

УДК 532.528.1

КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ВЫСТУПА ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПО СХЕМЕ РЯБУШИНСКОГО

В. П. Житников, Р. Р. Муксимова

CAVITY FLOW OF FLUID UNDER GRAVITY AROUND THE ANNULAR LIP ACCORDING TO THE RYABUSHINSKY SCHEME

V. P. Zhitnikov, R. R. Muksimova

В данной работе исследуется кавитационное обтекание кругового цилиндра идеальной весомой жидкостью по схеме Рябушинского. Рассчитывается форма свободной границы, и анализируются зависимости коэффициента сопротивления, скорости жидкости в наивысшей точке границы каверны, длины и ширины каверны от положения точки отрыва.

The paper focuses on cavity flow of the ideal weight fluid around a circular cylinder using the Ryabushinsky scheme. The form of the free boundary is calculated and dependences of resistance, fluid velocity at the highest point of the cavityboundary, the cavity length and width on the position of the separation point are analyzed.

Ключевые слова: кавитационное обтекание, комплексный потенциал, условие Бриллюэна, схема Рябушинского, функция Жуковского, численная фильтрация, оценка погрешности.

Keywords: cavity flow, complex potential, Brillouin condition, Ryabushinsky scheme, Zhukovsky function, numerical filtering, error estimation.

Рассматривается задача кавитационного обтекания идеальной весомой жидкостью кругового цилиндра по схеме Рябушинского (рис. 1а), согласно которой для замыкания каверны вводится замыкатель $B'C'$, симметричный кавитатору BC . Слой жидкости над цилиндром считается достаточно большим, так что влияние стенки или свободной поверхности не оказывает существенного влияния на течение вокруг препятствия. Такой схемой может моделироваться обтекание выступа на дне.

Подобная задача в несимметричной постановке решалась Л. М. Котляром [1]. Кавитационное обтека-

ние кругового цилиндра невесомой жидкостью исследовано в [2]. В данной работе особое внимание уделяется исследованию зависимостей параметров от положения точки отрыва от поверхности цилиндра.

Пусть давление в каверне равно P_0 , давление на бесконечности на оси $X - P_\infty$. Число кавитации определяется как $K = \frac{P_\infty - P_0}{\rho V_\infty^2 / 2}$,

где ρ – плотность жидкости; V_∞ – скорость на бесконечности.

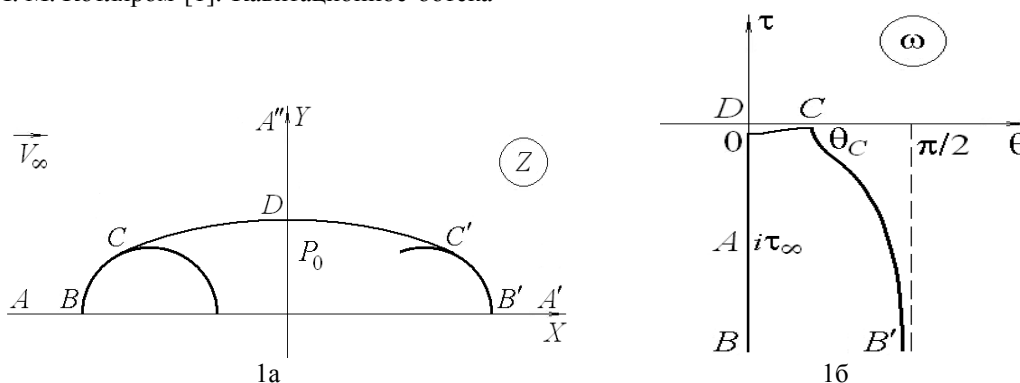


Рис. 1. Схема течения: 1а – физическая плоскость; 1б – плоскость изменения функции Жуковского

Согласно уравнению Бернулли:

$$\frac{V^2}{V_\infty^2} + \frac{2gR}{V_\infty^2} \frac{Y}{R} + 2 \frac{P}{\rho V_\infty^2} = 2 \frac{P^*}{\rho V_\infty^2} = 1 + 2 \frac{P_\infty}{\rho V_\infty^2}.$$

На границе каверны $P = P_0$, тогда получим краевое условие в виде:

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 + \frac{2}{Fr^2} \frac{Y}{R} = 1 + K, \quad Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{gR}}. \quad (1)$$

Обозначим гипотетическую скорость на части оси X внутри каверны $V = V_0$, тогда

$$\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^2 = 1 + K. \quad (2)$$

Для решения задачи применяются методы теории функций комплексного переменного.

