УДК 372.851

# ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ: СОВРЕМЕННЫЕ ОЧЕРТАНИЯ И ПРИНЦИПЫ ПРИМЕНЕНИЯ

# THE ELEMENTARY METHODS OF SOLVING EXTREMAL PROBLEMS: THE CONTEMPORARY OUTLINES AND PRINCIPLES OF EXPLORATION

**Роберт Михайлович НИЖЕГОРОДЦЕВ**
*д. э. н., заведующий лабораторией экономической динамики и управления инновациями Института проблем управления РАН*
*E-mail: bell44@rambler.ru*

**Robert M. NIZHEGORODTSEV**
*Doctor of Economic Sciences, Head of the Laboratory of Economic Dynamics and Control of Innovation of the Institute of Control Sciences RAS (Moscow)*

*Аннотация. Статья посвящена обсуждению различных элементарных методов решения экстремальных задач: алгебраическим, геометрическим, аналитическим. Особое внимание уделяется методам решения многопараметрических задач на экстремум: методу итераций, методу расслоения, методу стандартных неравенств.*

*Summary. The paper is devoted to investigation of different methods of solving extremal problems: algebraic, geometrical, analytical ones. The special attention is paid to solving multiparametric extremal problems: the iteration method, the exfoliation method, the method of standard inequalities.*

***Ключевые слова:*** *задачи на экстремум, метод итераций, метод расслоения, метод стандартных неравенств.*
***Key words:*** *extremal problems, the iteration method, the exfoliation method, the method of standard inequalities.*

**Постановка проблемы.** Одним из важнейших и наиболее трудных классов задач, встречающихся в курсах элементарной математики, являются задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций, которые часто (не вполне корректно, но традиционно) называют задачами на экстремум.

Стандартные курсы элементарной математики нередко предполагают, что задачи на экстремум могут быть решены исключительно при помощи аналитического алгоритма, смысл которого заключается в исследовании некой функции средствами математического анализа. Иные способы решения подобных задач чаще всего остаются за пределами их внимания. Между тем, указанный способ (даже в тех случаях, когда его применение приводит к цели) нередко является не самым удобным и коротким.

Существует и целый ряд задач, элементарных по своей постановке, которые не могут быть решены подобным образом. К ним относятся, в частности, так называемые многопараметрические задачи на экстремум. К сожалению, курсы элементарной математики не предлагают эвристических идей, при помощи которых можно справляться с такими задачами. При этом обучение учащихся решению подобных задач становится неразрешимой проблемой. Все, что можно им посоветовать в таких ситуациях, – это внимательно смотреть на задачу до тех пор, пока надлежащий путь решения не придет в голову. Это обстоятельство однозначно свидетельствует об относительно слабой методической разработанности данного раздела элементарной математики. Между тем, существует целый ряд эвристических идей и приемов, которые могут успешно применяться при решении нестандартных задач на экстремум.

Ключевая проблема заключается в том, чтобы предложить определенные эвристические приемы, которые позволяют решать задачи на экстремум в тех случаях, когда стандартный алгоритм, связанный с исследованием функций при помощи производной, не приводит к искомому результату либо этот путь сопряжен с преодолением значительных препятствий. В связи с этим представляют особый интерес разработка, исследование и методическое усовершенствование эвристических идей, при помощи которых могут быть решены так называемые нестандартные задачи на экстремум.

**Обоснование полученных научных результатов.** Прежде всего, заметим, что элементарные методы решения задач на экстремум встречаются не только в курсе элементарной, но и в курсе высшей математики. Наряду с мощным аналитическим аппаратом, который предлагает математический анализ, не следует забывать об элементарных методах, доступных слушателям, не знакомым с принципами Гамильтона и Эйлера – Лагранжа.

Подавляющее большинство так называемых стандартных задач на экстремум предполагает непрерывное изменение некоторого параметра (величина какого-либо угла, длина отрезка, положение точки на прямой и т. д.), от которого зависит величина y, подлежащая минимизации или максимизации. Обозначая величину, связанную с данным параметром, через x, учащиеся находят функциональную зависимость y=f(x), после чего поиск экстремального значения величины y сводится к исследованию функции f(x) и нахождению ее наибольших или наименьших значений в соответствующей области.

