УДК 518.9

КОНЦЕПЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Н. Н. Данилов, Л. П. Иноземцева, В. В. Мешечкин

THE CONCEPT OF DYNAMIC STABILITY AND ITS APPLICATION IN CONFLICT CONTROLLED SOCIAL AND ECONOMICAL SYSTEMS

N. N. Danilov, L. P. Inozemtseva, V. V. Meshechkin

Областью исследования научной школы «Дискретная математика и математическая кибернетика» Кемеровского государственного университета является широкий класс оптимизационных и управленческих задач из разных сфер человеческой деятельности, изучаемых с помощью такого способа научного познания, как математическое моделирование.

Ввиду ограничения на объем статьи здесь приводится краткий обзор лишь тех результатов школы, которые касаются построения и исследования математических моделей так называемых конфликтно-управляемых процессов. При этом основной акцент делается на результаты, полученные членами школы в последние 10 – 15 лет.

The research area of the scientific school «Discrete mathematics and mathematical cybernetics» at Kemerovo State University is a wide class of optimization and management problems from different fields of human activity studied by means of mathematical modeling.

Since the size of the paper is restricted, it presents only the results of those school's activity which concern construction and research of mathematical models for so-called conflict controlled processes. In this connection, the main emphasis is put on the results obtained by the members of the school in the last 10–15 years.

Ключевые слова: теория игр, динамическая устойчивость, математические модели, социально-экономические системы, конфликтно-управляемые процессы.

Keywords: game theory, dynamic stability, mathematical models, social and economical systems, conflict controlled processes.

1. Определение ключевых понятий

Для лучшего понимания содержания работы приведем определение нескольких основных понятий так, как это принято в прикладной математике.

Управляемым называется объект или процесс, если на него можно воздействовать извне при помощи каких-либо «рычагов» с целью изменения его состояния в желаемом направлении.

В прикладной математике под «конфликтом» (в широком смысле) понимается любое явление, относительно которого можно говорить о том, какие стороны (кто), каким образом и с какой целью участвуют в этом явлении.

В дальнейшем в этой статье, говоря об «оптимизационных задачах», мы будем иметь в виду модели задач принятия решения без учета временных факторов (статические задачи типа задач линейного и нелинейного программирования, статические игры, статические модели экономики и др.), а говоря о «задачах управления» – модели с учетом временных факторов (модели динамических управляемых процессов, модели экономической динамики и др.).

Того, кто принимает решение втакого рода задачах, в системном анализе принято называть «лицом, принимающим решение» (ЛПР).

2. Математические принципы оптимальности как формализация наилучших способов выбора решения

Значительную часть математической кибернетики составляют дисциплины, которые занимаются проблемами принятия решения – Методы оптимизации, Исследование операций, Системный анализ, Теория игр, Теория полезности, Теория оптимального управления и др. В этих дисциплинах изучаются различные аспекты, связанные с вопросами разработки, обоснования и формализации принципов оптимальности решений, управлений, стратегий; изучения их признаков, свойств, особенностей; исследования условий существования; разработки методов их вычисления и применения в разнообразных практических сферах человеческой деятельности.

Попытка математического описания поведения людей приводит к формализации принципов поведения. В рамках такой формализации описывается не всякое поведение, а поведение разумных людей, связанное с принятием решения.

В задаче принятия решения под *принципом оптимальности* понимается та совокупность правил, при помощи которых ЛПР определяет свое действие (решение, альтернативу, стратегию), наилучшим образом способствующее достижению преследуемой им цели. Решение ЛПР, удовлетворяющее выбранному принципу оптимальности, называется *оптимальным решением*.

Конечная цель исследования любой задачи принятия решения – это нахождение оптимальных решений для всех ЛПР.

Принцип оптимальности выбирается, исходя из учета конкретных условий принятия решения: количества участников, их возможностей и целей, характера столкновения интересов. Формализация оптимального поведения – один из сложных этапов математического моделирования.

В перечисленных выше разделах прикладной математики разработано большое число формальных принципов оптимального поведения людей в различных конфликтно-управляемых системах. Приведем несколько примеров.

