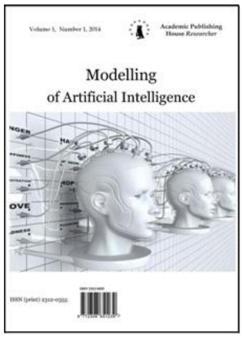
Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.
ISSN: 2312-0355
Vol. 1, No. 1, pp. 4-7, 2014

DOI: 10.13187/issn.2312-0355
www.ejournal11.com



UDC 517.977

On Reconstruction of Control-Trajectory in a System With Aftereffect in Control*

Marina S. Blizorukova

Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Russian Federation
S.Kovalevskaya str. 16, Ekaterinburg 620990
Senior research scientist, PhD (Mathematics), Associate Professor
E-mail: msb@imm.uran.ru

Abstract. In the paper, we discuss a problem of the dynamic reconstruction of unknown input disturbances in nonlinear vector equations with delay in control. A regularizing algorithm is proposed for reconstructing these disturbances simultaneously with the processes. The algorithm is stable with respect to information noises and computational errors.
Keywords: dynamic reconstruction, method of auxiliary models.

Введение.

Задачи нахождения соответствующих характеристик по решениям уравнений часто называют задачами реконструкции. При этом предполагается, что входная информация (результаты измерения текущих фазовых положений динамической системы) поступает по ходу процесса и неизвестные параметры должны восстанавливаться также по ходу процесса. Один из методов решения подобного типа, основанный на принципах позиционного управления и методах решения некорректных задач, сводит задачу реконструкции к задаче управления вспомогательной динамической системой, называемой моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени попадает под условия какого-либо принципа регуляризации; чем обеспечивается устойчивость алгоритма. При этом регуляризация рассматриваемой задачи осуществляется локально на этапе выбора позиционного управления в системе-модели. В настоящей работе описанный выше метод будет применен к нелинейной системе с последействием. Движение модели будут отождествляться с подходящими ломаными Эйлера.

Постановка задачи.

Рассмотрим управляемую систему, динамика которой описывается уравнением следующего вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, u_t(s), x_t(s)) + f_2(t, x_t(s))u(t) \tag{1}$$

с начальным условием

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00110-а), а также программы приоритетных исследований Президиума РАН (проект 12-П-1-1019) и Урало-Сибирского интеграционного проекта (12-С-1-1017).

$$u_{t_0}(s) = u_0(s) \in C([-\tau_m^u, 0]; R^{n_1}), \qquad x_{t_0}(s) = x_0(s) \in C([-\tau_n^x, 0]; R^{n_2}), \tag{2}$$

где t — время из некоторого фиксированного отрезка $T = [t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < +\infty$); $x(t) = (x_1(t), \dots, x_{n_2}(t))$ — фазовое состояние системы; $u(t) = (u_1(t), \dots, u_{n_1}(t))$ — вектор управления; символы $x_t(s)$ и $u_t(s)$ означают функции $x_t(s) = x(t+s)$ при $s \in [-\tau_n^x, 0]$, $u_t(s) = u(t+s)$ при $s \in [-\tau_m^u, 0]$. Начальное состояние (2) полагаем липшицевым. Для простоты считаем, что начальное состояние системы, $x_0(s)$, $u_0(s)$, фиксировано и известно. Управление $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_{n_1}(t))$ будем называть допустимым, если его компоненты $u_i(t)$, $i \in [1 : n_1]$, являются измеримыми по Лебегу на отрезке T функциями, а значения $u(t)$ для почти всех $t \in T$ принадлежат заданному компакту P из евклидова пространства R^{n_1}. Множество всех допустимых управлений будем обозначать $P(\cdot)$. Таким образом $P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; R^{n_1}) : u(t) \in P$ при п. в. $t \in T\}$. Траекторией (или решением) $x(\cdot)$ уравнения (1) с начальным условием (2), соответствующей допустимому управлению $u(\cdot)$, назовем абсолютно непрерывную на T функцию $x = x(t)$, удовлетворяющую (1) при п.в. $t \in T$. Элементы матричной функции

$$f_{2ij}(t, x_t(s)) = f_{2ij}(t, x(t), x(t-\tau_1^x), \dots, x(t-\tau_n^x)), \quad i \in [1 : n_2], \quad j \in [1 : n_1],$$

