УДК 519.2: 518.9

О МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ

В. А. Чекменев, ***Т. Д. Чекменева***

ON MULTICRITERIAL OPTIMIZATION OF QUEUEING NETWORKS WITH MULTIPLE ACCESS AT COMPETITIVE INFORMATION FLOWS

V. A. Chekmenev, ***T. D. Chekmeneva***

Рассматривается задача многокритериальной оптимизации информационной сети с множественным доступом и конкурирующими пользователями, для решения которой применяются методы теории игр. Предложен алгоритм решения для сети с двумя узлами.

The paper focuses on the problem of multicriterial optimization of queueing networkswith multiple access and competitive users, which is solved with methods of the theory of games. The algorithm of solution for a two-node network is proposed.

Ключевые слова: сети массового обслуживания с множественным доступом, многокритериальная оптимизация, теория игр.

Keywords: queueing networkswith multiple access, multicriterial optimization, theory of games.

Введение. Характерной чертой функционирования информационных систем с множественным доступом (спутниковые каналы, многоточечные телефонные линии, многоотводные шинные системы и др.) является наличие неопределённостей, порождаемых стохастической природой потоков информации, поступающих в систему, времени её обработки, неполнотой информации о состоянии канала передачи. Кроме того, между потоками информации, поступающими от разных пользователей, существует конкуренция за максимальное обладание ресурсами канала.

Традиционно при анализе и оптимизации таких систем руководствуются принципом однозначности: функционирование системы характеризуется одной и только одной целевой функцией. Однако существование конкуренции между входящими потоками, характеризующимися своими целевыми функциями, вызывает затруднения в формулировке единой для всей системы целевой функции и требует применения новых подходов при учёте этих особенностей. Рассмотрим задачу оптимизации функционирования системы такого рода, основанной на одном из таких подходов [1; 2]. Исследуемая в данной работе система функционирует при наличии неопределённостей, указанных выше.

Постановка задачи. Рассмотрим систему с множественным доступом [3] с двумя узлами, передающими сообщения по каналу связи. Каждый узел, получив сообщение, передает его немедленно, не зная состояние канала – занят он или свободен. Будем считать, что сообщение передано успешно, если только один узел передает сообщение и канал свободен от сообщений другого узла. Если два сообщения от разных узлов перекрываются в канале, то возникает «конфликт», который обнаруживается по окончании передачи. Такие сообщения передаются повторно с предварительной случайной задержкой. Повторные передачи продолжаются до тех пор, пока сообщение не будет принято (успешная передача). Если в узле имеется сообщение для передачи (узел занят), то новое сообщение, поступающее в узел, не принимается и теряется.

Входные потоки сообщений, поступающие в передающие узлы, являются независимыми пуассоновскими процессами с известными параметрами λ_1 и λ_2. Время передачи сообщения от i-го узла по каналу является случайной величиной с показательным распределением с известными параметрами μ_1 и μ_2. Случайное время задержки повторной передачи подчинено показательному распределению с точностью до неизвестных параметров γ_1 и γ_2. Для каждого узла ставится задача максимизации числа сообщений, успешно переданных за единицу времени. При этом γ_1 и γ_2 являются неизвестными управляемыми параметрами системы, оптимизирующими ее функционирование с точки зрения заданных критериев.

Так как узлы передают сообщения независимо друг от друга и каждый из них стремится максимизировать свою пропускную способность, то задачу оптимизации можно сформулировать в виде бесконечной непрерывной бескоалиционной игры двух лиц с некомпактными множествами стратегий. Под стратегиями будем подразумевать параметры γ_1 и γ_2 распределений времён задержки. Рассмотрим игру

$$\Gamma = < I, \{\gamma_i\}_{i\in I}, \{L_i\}_{i\in I} >,$$

где $I = \{1,2\}$ – множество передающих узлов,

$L_i(\gamma_1,\gamma_2)$ – непрерывная функция, выражающая математическое ожидание числа сообщений, успешно переданных узлом i (i =1,2) за единицу времени, и определенная на множестве:

$$\gamma_1 \times \gamma_2 = \{(\gamma_1,\gamma_2) : \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0\}.$$

Анализ системы. Получим явные выражения для функций выигрыша $L_1(\gamma_1,\gamma_2)$ и $L_2(\gamma_1,\gamma_2)$.

Функционирование расматриваемой системы с множественным доступом опишем пятимерным марковским случайным процессом

$$\{i_1(t), i_2(t), j_1(t), j_2(t), \nu(t)\},$$

где $i_k(t)$ – число сообщений узла k (k =1,2), ожидающих в момент t повторной передачи ($i_k = 0$ или 1);

$j_k(t)$ – число сообщений узла k (k =1,2), передаваемых по каналу в момент t ($j_k = 0$ или 1);

$\nu(t)$ = 1, если передаваемое сообщение “испорчено” в результате конфликта;

$\nu(t)$ = 0 в случае успешной передачи.