Данный метод решения экстремальных задач имеет весьма широкий класс приложений, пожалуй, наиболее распространенное из которых - исследование функций и построение их графиков.

В тех случаях, когда указанный аналитический алгоритм не приводит к цели либо его применение связано с существенными трудностями, элементарная задача на экстремум считается нестандартной.

Стандартные неравенства в решении задач на экстремум. В процессе решения многих экстремальных задач применяются стандартные неравенства, выражающие экстремальные свойства определенных функций одной или нескольких переменных. Модуль любого числа больше или равен нулю, синус и косинус не превосходят единицы и т. д.

***Задача 1.*** Доказать неравенство

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$$

при $\alpha, \beta \in (0;\ \pi)$

Решение вытекает из известного тригонометрического тождества

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

поскольку значение косинуса не превосходит 1. В случае a ≠b косинус строго меньше 1, и имеет место строгое неравенство. Доказанное неравенство есть не что иное, как неравенство Иенсена (при двух переменных) для функции sin x, выпуклой вверх на промежутке (0; $\pi$ ).

Часто встречающиеся ситуации связаны с применением неравенств между средними величинами, например, между средним арифметическим и средним геометрическим. В частности, произведение любого числа положительных сомножителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшего значения в случае, когда все они равны между собой. Обратно: сумма любого числа положительных слагаемых, произведение которых постоянно, достигает наименьшего значения в случае, когда все они равны между собой. Эти и некоторые другие факты часто могут быть использованы при аналитическом решении различных (в том числе и так называемых стандартных) задач на экстремум, однако их применение нередко требует обращения к достаточно искусственным приемам [7, 8].

***Задача 2***. Определить, какое наибольшее значение может принимать произведение трех положительных чисел, если сумма их попарных произведений постоянна и равна А.

Решение методом стандартных неравенств. Обозначим три числа через a, b, c. Тогда

$$abc = \left(\sqrt[3]{ab\cdot ac\cdot bc}\right)^{3/2} \le \left(\frac{ab+ac+bc}{3}\right)^{3/2} = (A/3)^{3/2}.$$

Следовательно, произведение трех чисел не превосходит $(A/3)^{3/2}$, причем эта оценка является точной, и данное максимальное значение достигается в случае ab=ac=bc, откуда вытекает a=b=c.

Другие алгебраические методы. К часто встречающимся алгебраическим методам можно отнести метод введения вспомогательного параметра и метод условных допущений.

***Задача 3.*** Разбить число на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение методом введения параметра. Обозначим разбиваемое число через a, тогда одно из слагаемых равно a/2–p, а другое a/2+p. Их произведение составляет $a^2/4-p^2$ и достигает максимального значения $a^2/4$, когда p=0, а оба слагаемых равны a/2. В данном случае ведение вспомогательного параметра p выступает ключевым моментом, позволяющим быстро получить требуемый ответ.

Та же самая идея реализуется и без введения вспомогательного параметра.

Решение методом стандартных неравенств. Обозначим два слагаемых, сумма которых постоянна, через $x_1$ и $x_2$. Их произведение составляет:

$$x_1 x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 .$$

Поскольку сумма $x_1 + x_2$ постоянна, то произведение достигает максимума, когда минимален квадрат разности между $x_1$ и $x_2$, т. е. в случае их равенства между собой.

Метод введения вспомогательного параметра нередко применяется при решении стереометрических задач на экстремум.

Метод координат в решении задач на экстремум. Вообще говоря, любая задача на экстремум может иметь графическую интерпретацию, поэтому метод координат с большим или меньшим успехом применим к весьма широкому классу экстремальных задач. В частности, так называемые стандартные неравенства неразрывно связаны с экстремальными свойствами соответствующих кривых и поверхностей. Тем не менее, существуют классические ситуации, в которых метод координат является наиболее естественным и коротким путем к решению. Таковы, например, задачи, в которых два объекта движутся по взаимно перпендикулярным дорогам, либо движущаяся материальная точка пересекает границу двух сред с различными функциями проницаемости или сопротивления и т. д. [3]. В таких задачах введение прямоугольной декартовой системы координат наиболее естественно и быстро приводит к цели.