и вектор-функции

$$f_{1i}(t, u_t(s), x_t(s)) = f_{1i}(t, u(t-\tau_1^u), \dots, u(t-\tau_m^u), x(t), x(t-\tau_1^x), \dots, x(t-\tau_n^x)), \quad i \in [1 : n_2]$$

удовлетворяют условиям липшицевости и роста

$$| f_{2ij}(t_1, x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) - f_{2ij}(t_2, x_0^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) | \le C_1(| t_2 - t_1 | + \sum_{j=0}^{n} | x_j^{(1)} - x_j^{(2)} |),$$

$$| f_{1i}(t_1, u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}, x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) - f_{1i}(t_2, u_1^{(2)}, \dots, u_m^{(2)}, x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) |$$

$$\le d_1(| t_2 - t_1 | + \sum_{i=1}^{m} | u_i^{(1)} - u_i^{(2)} | + \sum_{j=0}^{n} | x_j^{(1)} - x_j^{(2)} |).$$

При выполнении этого условия каждой паре, т.е. начальному состоянию (2) и управлению $u(\cdot) \in P(\cdot)$, отвечает единственное решение уравнения (1).

Пусть $u(\cdot)$ — допустимое управление, которое фактически реализуется в течение промежутка времени T; $x(\cdot)$ — порожденное им фактическое движение. Предположим, что по ходу развития процесса в достаточно частые моменты τ_i из временного отрезка T с некоторой неточностью измеряются фазовые состояния системы $x(\tau_i)$. Результаты измерения — $\xi^h(\tau_i) \in R^{n_2}$ — удовлетворяют неравенствам:

$$| \xi^h(\tau_i) - x(\tau_i) | \le h. \tag{3}$$

Здесь h — погрешность измерения, $h \in (0,1)$. Требуется построить алгоритм, который позволяет синхронно с развитием процесса функционирования исходной системы по результатам неточных измерений $\xi^h(\cdot)$, указать допустимое управление $v^h(\cdot)$ такое, что среднеквадратичное отклонение $v^h(\cdot)$ от $u(\cdot)$:

$$| v^h(\cdot) - u(\cdot) |_{L_2(T)}^2 = \int_{t_0}^{\vartheta} | v^h(t) - u(t) |^2 \, dt$$

сколь угодно мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Везде в работе символом $|\cdot|$ обозначаются как евклидова норма и соответствующая ей матричная норма, так и модуль числа. В дальнейшем для простоты считаем $\tau_m^u = \tau_n^x = \tau$.

Символом $\xi^h(\cdot)$ всюду ниже обозначим функцию $\xi^h(t)$, $t \in [t_0 - \tau, \vartheta]$ такую, что $\xi^h(t) = x_0(t - t_0)$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0)$, $\xi^h(t) = \xi^h(\tau_i)$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : d-1]$, где $\tau_i = \tau_{h,i}$, $d = d_h$, $\xi^h(\tau_i)$ удовлетворяет (5).

В соответствии с подходом, развитым в работах [1, 2], алгоритм решения рассматриваемой задачи (при каждом фиксированном h) отождествляется с тройкой (Δ_h, M, V_h), где Δ_h — разбиение отрезка T с шагом $\delta = \delta(h)$, зависящее от уровня h информационного шума, то есть

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{d_h}, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,d_h} = \vartheta;$$

(при этом для простоты полагается, что $\tau_i - \tau_{i-1} = \delta = \delta(h)$). M — модель, задаваемая некоторым дифференциальным уравнением. V_h — закон управления моделью по принципу обратной связи. Содержательно работа алгоритма (при фиксированном h) может быть описана следующим образом. Алгоритм работает на конечном числе однотипных шагов. i-шаг выполняется на временном полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$. В течение этого шага снимается результат измерения ξ_i^h, затем согласно выбранному закону V_h вычисляется постоянный вектор управления v_i^h, который подается на вход модели. После этого пересчитывается фазовое состояние модели: к ранее известному отрезку траектории модели на $[t_0, \tau_i]$ добавляется отрезок на (τ_i, τ_{i+1}). Процедура повторяется до момента ϑ.

Алгоритм решения.

Итак, для решения задачи необходимо указать модель и закон формирования управления в модели.