На плоскости комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ образом верхней половины области течения является верхняя полуплоскость (рис. 2).

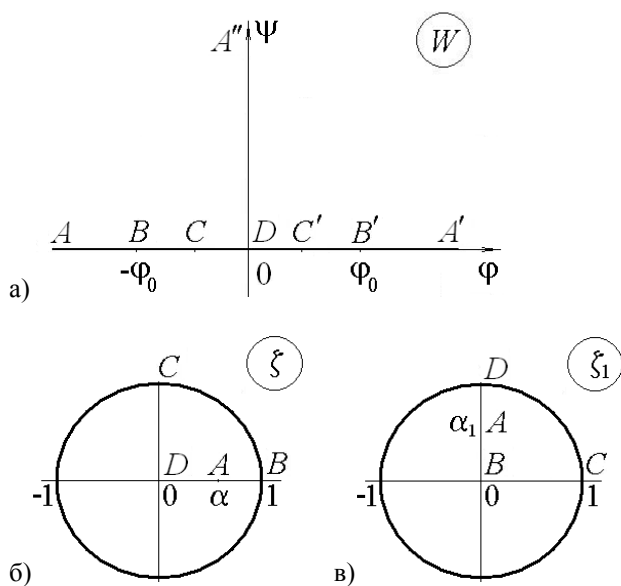


Рис. 2. Плоскости: а – комплексного потенциала; б, в – параметрические

В виду симметрии области течения относительно действительной и мнимой оси рассмотрим правую верхнюю ее четверть. В качестве параметрической выберем плоскость ζ , на которой образом четверти области течения будет четверть единичного круга (рис. 2б).

Функция $W(\zeta)$ получается с помощью конформного отображения:

$$W = -\varphi_0 \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\zeta^4 + 1}{\zeta^2} \right)^{-1/2}. \quad (3)$$

Производная

$$\frac{dW}{d\zeta} = -\varphi_0 \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \frac{\zeta}{\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\zeta^4 + 1}{\zeta^2} \right)^{3/2}} \left(1 - \frac{1}{\zeta^4} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим функцию Жуковского:

$$\omega = i \ln \left(\frac{dW}{V_0 dZ} \right) = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln \frac{V}{V_0}. \quad (5)$$

Для задачи о течении невесомой жидкости ($V = V_0$ на CD) условия на границах (рис. 1) следующие:

– на CD : $\tau = \text{Im}\omega = 0$, (6)

– на BA и AD : $\theta = \text{Re}\omega = 0$, (7)

– на BC $|Z| = R$. (8)

Согласно условиям (6), (7) функцию $\omega(\zeta)$ можно аналитически продолжить на весь круг по принципу симметрии.

Выразим функцию Жуковского в виде суммы:

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \omega_1(\zeta) + \omega_2(\zeta), \quad (9)$$

где $\omega_0(\zeta)$ – функция Жуковского для задачи кавитационного обтекания пластины невесомой жидкостью по схеме Рябушинского. Для этой задачи условия (6), (7) дополняются условием:

– на BC : $\theta = \text{Re}\omega = \pi/2$.

Тем самым, образом области течения на плоскости ω для этой задачи является полуплосца. Функция $\omega_0(\zeta)$ получается конформным отображением:

$$\omega_0(\zeta) = i \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \pi + i \ln \frac{\zeta-1}{\zeta+1}. \quad (10)$$

Функция $\omega_1(\zeta)$ определяется в виде ряда по нечетным степеням с действительными коэффициентами c_{2m+1}

$$\omega_1(\zeta) = i \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} \zeta^{2m-1}. \quad (11)$$

Для моделирования течения весомой жидкости условие (6) должно быть заменено на (1). При этом мнимая часть $\omega(\zeta)$ не равна нулю на CD и сумма (9) дополняется слагаемым:

$$\omega_2(\zeta_1) = i \sum_{m=0}^{\infty} d_{2m} \zeta_1^{2m} = i \sum_{m=0}^{\infty} d_{2m} \left(-i \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^{2m}, \quad (12)$$