Некоторые возникающие на практике задачи на экстремум связаны с поисками наилучших локальных и глобальных линейных приближений различных функций. Прямая, дающая наилучшее локальное (т. е. имеющее место в окрестности некоторой точки) приближение для данной гладкой функции, представляет собой касательную к графику этой функции в заданной точке. Прямая, дающая наилучшее глобальное (т. е. имеющее место на некотором промежутке $[x_1, x_2]$) приближение для данной непрерывной функции f(x), есть прямая y = ax + b, минимизирующая определенный интеграл

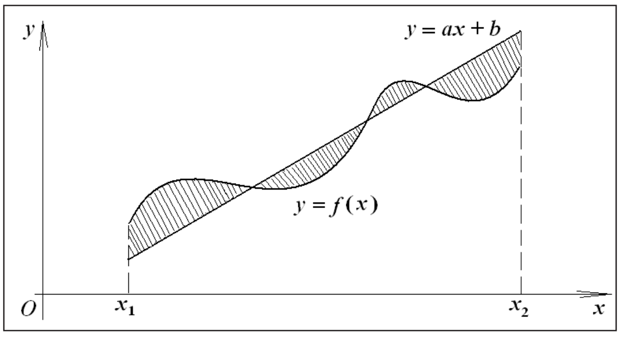


*Рис. 1. Линейная аппроксимация функции f(x) на глобальном промежутке*

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x) - (ax + b)| dx ,$$

т. е. прямая, для которой сумма площадей заштрихованных участков на рисунке 1 минимальна.

***Задача 4.*** Найти прямую вида y = ax, которая наилучшим образом приближает функцию $y = x^{1/2}$ на отрезке [0; 10].

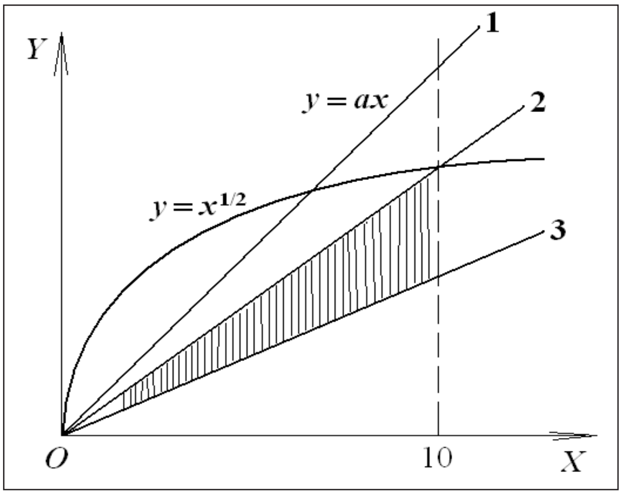


*Рис. 2. Линейная аппроксимация параболы на глобальном промежутке*

Решение. В задаче требуется найти положительное число a, минимизирующее интеграл

$$S(a) = \int_0^{10} |\sqrt{x} - ax| dx .$$

Заметим, что искомая прямая должна пересекать график параболы $y = x^{1/2}$ на отрезке [0; 10], т. е. проходить так, как проходят прямые 1 или 2 на рис. 2, но не так, как проходит прямая 3, поскольку в силу наличия заштрихованного треугольника она не может реализовать требуемый экстремум. Поскольку графики функций $y = x^{1/2}$ и y = ax пересекаются в точке с абсциссой $x_0 = 1/a^2$, то (при условии, что $x_0 = 1/a^2 \leq 10$, т. е. что $|a| \geq 1/\sqrt{10}$ ) минимизируемая площадь разбивается на два определенных интеграла:

$$S(a) = \int_0^{1/a^2} (\sqrt{x} - ax) dx + \int_{1/a^2}^{10} (ax - \sqrt{x}) dx = \frac{1}{3a^3} + 50a - \frac{20}{3}\sqrt{10} .$$

Производная данной функции равна $S'(a) = 50 - \frac{1}{a^4}$ и обращается в нуль в точке $a = \frac{1}{\sqrt[4]{50}}$ ,где меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, искомой является прямая $y=\frac{1}{\sqrt[4]{50}}x$ .