Принцип максимизации (минимизации). Такой принцип применяется в основном в задачах математического программирования, являющихся моделями задач планирования, в которых требуется максимизировать или минимизировать один единственный показатель.

Принцип свертки критериев. Применяется при «оптимизации» многих критериев одним координирующим центром (задача многокритериальной оптимизации). Составляется «свертка» всех критериев с весовыми коэффициентами, т. е. задача сводится к максимизации (минимизации) одного критерия – выпуклой комбинации всех показателей.

Принцип минимакса. Применяется при столкновенииинтересов противоборствующих сторон (антагонистический конфликт). Каждое ЛПР сначала для каждой своей стратегии (альтернативы) вычисляет «гарантированный» результат, затем окончательно выбирает ту стратегию, для которой этот результат наибольший по сравнению с другими его стратегиями. Такое действие не дает ЛПР максимального «выигрыша», однако является единственно разумным принципом оптимальности в условиях антагонистического конфликта. В частности, исключен всякий риск.

Принцип равновесия по Нэшу. Это – обобщение принципа минимакса, когдаво взаимодействии участвуют много сторон, преследующих каждая свою цель (прямого противостояния нет). Пусть число ЛПР (участников неантагонистического конфликта) равно *n*. Наборвыбранныхстратегий (ситуация) $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ называется равновесным, если одностороннее отклонение любого ЛПР от этой ситуации может привести разве лишь к уменьшению его же «выигрыша». В ситуации равновесия по Нэшу участники не получают максимального «выигрыша», но они вынуждены придерживаться ее.

Принцип оптимальности по Парето. Данный принцип предполагает в качестве оптимальных те ситуации (наборы стратегий $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$), в которых улучшение «выигрыша» отдельного участника невозможно без ухудшения «выигрышей» остальных участников. Этот принцип предъявляет более слабые требования к понятию оптимальности, чем принцип равновесия по Нэшу. Поэтому Парето-оптимальные ситуации существуют почти всегда.

Принцип недоминируемых исходов. Этот принцип является представителем многих принципов оптимальности в кооперативных играх (в задачах коллективного принятия решений) и приводит к понятию «ядра» решений. Все участники объединяются и совместными согласованными действиями максимизируют «общий выигрыш». Принцип недоминируемости – один из принципов «справедливого» дележа между участниками общего выигрыша. Это та ситуация, когда ни один из участников не может аргументированно возразить против предлагаемого дележа (элемента «ядра»). Существуют и другие принципы «оптимального» дележа общего суммарного выигрыша.

Принцип равновесия по Вальрасу. Этот принцип оптимальности применяется в математических моделях рынков и означает равенство спроса и предложения относительно товаров и услуг. Другими признаками оптимальности в математических моделях экономики могут применяться такие сценарии развития, как стабильность, сбалансированность, экономический рост и др.

3. Проблема временнóй состоятельности сценариев развития конфликтно-управляемых процессов

Все изложенные выше принципы оптимальности сформулированы относительно статических задач принятия решения. Попытка применения их в динамических задачах может сопровождаться всевозможными осложнениями. Причина этого заключается в особенностях динамических процессов. Нужно, чтобы тот или иной принцип оптимальности, выбранный в начальном состоянии процесса (в начальный момент времени), оставался содержательным в любом текущем состоянии (в любой момент времени) вплоть до конца динамического процесса. Это свойство, называемое *динамической устойчивостью* принципов оптимальности, можно рассматривать как принцип реализуемости «статических» принципов оптимального поведения в динамических моделях принятия решения. Впервые концепция динамической устойчивости была предложена Л. А. Петросяном и получила дальнейшее развитие в работах Н. Н. Данилова и в их совместной монографии [3].

При исследовании кооперативных дифференциальных игр было обнаружено и математически строго доказано, что если специальным образом не производить регуляризацию принципа оптимальности, то выбранное в начале процесса «оптимальное решение» в ходе его реализации почти всегда теряет свою «оптимальность» и поэтому не может оставаться основополагающим принципом дальнейшего развития. Данное явление имеет место даже без каких-либо внешних воздействий или изменения интереса участников. Это и есть нарушение динамической устойчивости или временнóй состоятельности. Несколько позже это обстоятельство было обнаружено при решении одной специальной задачи зарубежными авторами Ф. Кидландом и Е. Прескоттом, получившими Нобелевскую премию в области экономики в 2004 г.

