SECTION 4. Computer science, computer engineering and automation.

Erik Nurlanovich Bayandiyev
senior lecturer, Department of Mathematics,
Taraz State University named after M.Kh.Dulaty, Kazakhstan
erikn87@mail.ru
Lyazat Rysbekovna Seytbekova
Associate professor, candidate of physical and mathematical sciences,
Department of «Mathematics and MTM», Taraz State Pedagogical Institute, Kazakhstan

Aynur Tursynkhanovna Tolkynbayeva
senior lecturer, Department of Mathematics,
Taraz State University named after M.Kh.Dulaty, Kazakhstan

ON SOME ALGORITHMS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER RUNGE - KUTT METHOD IN DELPHI

Abstract: *This article discusses some aspects of application and computer realization of the numerical solution of differential equations on Delphi with use of widespread Runge-Kutt method.*
Key words: *Cauchy problem, Runge-Kutt method, algorithm, Delphi, program.*

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ РУНГЕ – КУТТА НА ЯЗЫКЕ DELPHI

Аннотация: *В данной статье рассматриваются некоторые моменты применения и компьютерной реализации численного решения дифференциальных уравнений на Дельфи с применением широко распространенного метода Рунге-Кутта.*
Ключевые слова: *задача Коши, метод Рунге-Кутта, алгоритм, дельфи, программа.*

Пусть дана система двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \quad (1)$$

Решением системы (1) называется пара функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, при подстановке которых в систему получаются тождества:

$$\varphi_1' = f_1\big(x,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\big), \varphi_2' = f_2\big(x,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\big).$$

Решению

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x). \end{cases}$$

системы уравненний (1) соответствует интегральная кривая в пространсте трех измерений (x, y_1, y_2). Задача Коши для системы состоит в нахождении решения системы (1), удовлетворяющего начальным условиям [1-5]

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}\ ,\ y_2|_{x=x_0} = y_{20}\ . \quad (2)$$

Постановка задачи Коши для системы n дифференциальных уравнений первого порядка аналогична задаче (1-2), а именно: требуется найти решение системы

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \tag{3}$$

при начальных начальных условиях

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}\ , y_2|_{x=x_0} = y_{20}, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_{n0}\ . \tag{4}$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (3-4) имеет формулировку, аналогичную приведенной для частного случая $n = 2$.

Если ввести векторные обозначения

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n(x) \end{pmatrix},\ y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x, y) \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \cdot\ \cdot \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

то задача Коши (3-4) в векторной форме запишется так:

$$y' = f(x, y), \qquad y|_{x=x_0} = y_0 \tag{5}$$

Численное решение задачи Коши (5) состоит в том, что на сетке отрезка [a,b] требуется получить приближенные значения координат вектора $y(x)$ в узлах сетки x_i $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$.

Обозначим вектор, аппроксимирующий решение, через

$$y_i \approx y(x_i)\ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ m),$$

а его координаты – через

$$y_{ki}\ (k = 1,\ 2,\ \dots,\ n;\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ m) \text{ так, что } y_{ki} \approx y(x_{ki})$$

или

$$y_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \cdot\ \cdot \\ y_{ni} \end{pmatrix} \approx y(x_i) = \begin{pmatrix} y_1(x_i) \\ y_2(x_i) \\ \cdot\ \cdot \\ y_n(x_i) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Будем искать решение на равномерной сетке с шагом $h = \frac{(b-a)}{m}$.

Величина погрешности численного метода оценивается величиной $d = \max\limits_{1 \le i \le m}\{d_i\}$, где d_i – погрешность решения на сетке с шагом h в точке x_i:

$$d_i(h) = \max_{1 \le k \le n}\{|y_{ki}(h) - y_k(x_i)|\}.$$

Практически погрешность в точке x_i оценивается по формуле Рунге, аналогичной

$$\left|\varphi(x_i)\text{-}y_i\left(\frac{h}{2}\right)\right| \approx \frac{\left|y_i(h) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)\right|}{2^p - 1}.$$

А именно , пусть

$$y_i(h) = \begin{pmatrix} y_{1i}(h) \\ y_{2i}(h) \\ \cdot\ \cdot \\ y_{ni}(h) \end{pmatrix}, \quad y_i\left(\frac{h}{2}\right) = \begin{pmatrix} y_{1i}\left(\frac{h}{2}\right) \\ y_{2i}\left(\frac{h}{2}\right) \\ \cdot\ \cdot \\ y_{ni}\left(\frac{h}{2}\right) \end{pmatrix}$$

-значения численного решения в точке x_i, полученные для шагов h и $\frac{h}{2}$ соответственно; тогда погрешность d_i в точке x_i для вычисления с шагов $\frac{h}{2}$ выражается приближенным равенством

$$d_i\left(\frac{h}{2}\right) \approx \frac{\max\limits_{1 \le k \le n}\{|y_{ki}(h) - y_k(x_i)|\}}{2^p - 1} \tag{6}$$

где p – порядок точности численного метода.