которое определено на параметрической плоскости ζ_1 (рис. 2в), связанной с ζ следующим образом:

$$\zeta_1 = -i \frac{\zeta-1}{\zeta+1}, \quad i\alpha_1 = -i \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = i \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Отметим, что видоизменение вида функции Жуковского для удовлетворения условию (1) не может быть осуществлено путем добавления в (11) нечетных слагаемых, в связи с невозможностью аналитического продолжения $\omega(\zeta)$ на левый полукруг и разложения в сходящийся ряд Тейлора. Функция же $\omega_2(\zeta_1)$ имеет нулевую действительную часть как на BC , так и на DAB , и поэтому для ее аналитического продолжения на круг может быть применен принцип симметрии.

Производная функции Жуковского:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\zeta} &= \frac{2i}{\zeta^2-1} + i \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) c_{2m-1} \zeta^{2m-2} + \\ &+ \frac{2}{(\zeta+1)^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2m d_{2m} \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^{2m-1}. \end{aligned}$$

Уравнение окружности $\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{R}$ с учетом того,

что на границе потока дифференциал дуговой абсциссы $ds = \frac{d\varphi}{V} = e^{-\tau} \frac{d\varphi}{V_0}$, примет вид:

$$\frac{d\theta}{ds} = V_0 e^{\tau} \frac{d\theta}{d\varphi} = -\frac{1}{R}. \quad (13)$$

Поскольку на BC $\zeta = e^{i\sigma}$, то из (4) найдем:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \varphi_0 \frac{\alpha^2-1}{\alpha\sqrt{2}} \frac{\sin 2\sigma}{\left(\frac{1}{2} \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) - \cos 2\sigma \right)^{3/2}}.$$

Тогда из (13) получим краевое условие на BC :

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = -\lambda e^{-\tau(\sigma)} \frac{\sin 2\sigma}{\left(\frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) - \cos 2\sigma\right)^{3/2}},$$

$$\lambda = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} \frac{\Phi_0}{RV_0}. \quad (14)$$

Отсюда при $\sigma \rightarrow 0$ (точка B)

$$-\sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)c_{2m-1} =$$

$$= -\lambda e^{-\sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} - d_0} \frac{8\sqrt{2}\alpha^3}{(1-\alpha^2)^3}. \quad (15)$$

При $\sigma \rightarrow \pi/2$ (точка C) из (14) следует:

$$-\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1)^2 c_{2m-1} =$$

$$= -e^{-\sum_{m=0}^{\infty} d_{2m}} \frac{4\sqrt{2}\alpha^3 \lambda}{(\alpha^2 + 1)^3}. \quad (16)$$

При заданном числе кавитации K выполняется уравнение

$$\tau(\alpha) = \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m-1} \alpha^{2m-1} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m d_{2m} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{2m} = -\frac{1}{2} \ln(K+1). \quad (17)$$

Если рассматривается течение с гладким отрывом струи от кавитатора (в точке C), то выполняется условие Бриллюэна-Вилла

$$\frac{d\tau}{d\zeta}(i) = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1)c_{2m-1} -$$

$$-2 \sum_{m=0}^{\infty} m d_{2m} = 0. \quad (18)$$

Задача решалась в безразмерном виде: параметры R (радиус цилиндра) и V_0 полагались равными единице. Для возвращения к размерным величинам линей-

ные величины умножаются на реальный размер R , а скорости – на V_0 .

Численно задача решалась методом коллокаций. Уравнение окружности (14) удовлетворялось в отдельных точках дуги $BC \zeta_m = e^{i\sigma_m}$ ($\sigma_m = m\pi/(2n)$, $m = \overline{1, n-1}$). Для выполнения условия (21) в точке $\sigma_0 = 0$ использовалось равенство (15).

Уравнение (1) также удовлетворялось в отдельных точках дуги $CD \zeta_{1m} = e^{i\sigma_m}$ ($\sigma_m = m\pi/(2n)$, $m = \overline{1, n}$).

В точке отрыва либо удовлетворялось условие Бриллюэна (18), чему соответствует угол отрыва $\theta_C = \theta_{C0}$, либо величина θ_C задавалась.