Таким образом, чтобы траектория развития процесса сохраняла свою оптимальность в ходе реализации, необходимо, чтобы заложенный при ее выработке принцип оптимальности обладал свойством динамической устойчивости или временнóй состоятельности, хотя, как было строго доказано, это может происходить лишь в вырожденных тривиальных случаях. Нарушение временной состоятельности рано или поздно приводит к пересмотру принципа поведения, который может сопровождаться материальными и моральными потерями. Для определения того, является ли выбранный принцип оптимальности состоятельным во времени или нет, необходимо его точное математическое описание и исследование с помощью подходящего математического аппарата.

4. ***Динамическая устойчивость как базовый принцип для разработки единого подхода к конфликтно-управляемым системам***

В этом пункте приведем строгое (математическое) определение принципа временно́й состоятельности для общих динамических систем с n управлениями.

Пусть заданы отрезок времени $[t_0,T]$, множество состояний X,n множеств U_1, …, U_n значений входных воздействий, n множеств $\mathbf{U}_1$, …, $\mathbf{U}_n$ допустимых управлений, состоящих из отображений полуинтервала $[t_0,T)$ в U_1, …, U_n соответственно и функция состояния: $\hat{e}:[t_0,T]\times[t_0,T]\times X\times\mathbf{U}_1\times\ldots\times\mathbf{U}_n\to X$.

Совокупность

$$\Sigma=\left([t_0,T],X,\mathbf{U}_1,\ldots,\mathbf{U}_n,\hat{e}\right) \tag{1}$$

называется общей динамической системой с n управлениями, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) если $u_i^1,u_i^2\in\mathbf{U}_i$ и $t_0\le t_1<t_2<t_3\le T$, то найдется такое $u_i^3\in\mathbf{U}_i$, что

$$u_i^3(t)=\begin{cases}u_i^1(t), & t_1\le t<t_2,\\ u_i^2(t), & t_2\le t<t_3 \quad (i=1,\ldots,n)\end{cases}$$

(условие сочленения допустимых управлений);

2) $\hat{e}(t,t,x,u_1,\ldots,u_n)=x$ для всех $t_0\le t\le T$, $x\in X$, $u_1\in\mathbf{U}_1$, …, $u_n\in\mathbf{U}_n$ (свойство согласованности);

3) если $t_0\le t_1<t_2<t_3\le T$ и $x\in X$, $u_1\in\mathbf{U}_1$, …, $u_n\in\mathbf{U}_n$, то

$\hat{e}(t_3,t_1,\hat{e}(t_2,t_1,x,u_1,\ldots,u_n),u_1,\ldots,u_n)=\hat{e}(t_3,t_1,x,u_1,\ldots,u_n)$

(полугрупповое свойство);

4) если $u_i^1,u_i^2\in\mathbf{U}_i$, $i=1,\ldots,n$, $u_i^1(t)=u_i^2(t)$ при $t_0\le t_1\le t<t_2\le T$, то для любого

$x\in X$ $\hat{e}(t_2,t_1,x,u_1^1,\ldots,u_n^1)=\hat{e}(t_2,t_1,x,u_1^2,\ldots,u_n^2)$ (свойство причинности).

Динамической игрой n лиц (описываемой системой (1)) в нормальной форме называется совокупность:

$$\Gamma(t_0,x_0)=\left\langle\Sigma,D_i,H^i_{t_0,x_0},i\in N\right\rangle, \tag{2}$$

где D_i – множество стратегий игрока i, функционал $H^i_{t_0,x_0}$ определен на множестве $D_1\times\ldots\times D_n$, $N=\{1,\ldots,n\}$ – множество игроков.

Игра (2) начинается в исходной позиции (t_0,x_0) и имеет продолжительность $T-t_0$.

Вектор $a=(a_1,\ldots,a_n)$, где $a_i\in D_i$, $i\in N$, будем называть ситуацией, а вектор

$H_{t_0,x_0}(a)=\left(H^1_{t_0,x_0}(a),\ldots,H^n_{t_0,x_0}(a)\right)$ – вектором выигрыша (в ситуации a).