***Задача 5.*** Найти минимальное расстояние от начала координат до произвольной точки кривой $3xy - 4x^2 = s,\ s > 0$.

Решение методом стандартных неравенств. Вначале заметим, что координаты произвольной точки кривой $3xy - 4x^2 = s$ удовлетворяют уравнению

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{s}{3x}.$$

Расстояние от произвольной точки этой кривой до начала координат есть функция положительная и потому достигает минимума вместе со своим квадратом; квадрат же этого расстояния есть функция от x, равная

$$f(x)=x^2+y^2=\frac{1}{9}\left(25x^2+8s+\frac{s^2}{x^2}\right).$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$25x^2+\frac{s^2}{x^2}\geq 2\sqrt{25s^2}=10s\ ,$$

Поэтому

$$f_{min}=\frac{1}{9}(8s+10s)=2s\ .$$

При этом знак равенства достигается лишь в случае, когда $25x^2 = s^2/x^2$, откуда

$$x=\sqrt{\frac{s}{5}},\quad y=3\sqrt{\frac{s}{5}}\ .$$

Итак, искомое минимальное расстояние достигается в точке кривой с координатами $\left(\sqrt{\frac{s}{5}},\ 3\sqrt{\frac{s}{5}}\right)$ и составляет $\sqrt{2s}$ .

К исследованию функции f(x) можно было бы применить аппарат дифференциального исчисления и убедиться в том, что ее производная

$$f'(x)=\frac{1}{9}\left(50x-\frac{2s^2}{x^3}\right)$$

обращается в нуль в единственной точке $x=\sqrt{\frac{s}{5}}$,

которая является точкой минимума, и значение функции в этой точке составляет 2s. Отсюда следует, что искомое минимальное расстояние равно $\sqrt{2s}$ .

Геометрические неравенства в решении задач на экстремум. Геометрические сюжеты, как и алгебраические, часто содержат стандартные неравенства, так или иначе связанные с экстремальными свойствами функций. Кратчайшая линия, соединяющая две точки, есть отрезок прямой. Наименьшее расстояние от точки до прямой, не содержащей ее, есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. Самая длинная хорда окружности есть ее диаметр. Использование этих свойств нередко помогает решить задачи на экстремум, в которых стандартные аналитические методы приводят к цели запутанным и неудобным путем [4].

***Задача 6.*** Внутри выпуклого четырехугольника найти точку, сумма расстояний от которой до всех его вершин минимальна.

Решение. Возьмем выпуклый четырехугольник ABCD и выберем внутри него произвольную точку O. Минимизируемая величина равна сумме длин OA+OB+OC+OD, иначе говоря – сумме длин двух ломаных AOC и BOD. Каждая из этих длин минимальна в том случае, когда соответствующая ломаная превращается в отрезок. Поэтому искомой точкой является точка пересечения диагоналей заданного четырехугольника.

Геометрические методы решения задач на экстремум. Характерными методами являются метод вспомогательных построений и метод привязки, смысл которого заключается в нахождении связи между целевой функцией, неудобной для исследования, и какой-либо другой функцией, экстремальные свойства которой хорошо известны.

***Задача 7.*** Даны две точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой. Найти на прямой точку O, для которой сумма расстояний AO+OB была бы наименьшей.

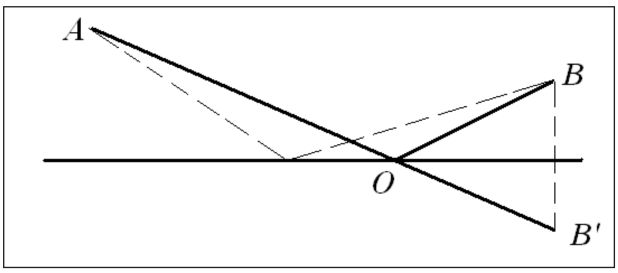


*Рис. 3. Угол падения равен углу отражения*

Решение методом вспомогательных построений. Построим точку B¢, симметричную точке B относительно заданной прямой. Тогда, какова бы ни была точка O, сумма расстояний AO+OB равна сумме AO+OB¢. Но эта сумма минимальна в случае, когда ломаная AOB¢ является отрезком (рис. 3). Следовательно, искомая точка O на прямой должна быть такой, чтобы отрезки AO и OB образовывали с этой прямой одинаковые углы. Данное экстремальное свойство хорошо иллюстрируется движением из точки A в точку B световых волн, отражающихся от заданной прямой: их траектория является кратчайшей, когда угол падения равен углу отражения.