Получаемая при этом система $2n + 2$ нелинейных уравнений (совместно с равенством (17)) относительно параметров $\lambda, \alpha, c_{2m-1}$ ($m = \overline{1, n}$), d_{2m} ($m = \overline{0, n-1}$) решалась методом Ньютона с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям.

При решении исследовано поведение безразмерных параметров:

- коэффициента сопротивления:

$$C_x = \frac{2}{\rho V_\infty^2 R} \operatorname{Im} \int_0^{z_c} (P - P_0) dZ =$$

$$= (1+K) \operatorname{Im} \int_0^{z_c} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2}\right) \frac{dZ}{R} - \frac{2}{Fr^2} \int_0^{y_c} \frac{Y}{R} \frac{dY}{R} =$$

$$= (1+K) \operatorname{Im} \int_0^{z_c} (1 - e^{2\tau}) \frac{dZ}{R} - \frac{1}{Fr^2} \frac{Y_C^2}{R^2},$$

- скорости жидкости в наивысшей точке D границы каверны:

$$\frac{V_D}{V_\infty} = \sqrt{1+K - \frac{2}{Fr^2} \frac{Y_D}{R}},$$

- полудлины и полуширины каверны:

$$x_D + iy_D = \frac{1}{R} \int_0^{z_D} dZ = \frac{1}{RV_0} \int_1^i e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta + \frac{1}{RV_0} \int_i^0 e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta.$$

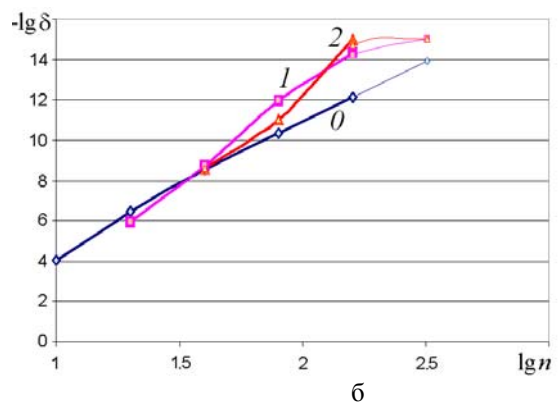
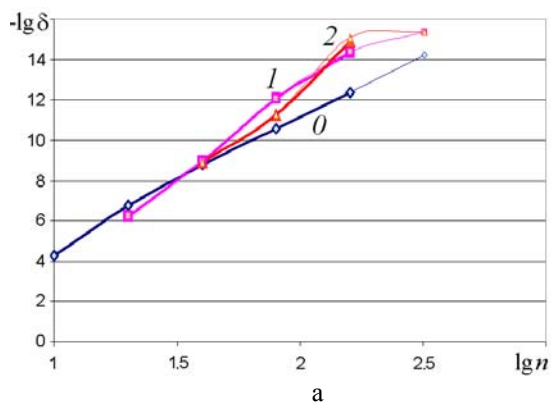