Обозначим через

$\mathbf{H}(t_0,x_0)=\left\{H_{t_0,x_0}(a)\,\middle|\,a\in D_1\times\ldots\times D_n\right\}$ множество всех векторов выигрыша в игре (2).

Пусть W – отображение, ставящее в соответствие каждой игре $\Gamma(t_0,x_0)$ подмножество $W(t_0,x_0)$ множества $\mathbf{H}(t_0,x_0)$, называемое оптимальным. Отображение W будем называть принципом оптимальности (п. о.), а множество $W(t_0,x_0)$ – решением игры $\Gamma(t_0,x_0)$, порожденным этим п. о.

Определение 1. Пусть в игре (2) выбран п.о. W и $W(t_0,x_0)\ne\varnothing$. Любая ситуация $\overline{a}=(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n)$, такая, что $H_{t_0,x_0}(\overline{a})\in W(t_0,x_0)$, называется условно-оптимальной (в смысле п.о. W) ситуацией, а любая траектория $\overline{x}(\cdot)=\overline{x}(\cdot,t_0,x_0,\overline{a})$ – условно-оптимальной (в том же смысле) траекторией.

Пусть $\overline{x}(\cdot)$ – произвольная условно-оптимальная траектория. Погрузим игру (2) в семейство (по параметру t) аналогичных игр $\left\{\Gamma(t,\overline{x}(t)),\,t_0\le t\le T\right\}$.

Текущая игра $\Gamma(t,\overline{x}(t))$ описывается полудинамической системой

$\Sigma(t,\overline{x}(t))=\left([t,T],X,\mathbf{U}_1[t,T),\ldots,\ \mathbf{U}_n[t,T),\hat{e}\right)$ и имеет вид:

$\Gamma(t,\overline{x}(t))=\left\langle\Sigma(t,\overline{x}(t)),D_i[t,T),H^i_{t,\overline{x}(t)}(\overline{a}),i\in N\right\rangle$,

где $D_i[t,T)$ – множество сужений всех стратегий из D_i.

Решение текущей игры $\Gamma(t,\overline{x}(t))$, порожденное тем же п.о. W, что и в игре (2), обозначим через $W(t,\overline{x}(t))$. По определению $W(t,\overline{x}(t))\subset\mathbf{H}(t,\overline{x}(t))$, где $\mathbf{H}(t,\overline{x}(t))$ – множество всех векторов выигрыша в игре $\Gamma(t,\overline{x}(t))$.

Обозначим через $H_{t_0,x_0,t}(a)$ часть вектора (сужение) $H_{t_0,x_0}(a)$, которая соответствует полуинтервалу $[t_0,T)$.

Определение 2. Пусть в игре (2) выбран п.о. W и $W(t_0,x_0)\ne\varnothing$. Пусть $\overline{a}=(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n)$ – любая условно-оптимальная ситуация. Вектор выигрыша $H_{t_0,x_0}(\overline{a})$ называется динамически устойчивым, если существует траектория $\overline{x}(\cdot)\in\Phi(t_0,x_0,\overline{a})$, такая, что

$$H_{t_0,x_0}(\overline{a})\in\bigcap_{t_0\le t\le T}\left[H_{t_0,x_0,t}(\overline{a})+W(t,\overline{x}(t))\right]. \tag{3}$$

В этом случае траектория $\overline{x}(\cdot)$ называется оптимальной (в смысле динамической устойчивости) траекторией.

Решение $W(t_0,x_0)$ игры (2) называется динамически устойчивым, если динамически устойчивы все векторы выигрыша из множества $W(t_0,x_0)$.

В качестве примера игры с нереализуемым п.о. ввиду его динамической неустойчивости можно привести игру многих лиц с терминальными выигрышами, где п.о. W имеет смысл минимизации наибольшего приведенного отклонения [1].

Пусть в (1) траектории $x(\cdot)$ являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u_1(t),\ldots,u_n(t)),\ t_0\le t\le T \tag{4}$$

с фиксированным начальным состоянием $x(t_0)=x_0$. Можно показать, что для системы (4) выполняются все аксиомы 1) – 4). Система (4) называется классической динамической системой, ее обозначим Σ^1.

