev Viktor Dmitriyevich, professor of Fundamental Informatics chair of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya Str., Saransk, Russia), Candidate of Sciences (PhD) degree holder in Physico-mathematical sciences, docent, Shiryayevvd@mail.ru

Anoshchenkova Ekaterina Vasilyevna, lecturer of Fundamental Informatics chair of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya Str., Saransk, Russia), anoshehnkovaev@mail.ru

Bikmurzina Ravilya Ryashitovna, associate professor (docent) of Fundamental Informatics chair of Ogarev Mordovia State University (68, Bolshevistskaya Str., Saransk, Russia), Candidate of Sciences (PhD) degree holder in Pedagogical sciences, bravilya@mail.ru

For citation: Shiryayev V. D., Anoshchenkova E. V., Bikmurzina R. R. Teoretiko-igrovye modeli funktsionirovaniya drevovidnykh i rombovidnykh sistem upravleniya [Game-theoretic models of tree-structure and diamond-structure systems of management functioning]. *Vestnik Mordovskogo Universiteta* – Mordovia University Bulletin. 2015, vol. 25, no. 1, pp. 13–23. DOI: 10.15507/VMU.025.201501.013