Рис. 3. Оценка погрешности параметров: а – C_x ; б – V_D/V_∞ для $K = 3, Fr = 1$

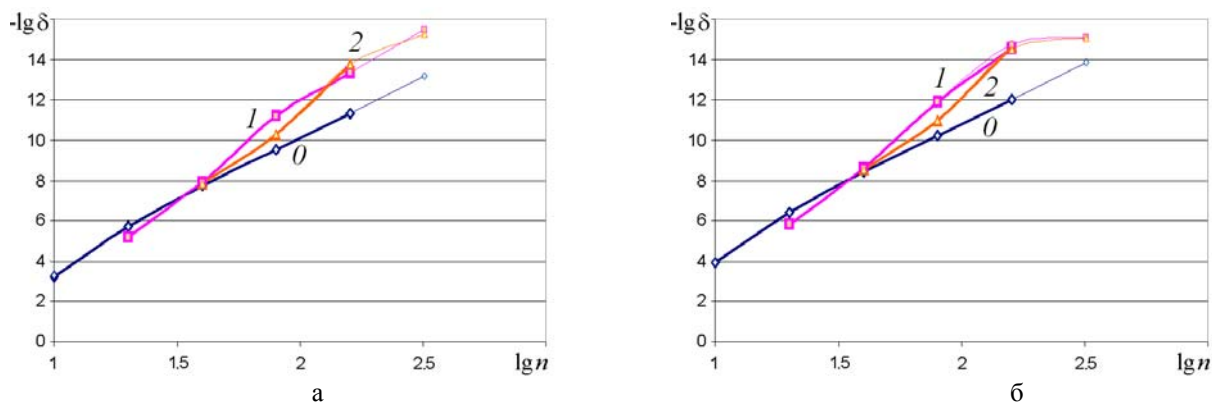


Рис. 4. Оценка погрешности параметров: а – x_D ; б – y_D для $K = 3, Fr = 1$

Для оценки погрешности использовалась численная фильтрация результатов расчетов [3; 4], полученных при различных числах точек коллокаций n . Результаты фильтрации изображены на рис. 3, 4, где по оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа n , по оси ординат – десятичные логарифмы оценок относительной погрешности искомого параметра $\delta = |\Delta u/u|$. Цифрой 0 обозначены вычисленные результаты, цифрами 1, 2, ... – результаты 1-й, 2-й и т. д. фильтрации. Толстыми линиями показаны результаты попарного вычитания, тонкими – сравнения с эталоном [3]. Эти

результаты показывают, что для приведенных вариантов рассматриваемые величины определяются с относительной погрешностью около 10^{-14} .

Вычисленные значения: для $K = 3, Fr = 1$:
 $C_X = 2.05652555285525$; $\theta_C = 0.40711777812$;
 $V_D/V_\infty = 1.23514949742572$; $x_D = 3.98129071176209$;
 $y_D = 1.23720285950449$.

На рис. 5, 6 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для течений, удовлетворяющих условию (18) при $K=1; 2; 3; 4$ (кривые 1 – 4) от числа, обратного числу Фруда ($1/Fr$).