***Задача 8.*** Даны окружность с центром в точке O и точка A, не совпадающая с O, внутри нее. Найти на окружности точку M, из которой отрезок OA виден под наибольшим углом.

Решение методом привязки. Рассмотрим треугольник AOM. В силу теоремы синусов отношение длины отрезка OA к синусу угла AMO равно отношению отрезка OM к синусу угла OAM. Поскольку OM есть радиус окружности (это величина постоянная), а точка A фиксирована, т. е. отрезок OA тоже фиксирован, то острый угол AMO тем больше, чем больше синус угла OAM (рис. 4). С углом OAM все просто: он может принимать любые значения между нулем и 180°. Теперь нет сомнений в том, что искомый экстремум достигается в случае, когда угол OAM — прямой. Итак, из точки A восстанавливаем перпендикуляр к отрезку OA; точки его пересечения с окружностью реализуют искомый экстремум.

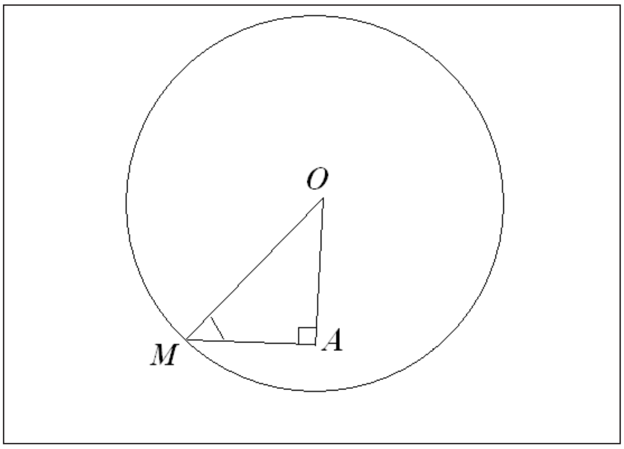


*Рис. 4. Точка M движется по окружности: максимизация угла OMA*

Данный пример демонстрирует применение метода привязки в образцово-показательной форме. Гораздо чаще привязка бывает более или менее замаскирована наличием дополнительных трудностей, которые приходится преодолевать. Однако слишком серьезные трудности, как правило, свидетельствуют о нерациональном пути решения, в частности, о неверном выборе параметра, к которому привязана исследуемая на экстремум функция.

Методы решения многопараметрических задач на экстремум. Особый класс так называемых нестандартных задач на экстремум составляют те, в которых изменяющийся параметр пробегает не одномерное, а многомерное множество значений (множество всех треугольников, вписанных в заданную окружность; множество всех четырехугольников, описанных около заданной окружности; множество всех точек внутри заданного треугольника и т. д.), так что в ходе решения приходится иметь дело с одновременным изменением нескольких независимых параметров. В задачах такого рода, условно называемых многопараметрическими, стандартный аналитический алгоритм, связанный с поиском функциональной зависимости, ведет к исследованию функций двух и более переменных, поэтому такие задачи в общем случае не могут быть решены в рамках курса элементарной математики.

Тем не менее, многие подобные задачи решаются средствами элементарной математики, приводящими к цели более или менее естественным путем. Существует и целый ряд эвристических идей и приемов, позволяющих решать подобные задачи и обучать их решению учащихся. В пионерной работе [5] изложены три таких эвристики – метод расслоения, метод итераций и метод стандартных неравенств.