Данный процесс представляет собой цепь Маркова с непрерывным временем и имеет конечное множество сообщающихся состояний. Согласно достаточному условию Маркова-Бернштейна для цепи Маркова существует единственное стационарное распределение вероятностей состояний $P\ (i_1, i_2, j_1, j_2, \nu)$. Пользуясь известной техникой [4], построим систему уравнений равновесия относительно стационарных вероятностей:

$$\pi^T Q = 0\,, \qquad (1)$$

где π – вектор вероятностей $P\ (i_1, i_2, j_1, j_2, \nu)$:

$$\pi = \begin{bmatrix} P(0,0,0,0,0) \\ P(0,0,1,0,0) \\ P(0,0,0,1,0) \\ P(0,0,1,1,1) \\ P(1,0,0,0,0) \\ P(0,1,0,0,0) \\ P(1,0,0,1,1) \\ P(0,1,1,0,1) \\ P(1,0,0,1,0) \\ P(0,1,1,0,0) \\ P(1,1,0,0,0) \end{bmatrix},$$

Q – инфинитезимальная матрица:

$$\begin{bmatrix}
\lambda_1+\lambda_2 & -\mu_1 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\lambda_1 & \lambda_2+\mu_1 & 0 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\lambda_2 & 0 & \lambda_1+\mu_2 & 0 & 0 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & \mu_1+\mu_2 & 0 & 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2+\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2+\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & 0 & \mu_2+\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_1+\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & -\gamma_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 & \gamma_1+\gamma_2
\end{bmatrix}.$$

Система уравнений равновесия (1) совместно с условием нормировки $\pi^T E = 1$ (E – вектор-столбец, состоящий из единиц) однозначно определяет вектор вероятностей π, которые являются рациональными функциями двух переменных γ_1, γ_2. При этом функции выигрыша $L_i(\gamma_1, \gamma_2)$ (i =1,2) имеют вид:

$$L_1(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_1[P(0,0,0,0,0) + P(0,1,0,0,0)],$$
$$L_2(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_2[P(0,0,0,0,0) + P(1,0,0,0,0)],$$

где входящие в эти выражения вероятности суть вероятности успешной передачи сообщений, которые могут быть найдены явно из системы уравнений (1), а множитель $\lambda_i(i = 1,2)$ – математическое ожидание числа сообщений, поступивших на узел i в единицу времени. Выражая вероятности вектора π, например, через $P(0,1,0,0,0)$, запишем функции выигрыша в виде:

$$L_1(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_1 \left\{ \frac{\gamma_2[\gamma_1\gamma_2\mu_1(\lambda_1+\mu_2) + \mu_2(\lambda_2+\mu_1)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)} + 1 \right\} \cdot P(0,1,0,0,0),$$

$$L_2(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_2 \left\{ \frac{\gamma_2[\gamma_1\gamma_2\mu_1(\lambda_1+\mu_2) + \mu_2(\lambda_2+\mu_1)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)} + \gamma_2^2 \right\} \cdot P(0,1,0,0,0),$$

где $P(0,1,0,0,0)$ определяется из условия нормировки и представляет собой рациональное выражение относительно γ_1 и γ_2 и инфинитезимальных характеристик λ_i, μ_i (i = 1,2). (В этом выражении в числителе будет полином по γ_1 степени 2, по γ_2 степени 1; а в знаменателе – полином по γ_1 степени 2, по γ_2 степени 3).

Оптимизация. Оптимальным решением бескоалиционной игры является ситуация равновесия, т. е. такая точка (γ_1^*, γ_2^*), для которой справедливо:

$$L_1(\gamma_1^*, \gamma_2^*) \ge L_1(\gamma_1, \gamma_2^*) \quad \forall \gamma_1 > 0,$$
$$L_2(\gamma_1^*, \gamma_2^*) \ge L_2(\gamma_1^*, \gamma_2) \quad \forall \gamma_2 > 0.$$

Так как функции выигрыша непрерывно дифференцируемы, то для нахождения ситуации равновесия воспользуемся необходимым условием экстремума (учитывая, что каждый игрок стремится максимизировать свою функцию выигрыша). Преобразовывая систему уравнений: $\frac{\partial L_i}{\partial \gamma_i} = 0, \quad i = 1{,}2$,

получим полиномиальные уравнения с неизвестными γ_1, γ_2, которые можно записать как уравнения относительно, например, γ_1:

$$\begin{aligned} &a_0(\gamma_2)\gamma_1^4 + a_1(\gamma_2)\gamma_1^3 + \cdots + a_4(\gamma_2) = 0, \\ &b_0(\gamma_2)\gamma_1^5 + b_1(\gamma_2)\gamma_1^4 + \cdots + b_5(\gamma_2) = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $a_i(\gamma_2)\ (i = 0,\ldots,4)$, $b_i(\gamma_2)\ (i = 0,\ldots,5)$ – многочлены от γ_2 с известными коэффициентами, определяемыми через характеристики исследуемой системы λ_i, μ_i (i =1,2).