Пример. Найти численное решение задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений на языке Delphi

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1; \end{cases}$$

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}\ , y_2|_{x=x_0} = y_{20}\ .$$

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + y = 0\ ,\ \ y|_{x=x_0} = y_0\ ,\ \ y'|_{x=x_0} = y_0'$$

приводится к задаче Коши для предыдущей системы, если обозначить

$$y_1(x) = y(x),\ y_2 = y_1'(x) \quad \text{и} \quad y_{10} = y_0,\ y_{20} = y_0'.$$

Вычисления правых частей дифференциальных уравнений

$$f_1(x, y_1, y_2) = y_2,$$
$$f_2(x, y_1, y_2) = -y_1$$

ведется в программе:

```
unit Unit1;
interface
uses
 Winapi.Windows, Winapi.Messages, System.SysUtils, System.Variants, System.Classes,
Vcl.Graphics,
 Vcl.Controls, Vcl.Forms, Vcl.Dialogs, Vcl.StdCtrls;
 type
 TForm1 = class(TForm)
   Label1: TLabel;
   Edit1: TEdit;
   Edit2: TEdit;
   Label2: TLabel;
   Label3: TLabel;
   Button1: TButton;
   Label4: TLabel;
   Edit3: TEdit;
   Edit4: TEdit;
   Label5: TLabel;
   Label6: TLabel;
   Label7: TLabel;
   Edit5: TEdit;
   Label8: TLabel;
   Memo1: TMemo;
   procedure Button1Click(Sender: TObject);
 private
   { Private declarations }
 public
   { Public declarations }
 end;
type
   coef2=array[0..4,1..2] of real;
   vect=array[1..2] of real;
var
 Form1: TForm1;   c:array[1..4] of real=(0,0.5,0.5,1);
     var
```

```
    i,j,n,m:integer;
    a,b,h,x:real;
    y,y1:vect;
    k:coef2;
    ch:char;
implementation
{$R *.dfm}
      function f(i:integer;x:real;y:vect):real;
    BEGIN
    CASE 1 OF
    1:f:=y[2];
    2:f:=-y[1];
    END;
    END;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
a:=strtofloat(edit1.Text);
b:=strtofloat(edit2.Text);
y1[1]:=strtofloat(edit3.Text);
y1[2]:=strtofloat(edit4.Text);
M:=strtoint(edit5.Text);
    x:=a;
    h:=(b-a)/m;
 memo1.Clear;
 memo1.Lines.Add('x='+floattostr(x)+'      y1='+floattostr(y1[1])+'      y2='+floattostr(y1[2]));
    FOR i:=1 TO m DO
    BEGIN
    FOR j:=1 TO 4 DO
    BEGIN
    FOR n:=1 TO 2 DO
    y[n]:=y1[n]+c[j]*k[j-1,n];
    FOR n:=1 TO 2 DO
    k[j,n]:=h*f(n,x+c[j]*h,y);
    END;
    FOR n:=1 TO 2 DO
    y1[n]:=y1[n]+(k[1,n]+2*k[2,n]+2*k[3,n]+k[4,n])/6;
    x:=x+h;
 memo1.Lines.Add('x='+floattostr(x)+'
y1='+floattostr(y1[1])+'       y2='+floattostr(y1[2]));
    END;
end;
end.
```