***Задача 9.*** Среди всех треугольников площади S найти треугольник, имеющий наименьший периметр.

Решение методом стандартных неравенств. Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Тогда, согласно формуле Герона,

$$S^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Рассмотрим три числа:

$$x_1 = (a+b+c)^{1/3}(a+b-c),$$
$$x_2 = (a+b+c)^{1/3}(a+c-b),$$
$$x_3 = (a+b+c)^{1/3}(b+c-a).$$

Произведение этих трех положительных чисел постоянно и равно $16S^2$, поэтому их сумма, составляющая $(a+b+c)^{4/3}$, достигает наименьшего значения в случае, когда $x_1=x_2=x_3$. Следовательно, периметр треугольника будет минимальным, если имеет место условие

$$a+b-c = a+c-b = b+c-a,$$

из которого немедленно вытекает a = b = c. Поэтому искомый треугольник наименьшего периметра является равносторонним.

Итерационный метод решения данной задачи обсуждался в [1], ее решение всеми тремя упомянутыми методами приведено в [5].

Итерационные процессы и экстремальные свойства функций. Правильное применение итерационного метода позволяет в некотором смысле упорядочить поиск экстремального состояния рассматриваемого параметра. Если итерационный процесс организован таким образом, что каждый следующий шаг приближает к искомому состоянию, и в пределе получается искомый экстремум, то, по существу, не имеет значения, сколько степеней свободы имеет данный параметр. Однако применение данного приема часто затрудняется сложностью доказательства сходимости соответствующего итерационного процесса.

Итерационные процессы позволяют обнаружить экстремальные свойства функций в некоторых задачах, которые не были изначально сформулированы как задачи на экстремум. Тем не менее, применение данных идей, к сожалению, редко встречающееся в курсах элементарной математики, оказывается плодотворным [2, 6].

Некоторые идеи вариационного исчисления в элементарных задачах на экстремум. Идеи вариационного исчисления приложимы к широкому классу задач, в которых те или иные функции обнаруживают свои экстремальные свойства. Среди таких задач встречаются и вполне элементарные по своей постановке. В частности, целый ряд стандартных неравенств (например, неравенства Гельдера и Минковского) является следствием хорошо известных фактов из области вариационного исчисления при надлежащей трактовке некоторых операций и преобразований на языке теории функционалов. Поэтому представляют интерес элементарные доказательства подобных неравенств и других фактов математического анализа, использующие экстремальные принципы и эвристики.

*Список использованных источников*

1. Нижегородцев Р. М. Итерационный процесс в задаче на экстремум / Р. М. Нижегородцев // Математика в школе. — 1989. — № 4. — С. 96–98.

2. Нижегородцев Р. М. Загадка из Древнего Египта / Р. М. Нижегородцев // Математика в школе. — 1997. — № 4. — С. 72–74.

3. Нижегородцев Р. М. Метод координат в решении задач на экстремум / Р. М. Нижегородцев // Педагогические нововведения в высшей школе: технологии, методики, опыт: Часть V. Инновации в частных методиках преподавания. — Краснодар : Изд-во КубГТУ, 1998. — С. 38–42.

4. Нижегородцев Р. М. Методические основы решения задач на экстремум в курсе элементарной математики / Р. М. Нижегородцев // Педагогические нововведения в высшей школе: Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции. Часть VI. Инновации в методиках преподавания учебных дисциплин. — Краснодар : Изд-во КубГТУ, 1998. — С. 7–9.

5. Нижегородцев Р. М. Элементарные методы решения многопараметрических задач на экстремум / Р. М. Нижегородцев. — М. : Диалог-МГУ, 1999. — 28 с.

6. Нижегородцев Р. М. Приближенное решение уравнений методом итераций / Р. М. Нижегородцев // Математика в школе. — 1999. — № 5. — С. 69–72.

7. Нижегородцев Р. М. Применение стандартных неравенств в решении задач на экстремум / Р. М. Нижегородцев // Инновационные процессы в высшей школе: Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции 28–30 сентября 2000 года. Краснодар, 2000. — С. 94–95.

8. Седракян Н. М. Неравенства. Методы доказательства. / Н. М. Седракян, А. М. Авоян. — М. : Физматлит, 2002. — 256 с.