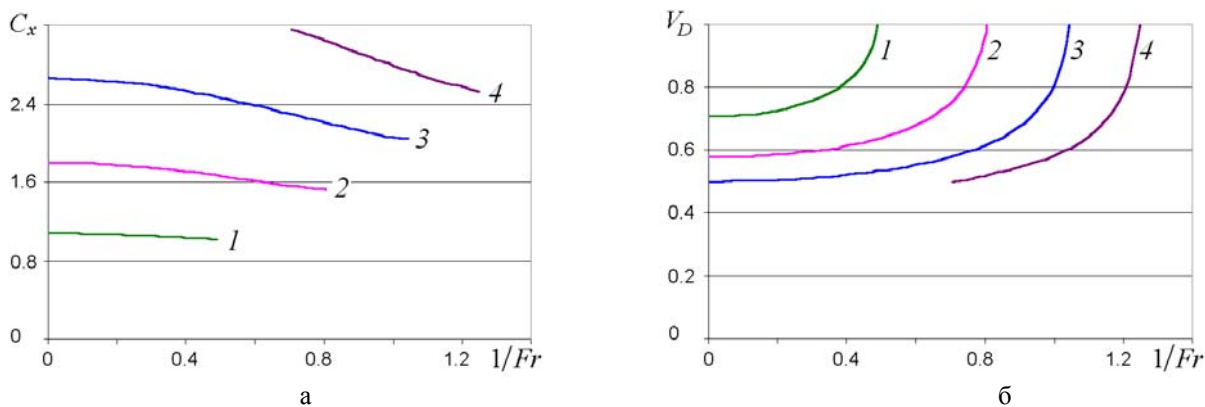


Рис. 5. Зависимости параметров от $1/Fr$: а – C_X ; б – V_D/V_D

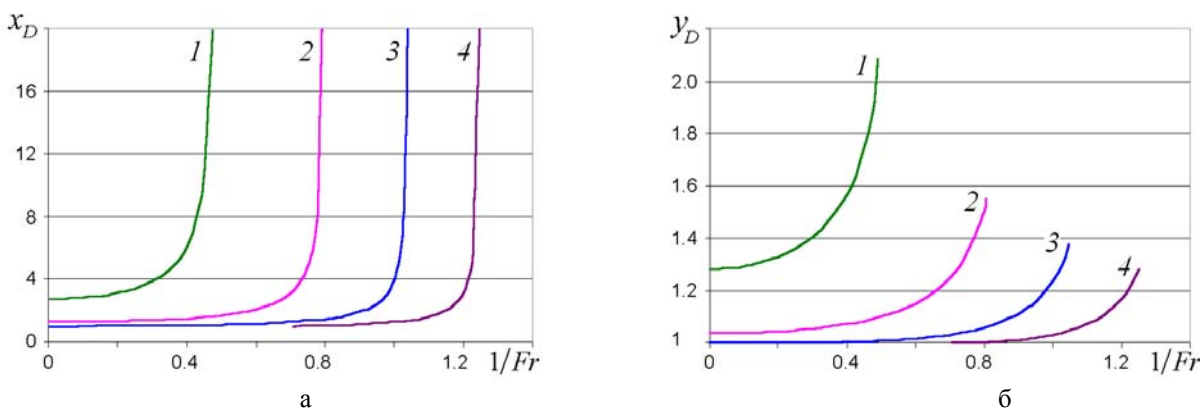


Рис. 6. Зависимости параметров от $1/Fr$: а – x_D ; б – y_D

Следует отметить, что бесконечный рост числа Fr возможен только для $K \leq 3$. Для $K > 3$ при увеличении

Fr в данной модели свободная поверхность сжимается в точку, происходит смыкание кавитатора и замыка-

теля, т. е. в пределе реализуется безотрывное обтекание кругового цилиндра. При безотрывном обтекании

$$\frac{V_D}{V_\infty} = 2 = \sqrt{1 + K - \frac{2}{Fr^2} \frac{Y_D}{R}}.$$

Тогда, так как $Y_D = R$, $\theta_c = 0$, то $\frac{1}{Fr} = \sqrt{\frac{K-3}{2}}$.

В предельном решении согласно [5]

$$C_x = K - \frac{1}{3} - \frac{K-3}{2}.$$

Согласно рис. 5б при уменьшении числа Fr скорость жидкости в наивысшей точке свободной поверхности V_D приближается к V_∞ . При этом длина каверны стремится к бесконечности, а ширина остается ограниченной (в отличие от задачи обтекания невесомой жидкостью, когда при $K \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности и длина, и ширина каверны). Тем самым

схема течения переходит в вариант схемы Кирхгофа. При этом

$$\frac{V_D}{V_\infty} = 1 = \sqrt{1 + K - \frac{2}{Fr^2} \frac{Y_D}{R}}.$$

Отсюда найдем связь параметров $\frac{Y_D}{R} = \frac{Fr^2}{2} K$.

Конкретные значения этих и других параметров получаются численно.

На рис. 7, 8 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для $K = 3$ от дуговой абсциссы $\gamma = \pi/2 - \theta_c$ (кривые 0–4 соответствуют $Fr = \infty; 2.5; 1.25; 1; 0.97$). Положение точки отрыва, соответствующее выполнению условия (25) ($\theta_c = \theta_{c_0}$), отмечено на графиках жирной точкой. Видно, что при $\theta_c = \theta_{c_0}$ зависимости, предположительно, имеют локальные экстремумы.

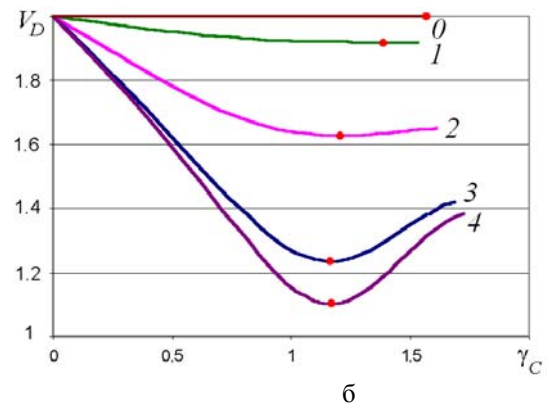
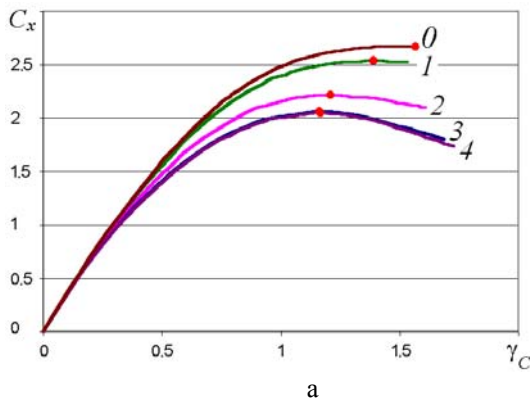