Пусть фиксированы величина $h \in (0,1)$, выбрано семейство разбиений Δ_h отрезка T. Символом $X(T)$ обозначим пучок решений системы (1) с начальным условием (2), то есть $X(T) = \{x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0(s), u(\cdot)) : u(\cdot) \in P(\cdot)\}$. В качестве модели возьмем систему, описываемую обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{w}(t) = f_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) + f_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s)) v_i^h + 2(\xi^h(\tau_i) - w(\tau_i)),$$
$$w \in R^{n_2}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad v_{t_0}^h(s) = u_0(s),$$

с начальным условием $w(t_0) = \xi^h(t_0)$. Решение этого уравнения $w(\cdot) = w(\cdot; t_0, w_{t_0}(s), v^h(\cdot))$ понимается в смысле Каратеодори.

Пусть $\Delta^{(j)} = [t_j, t_{j+1}]$, $t_j = t_0 + \tau_1^x j$; символ l означает целую часть числа τ / τ_1^x; $j_* = \max\{j : t_j < \vartheta\}$, $g_j(h) = h^{(1/3)^j}$, $j \in [1 : j_*]$.

Будем считать для простоты выкладок: разбиения Δ_h выбраны таким образом, что $t_j \in \Delta_h$.

Закон выбора управления v_i^h в модели при $\tau_i \in [t_j, t_{j+1}) \cap T$ зададим следующим образом

$$V_h(\tau_i, w_{\tau_i}(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) = V_j(\tau_i, w_{\tau_i}(s), \xi_{\tau_i}^h(s))$$
$$= \operatorname{argmin}\{\, 2(l_i, f_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s)) v) + \alpha_j |v|^2 : v \in P\},$$

При этом считаем, $v_i^h = V_h(\tau_i, w_{\tau_i}(s), \xi_{\tau_i}^h(s))$. Здесь α_j — параметр, $j \in [0 : j_*]$, $l_i = w(\tau_i) - \xi^h(\tau_i)$.

Пусть выполнено

Условие 1. $n_2 \ge n_1$ и существует число $c_* > 0$ такое, что у матрицы $f_2(t, x_t(s))$ найдется минор n_1-го порядка со свойством: $n_1 \times n_2$-матрица $\overline{f}_2(t) = \overline{f}_2(t, x_t(s))$, соответствующая этому минору, при каждом $t \in T$ и всех $u \in R^{n_1}$ удовлетворяет условию

$$|\,\bar{f}_2(t)u\,| \ge c_*\,|\,u\,|.$$

Параметр α_j выберем следующим образом

$$\alpha_0 = Ch^{2/3}, \quad \alpha_j = Cg_j^{2/3}(h), \quad j \ge 1, \quad C = \text{const} > 0.$$

Теорема. Пусть выполнено условие 1 и $\delta = \delta(h) \le h$, тогда справедливы неравенства

$$\nu^{(j)} \equiv |\,v^h(\cdot) - u(\cdot)\,|^2_{L_2(\Delta^{(j-1)};R^{n_1})} \le c_j g_j(h), \quad j \in [1:j_*],$$

где $v^h(t) = u(t)$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, $v^h(t) = u_0(-\tau)$ при $t \in [t_0 - \tau - \tau_1^u, t_0 - \tau)$.
Доказательство теоремы проводится по стандартной схеме [1, 2].

Примечания:

1. Осипов Ю.С. Методы динамического восстановления входов управляемых систем / Ю.С.Осипов, А.В.Кряжимский, В.И.Максимов. Екатеринбург: изд-во УрО РАН, 2011. с. 292.
2. Osipov Yu.S. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solution / Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. London: Gordon and Breach, 1995. 851 p.

References:

1. Osipov Yu.S. Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem / Yu.S. Osipov, A.V.Kryazhimskii, V.I. Maksimov. Ekaterinburg: izd-vo UrO RAN, 2011. s. 292.
2. Osipov Yu.S. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solution / Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. London: Gordon and Breach, 1995. 851 p.

УДК 517.977

О реконструкции управления—траектории в системе с последействием в управлении

Марина Сергеевна Близорукова

Институт математики и механики УрО РАН, Российская Федерация
г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16.
Кандидат физико-математических наук, доцент, с. н. с.
E-mail: msb@imm.uran.ru

Аннотация. Обсуждается задача динамического восстановления неизвестных входных воздействий, действующих на нелинейные векторные уравнения с запаздыванием в управлении. Указывается регуляризирующий алгоритм, позволяющий синхронно с развитием рассматриваемых процессов осуществлять восстановление этих воздействий. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, метод вспомогательных моделей.