Бескоалиционной дифференциальной игрой *n* лиц называется совокупность

$$\Gamma^1(t_0,x_0)=\left\langle \Sigma^1, D_i^1, H^i_{t_0,x_0}, i\in N\right\rangle, \qquad (5):$$

где D_i^1 – множество кусочно-программных стратегий (КПС) игрока i ($i=1,...,n$). Определение КПС можно найти в [1]. Функции выигрыша имеют вид

$$H^i_{t_0,x_0}(x(\cdot))=\int_{t_0}^{T} h_i(t,x(t))dt+F_i(x(T)),\ i=1,...,n, \quad (6)$$

где подынтегральные функции h_i предполагаются непрерывными на $[t_0,T]\times R^m$ (R^m – фазовое пространство состояний). В дальнейшем для простоты будем предполагать, что правая часть в (4) есть непрерывная по всем переменным вектор-функция, «разделяемая» относительно управлений: $f(t,x,u_1,...,u_n)=f(t,x,u_1)+...+f(t,x,u_n)$.

Пусть $\varepsilon>0$. Ситуация $a^\varepsilon=(a_1^\varepsilon,...,a_n^\varepsilon)\in D_1\times...\times D_n$ называется ситуацией ε-равновесия по Нэшу в игре (5), если для любого $a_i\in D_i$ и $i\in N$

$$H^i_{t_0,x_0}(a^\varepsilon)\ge H^i_{t_0,x_0}(a^\varepsilon\parallel a_i)-\varepsilon. \qquad (7)$$

Известно, что ситуация ε-равновесия по Нэшу в классе КПС существует.

Теорема 1. Ситуация ε-равновесия в бескоалиционной игре (5) динамически устойчива.

Из теоремы 1 также следует динамическая устойчивость принципа минимакса в игре Γ^1, когда $n=2$ и $H^1_{t_0,x_0}\equiv H^2_{t_0,x_0}$.

Рассмотрим динамическую задачу

$$\Gamma^2(t_0,x_0)=\left\langle \Sigma^1, D, H^i_{t_0,x_0}, i\in N\right\rangle, \qquad (8)$$

где все $H^i_{t_0,x_0}$ определены на единственном множестве допустимых управлений *D*. Задача (8) называется многокритериальной.

В качестве п.о. *W* в (8) рассмотрим оптимальность по Парето: управление $u^*\in D$ называется оптимальным по Парето, если не существует другого управления $u\in D$, такого, что $H^i_{t_0,x_0}(u^*)\le H^i_{t_0,x_0}(u)$, $i\in N$, причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Обозначим через D^P множество всех оптимальных по Парето управлений в задаче (8). Тогда $W(t_0,x_0)=\left\{H_{t_0,x_0}(u^*)\mid u^*\in D^P\right\}$ есть оптимальное по Парето решение (оптимальное по Парето множество векторных оценок) задачи (8).

Для каждой условно-оптимальной (по Парето) траектории $\bar{x}(\cdot)=\hat{e}(\cdot,t_0,x_0,u^*)$ через $W(t,\bar{x}(t))$ обозначим аналогичное решение текущей задачи $\Gamma(t,\bar{x}(t))$.

Теорема 2. Если в задаче многокритериальной оптимизации (8) существует оптимальное по Парето решение, то оно динамически устойчиво.

Совокупность (5) называется кооперативной дифференциальной игрой, если разрешено объединение игроков в коалиции $S\subset N$, гарантированные выигрыши которых определяются согласно значения $v(S)$ так называемой характеристической функции $v(x_0,\cdot):R^m\times 2^N\to R^1$. Это значение $v(S)$ может быть определено различными способами, исходя из суммарного выигрыша $\sum_{i\in S}H^i_{t_0,x_0}$. Кооперативную дифференциальную игру будем обозначать символом

$$\Gamma_v(t_0,x_0)=\left\langle \Sigma^1, N, v\right\rangle. \qquad (9)$$

Пусть

$$E_v(t_0,x_0)=\left\{\xi^0\in R^n \,\middle|\, \xi_i^0\le v(x_0,i), i\in N; \sum_{i\in N}\xi_i^0=v(x_0,N)\right\} \quad –$$

множество дележей в игре (9). В игре $\Gamma_v(t_0,x_0)$ все п.о. W_v таковы, что $W_v(t_0,x_0)\subset E_v(t_0,x_0)$.