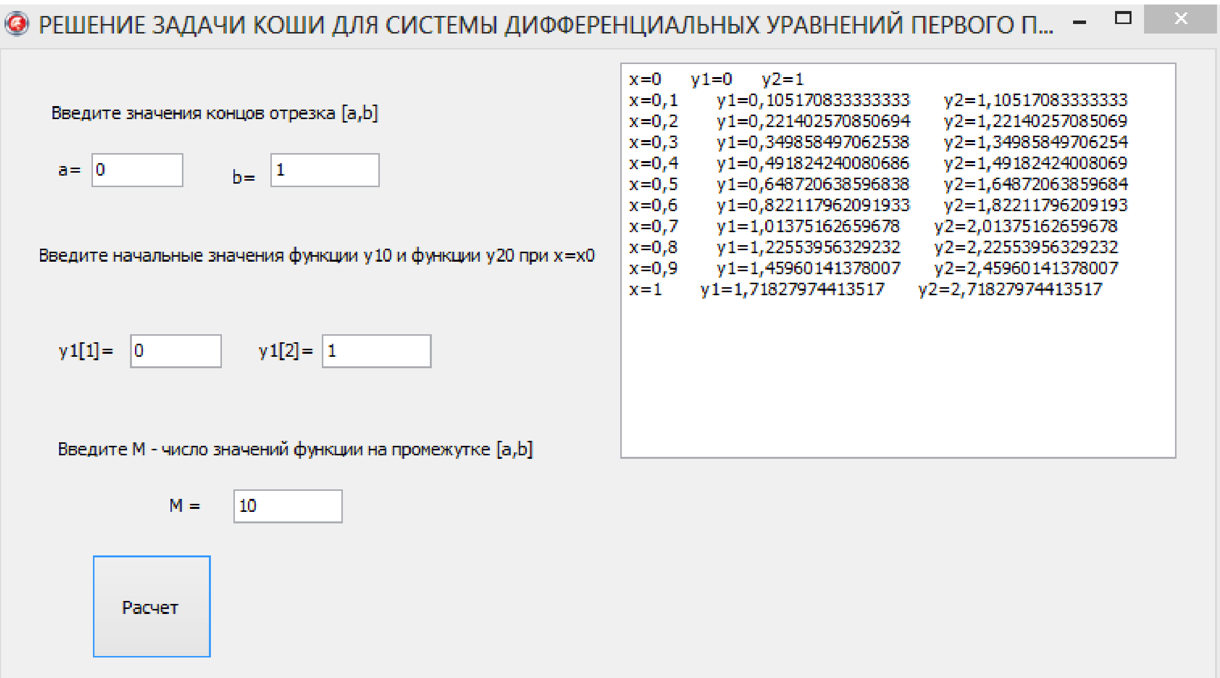

Рисунок 1 – Разработанная программа.

Описанные алгоритмы и разработанная программа (Рис.1) может быть использованна в различных исследованиях основанных на данном методе Рунге-Кутта, а также в процессе преподавания в университетах в качестве лабораторных работ.

References:

1. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения в задачах и примерах. М.:2007.-С.146
2. Шевцов А.Н. Математическое моделирование в прикладных задачах. Тараз 2012.-С. 26-28
3. Метод Рунге-Кутта. [Электронный ресурс] URL: http://otherreferats.allbest.ru/programming/00126107_0.html (дата доступа 25.04.2014)
4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [Электронный ресурс] URL: http://kurs.ido.tpu.ru/courses/informat_chem_2/modul_5.htm (дата доступа 25.04.2014)
5. Методы Рунге–Кутта [Электронный ресурс] URL: http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/WM/METOD/VINOGRADOVA/WEBUMK/frame/8_1.htm (дата доступа 25.04.2014)
6. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка для численного решения дифференциальных уравнений. [Электронный ресурс] URL: http://alexeypetrov.narod.ru/C/runge_about.html (дата доступа 25.04.2014)
7. Метод Рунге-Кутта [Электронный ресурс] URL: http://www.simumath.net/library/book.html?code=Dif_Ur_method_RK (дата доступа 25.04.2014)
8. Метод Рунге – Кутта [Электронный ресурс] URL: http://matica.org.ua/kurs-visshey-matematiki-3/06-metod-runge-kutta (дата доступа 25.04.2014)
9. Численное решение задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений на языке Delphi [Электронный ресурс] URL: http://knowledge.allbest.ru/mathematics/2c0a65625a3bc78b4d53a88421216d37_0.html (дата доступа 25.04.2014)
10. Численные методы [Электронный ресурс] URL: http://matica.org.ua/primeri/chislennie-metodi (дата доступа 25.04.2014)

11. Как решить систему дифференциальных уравнений? [Электронный ресурс] URL: http://www.mathprofi.ru/sistemy_differencialnyh_uravnenij.html (дата доступа 25.04.2014)
12. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [Электронный ресурс] URL: http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/ODE.html (дата доступа 25.04.2014)
13. О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДУЮЩЕЙ РАЗРАБОТКОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ПК [Электронный ресурс] URL: http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/6778-2013-03-11-02-37-52 (дата доступа 25.04.2014)
14. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА [Электронный ресурс] URL: http://www.science-education.ru/110-9669 (дата доступа 25.04.2014)
15. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем [Электронный ресурс] URL: http://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=539064 (дата доступа 25.04.2014)