Для существования решения (γ_1, γ_2) системы (2) необходимо и достаточно [5], чтобы результант многочленов данной системы, являющийся многочленом от одного неизвестного (γ_2), был равен нулю, а его корни не обращали в ноль коэффициенты $a_0(\gamma_2)$ и $b_0(\gamma_2)$. Находя результат:

$$\begin{vmatrix}
a_0(\gamma_2) & a_1(\gamma_2) & a_2(\gamma_2) & a_3(\gamma_2) & a_4(\gamma_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0(\gamma_2) & a_1(\gamma_2) & a_2(\gamma_2) & a_3(\gamma_2) & a_4(\gamma_2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_0(\gamma_2) & a_1(\gamma_2) & a_2(\gamma_2) & a_3(\gamma_2) & a_4(\gamma_2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_0(\gamma_2) & a_1(\gamma_2) & a_2(\gamma_2) & a_3(\gamma_2) & a_4(\gamma_2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_0(\gamma_2) & a_1(\gamma_2) & a_2(\gamma_2) & a_3(\gamma_2) & a_4(\gamma_2) \\
b_0(\gamma_2) & b_1(\gamma_2) & b_2(\gamma_2) & b_3(\gamma_2) & b_4(\gamma_2) & b_5(\gamma_2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_0(\gamma_2) & b_1(\gamma_2) & b_2(\gamma_2) & b_3(\gamma_2) & b_4(\gamma_2) & b_5(\gamma_2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_0(\gamma_2) & b_1(\gamma_2) & b_2(\gamma_2) & b_3(\gamma_2) & b_4(\gamma_2) & b_5(\gamma_2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_0(\gamma_2) & b_1(\gamma_2) & b_2(\gamma_2) & b_3(\gamma_2) & b_4(\gamma_2) & b_5(\gamma_2)
\end{vmatrix}$$

и приравнивая его к нулю, получим уравнение вида:

$$c_0\gamma_2^{20} + c_1\gamma_2^{19} + \cdots + c_{19}\gamma_2 + c_{20} = 0,$$

где c_i (i =0,1,…,20) – постоянные коэффициенты, зависящие от значений λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 параметров исходной системы с множественным доступом. Чтобы получить решение системы (2), находим действительные неотрицательные корни этого уравнения (численным методом при фиксированных λ_1, λ_2, μ_1, μ_2), а затем подставляем их в коэффициенты системы (2), после чего каждое уравнение системы решаем относительно неизвестного γ_1. В качестве решения системы берем совпадающие корни ее уравнений, удовлетворяющие условию неотрицательности. Найденные пары (γ_1^*, γ_2^*) являются для игры Г точками, которые могут быть ситуациями равновесия. Для проверки этого предположения используется достаточное условие экстремума:

$$\left.\frac{\partial^2 L_i}{\partial \gamma_i^2}\right|_{(\gamma_1^*, \gamma_2^*)} \le 0, \quad i = 1{,}2.$$

Таким образом, в статье рассмотрена постановка задачи многокритериальной оптимизации информационной системы с множественным доступом с возможностью возникновения конфликтов сообщений, передаваемых разными узлами системы. Предложен алгоритм решения данной задачи как задачи нахождения ситуации равновесия в бескоалиционной игре двух лиц. Получен явный вид функций выигрыша игроков, описана методика нахождения оптимального управления (γ_1^*, γ_2^*) как решения системы полиномиальных уравнений. Если же при решении рассматриваемых уравнений не получено действительных неотрицательных корней (т. е. удовлетворяющих условиям игры), то бескоалиционная игра Г не имеет решения в виде ситуации равновесия. В этом случае необходимо рассматривать другие принципы оптимальности [2; 6].

Литература

1. Чекменев, В. А. Теоретико-игровой подход к задаче максимизации пропускной способности канала с множественным доступом / В. А. Чекменев, Т. Д. Чекменева // Сети связи и сети ЭВМ как модели массового обслуживания. – Минск, 1991. – С. 135 – 136.

2. Чекменев, В. А. Некоторые подходы к оптимизации канала с множественным доступом / В. А. Чекменев // Сети связи и сети ЭВМ. Анализ и применение. – Минск, 1992. – С. 113 – 114.

3. Бертсекас, Д. Сети передачи данных / Д. Бертсекас, Р. Галлагер. – М.: Мир, 1989. – 544 с.

4. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987. – 336 с.

5. Ван дер Варден, Б. Л. Алгебра / Б. Л. ван дер Варден. – М.: Мир, 1979. – 648 с.

6. Вилкас, Э. И.Оптимальность в играх и решениях / Э. И. Вилкас. – М: Наука, 1990. – 256 с.

Информация об авторах:

Чекменев Владимир Алексеевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации исследований и технической кибернетики математического факультета КемГУ.

Vladimir A. Chekmenev – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Assistant Professor at the Department of Research Automation and Technical Cybernetics, Kemtrovo State University.

Чекменева Татьяна Дмитриевна – кандидат технических наук, доцент кафедры общей и региональной экономики экономического факультета КемГУ,8-923-612-48-90, chtd42@yandex.ru.

Tatyana D. Chekmeneva – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Assisatnt Professor at the Department of General and Regional Economics, Kemtrovo State University.

Статья поступила в редколлегию 10.02.2014 г.