Вдоль условно-оптимальной траектории $\bar{x}(\cdot)$ для любого $t\in[t_0,T]$ обозначим:

$$J^N_{t_0,x_0,t}(\bar{x}(\cdot))=\int_{t_0}^{t}\bar{h}_N(\tau)d\tau,$$

$$J^N_{t,\bar{x}(t)}(\bar{x}(\cdot)[t,T])=\int_{t}^{T}\bar{h}_N(\tau)d\tau+\bar{F}_N,$$

где

$$\bar{h}_N(\tau)=\sum_{i\in N}h_i(\tau,\bar{x}(\tau)),$$

$$\bar{F}_N=\sum_{i\in N}F_i(\bar{x}(\tau)).$$

Обозначим $\bar{F}=(F_1(\bar{x}(T)),...,F_n(\bar{x}(T)))$.

Определение 3. Стратегией распределения (СР) называется функция

$$\beta:[t_0,T]\times R^n\to Z\ \ (\beta:[t_0,T]\to Z), \quad (10)$$

где *Z* – гиперплоскость $z_1+...+z_n=1$.

Если *Z* – симплекс, то β называется неотрицательной СР.

Пусть в игре (9) выбран п.о. W_v и $\xi^0\in W_v(t_0,x_0)$. Рассмотрим СР вида (10) и положим

$$w(t,\beta)=\int_{t_0}^{t}\beta(\tau)\bar{h}_N(\tau)d\tau.$$

Определение 4. Дележ $\xi^0\in W_v(t_0,x_0)$ называется динамически устойчивым, если существует интегрируемая на $[t_0,T]$ СР (10), такая что

$$\xi^0\in\bigcap_{t_0\le t\le T}\left[w(t,\beta)+W_v(t,\bar{x}(t))\right]. \qquad (11)$$

Будем говорить, что кооперативная динамическая игра (9) с побочными платежами имеет динамически устойчивое решение $W_v(t_0,x_0)$, если динамически устойчивы все дележи $\xi^0\in W_v(t_0,x_0)$. В этом случае условно-оптимальную траекторию $\bar{x}(\cdot)$ будем называть оптимальной (в смысле динамической устойчивости) траекторией.

В случае отсутствия динамически устойчивых дележей из множества $W_v(t_0,x_0)$ будем говорить, что решение $W_v(t_0,x_0)$ динамически неустойчиво.

Для условно-оптимальной траектории $\overline{x}(\cdot)$ и произвольного п.о. W_v в игре (9) рассмотрим отображение

$$t \to \overline{W}_v = W_v(t, \overline{x}(t)). \qquad (12)$$

Будем говорить, что отображение (12) имеет невозрастающий селектор $t \to \xi^t$, если $\xi^t \in \overline{W}_v$, $t_0 \le t \le T$, причем $\xi^1 \ge \xi^2$ при $t_0 \le t_1 < t_2 \le T$.

Теорема 3. Пусть $\overline{h}_N$ – непрерывная на $[t_0, T]$, не принимающая на этом отрезке нулевого значения функция. Для того чтобы решение $W_v(t_0, x_0)$ игры (9) было динамически устойчиво, достаточно, чтобы вдоль условно-оптимальной траектории $\overline{x}(\cdot)$ п.о. удовлетворял следующим условиям:

1) $\overline{W}_v(t) \ne \varnothing$, $t_0 \le t \le T$;

2) для любого дележа $\xi^0 \in W_v(t_0, x_0)$ существует дифференцируемый на $[t_0, T]$ селектор $t \to \xi^t$ отображения (12), такой что $\xi^{t_0} = \xi^0$.

Если ограничиться заранее рассмотрением только непрерывных СР вида (10), то следует (непрерывная) дифференцируемость селектора $t \to \xi^t$. Поэтому получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Для того чтобы решение $W_v(t_0, x_0)$ игры (9) было динамически устойчиво в классе непрерывных СР вида (10), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены все условия теоремы 3.