Рис. 7. Зависимости параметров от γ : а – C_x ; б – V_D/V_∞

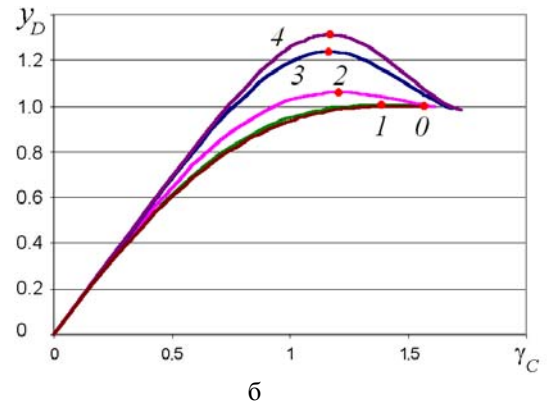
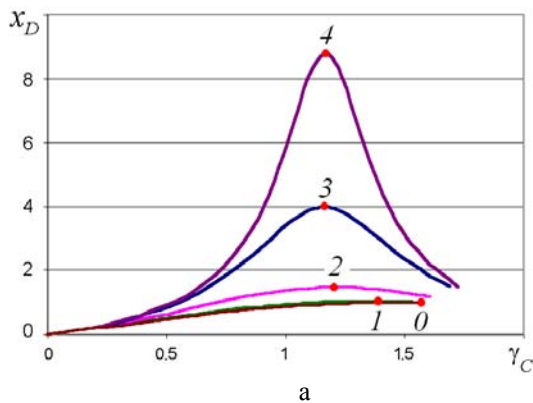


Рис. 8. Зависимости параметров от γ : а – x_D ; б – y_D

Следует отметить, что, основываясь на данных графиках, это предположение можно сделать весьма грубо, поскольку точность передачи графической информации обычно не превышает двух значащих цифр (погрешность ≥ 0.01) от диапазона исследования. При этом если в точке экстремума зависимости имеют вид $f(x) \approx y_0 + k(x - x_0)^2$, то при определении y_0 с погрешностью 0.01, значение x_0 определяется примерно до 0.1. Поэтому для проверки и обоснования предположения об экстремуме в конкретной точке нужна бо-

лее высокая точность и другая форма графического представления.

В соответствии со сделанными выше оценками, погрешность исследуемых параметров после фильтрации не превышает 10^{-12} . Согласно этому, выберем шаг по параметру θ_c равным 10^{-6} и рассмотрим разности $\Delta u = u - u_0$ в зависимости от $\Delta \theta_c = \theta_c - \theta_{c_0}$, где u_0 , θ_{c_0} – значения параметров u и θ_c при выполнении (25).

Эти зависимости иллюстрируются на рис. 9, 10. При этом одна масштабная единица по оси абсцисс равна 10^{-6} , по оси ординат – 10^{-12} . На точечные графики зависимостей нанесен график функции $f(x) \approx kx^2$ с подобранными коэффициентами k . Как

показывают графики, положение экстремума с высокой точностью совпадает с θ_{C_0} , а зависимости близки к квадратичным.

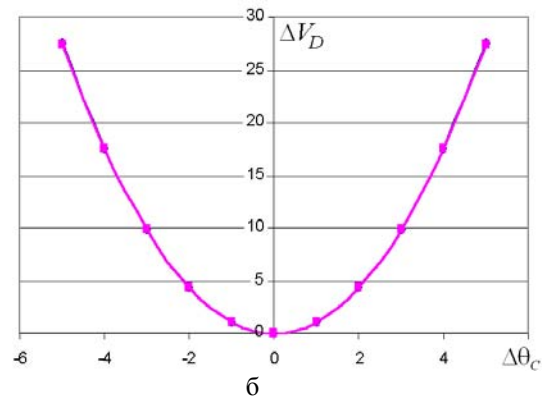
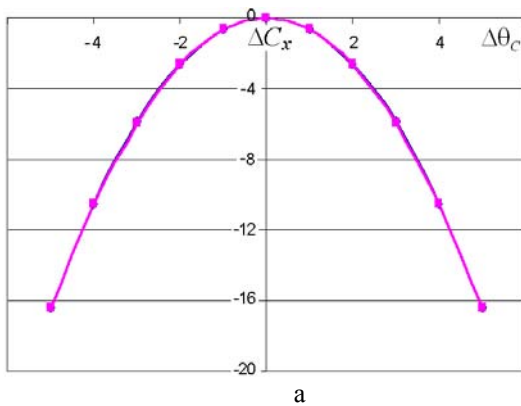


Рис. 9. Зависимости приращения параметров от приращения $\Delta\theta_C$: а – C_x ; б – V_D/V_∞

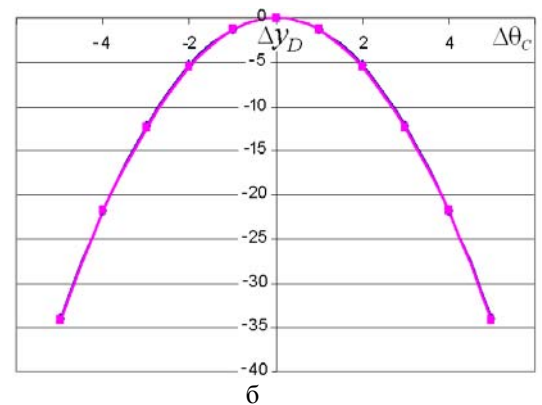
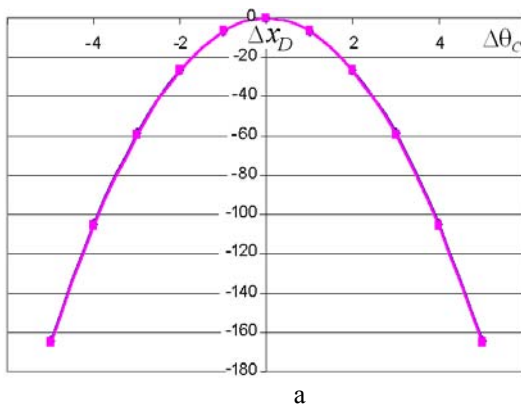


Рис. 10. Зависимости приращения параметров от приращения $\Delta\theta_C$: а – x_D ; б – y_D

Выводы

Таким образом, в данной работе с помощью видоизмененного метода Леви-Чивиты проведено численное решение задачи о кавитационном обтекании полукруглого выступа на дне потоком весомой жидкости.

Исследование показало, что зависимости многих параметров от положения точки отрыва имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва. Применение технологии фильтрации численных результатов позволило установить этот факт с высокой точностью.

Литература

1. Котляр, Л. М. О некоторых течениях с развитой кавитацией в поле силы тяжести / Л. М. Котляр, О. В. Тропольская // Вопросы прикладной математики и механики. – Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т, 1974. – Вып. 3. – С. 86 – 95.
2. Гуревич, М. И. Теория струй идеальной жидкости / М. И. Гуревич. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
3. Житников, В. П. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина, С. С. Поречный // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб., 2009. – № 3(80). – С. 105 – 110.
4. Житников, В. П. Многокомпонентный анализ численных результатов / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина. – Saarbrücken, Germany: LAPLAMBERTA cademic Publishing GmbH&Co. KG, 2012. – 389 с.
5. Житников, В. П. Обобщение метода Леви-Чивиты для исследования плоских и осесимметричных течений с нелинейными условиями на неизвестных границах: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / В. П. Житников. – Уфа, 1993. – 327 с.

Информация об авторах:

Житников Владимир Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной математики Уфимского государственного авиационного технического университета, 8(347-2)73-32-00, zhitnik@mail.ru.

Vladimir P. Zhitnikov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Computer Mathematics, Ufa State Aviation Technical University.

Муксимова Роза Рагилевна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации, 8-9817044394, rose.r.mux@gmail.com.

Roza R. Muksimova – Candidate of Technical Science, Assistant Professor at the Department of Applied Mathematics, Saint-Petersburg State University of Civil Aviation.