Если не предположить непрерывности СР, то условия теоремы 3 являются необходимыми лишь почти всюду на $[t_0, T]$.

Следствие 2. Пусть в дополнение к условиям теоремы 3 выполнены следующие условия:

1) $\overline{h}_N(t) > 0$, $t_0 \le t \le T$;

2) селектор в условии 2) теоремы 3 не возрастает. Тогда для каждого дележа $\xi^0 \in W_v(t_0, x_0)$ существует неотрицательная СР, удовлетворяющая условию динамической устойчивости (11) дележа ξ^0.

Приведенные здесь теоремы являются достаточно общими, т. е. охватывают достаточно широкие классы игровых моделей и справедливы для различных конкретных принципов оптимальности (*W*) – С-ядра, НМ-решения, вектора Шепли и др. Теорема 3, которую мы называем основной теоремой для кооперативных дифференциальных игр с побочными платежами, является конструктивной, поскольку из ее доказательства следует метод вычисления динамически устойчивых оптимальных (в смысле п.о. *W*) решений игры.

В [1] были предложены различные модификации динамической устойчивости (определение 4) в игре $\Gamma_v(t_0, x_0)$: понятия динамической *t*-, Δ-, *v*-устойчивости и обобщенной динамической устойчивости решения игры с соответствующими функциями распределения дележей (β^t, β^Δ, β^v, β^ε).

Стратегия распределения (СР) может быть интерпретирована как способ распределения общего выигрыша между игроками во времени в условиях фиксированного дележа, удовлетворяющего тому пли иному теоретико-игровому п.о. Различные СР порождают различные понятия динамической устойчивости. СР β^ε в отличие от β^0 и β' задает «кусочно-постоянный» способ распределения, β^Δ описывает коррекцию распределения в заранее заданные моменты времени, а β^v предполагает коррекцию в моменты времени, задаваемые при помощи отображения *v*. По динамическому характеру действия СР β^0, β' можно отнести к непрерывным, а β^Δ, β^v, β^ε – к дискретным способам коррекции выигрышей. Некоторые взаимосвязи между различными видами динамической устойчивости вытекают из их определений и соответствующих теорем существования. Так, например, из динамической устойчивости решения следует динамическая *t*-устойчивость и динамическая Δ-устойчивость для всех Δ, а из динамической *v*-устойчивости для всех *v* – динамическая Δ-устойчивость дня всех Δ. Выбор того или иного вида СР в реальной динамической системе может быть продиктован фактическими условиями ее функционирования, возможностями управляющих и вычислительных устройств и т. д.

Аналогичные результаты были получены для кооперативных дифференциальных игр без побочных платежей, а также для двух классов кооперативных игр, динамика которых описывается разностными уравнениями. Более подробно с этими результатами можно ознакомиться в [1].

Все приведенные результаты принадлежат профессору Н. Н. Данилову и опубликованы в многочисленных его журнальных статьях и двух монографиях. Часть статей переведена за рубежом. Все эти результаты, а также полученные в последние годы приложения в различных сферах практической деятельности, позволяют говорить о том, что концепция динамической устойчивости является основополагающим принципом формализованного изучения конфликтно-управляемых процессов. Содержание следующих разделов данной статьи является подтверждением этого факта. Следует заметить, что известный из теории оптимального управления принцип оптимальности Р. Беллмана, который применяется только для минимизации (или максимизации) одного функционала качества, вытекает как частный случай из принципа динамической устойчивости.

5. Применение концепции динамической устойчивости в прикладных исследованиях

Содержание данного раздела составляют краткие описания основных результатов по темам диссертационных исследований, выполненных под руководством профессора Н. Н. Данилова.

5.1. Применение в моделях экономической динамики

В этом направлении защищены две кандидатские диссертации.

Голоколосова Т. В. Динамически устойчивое поведение в моделях экономики на конечном временном интервале. Основные результаты работы: новый подход к математическому моделированию динамики экономических процессов и равновесия на основе общей теории управления; условия существования равновесных и динамически устойчивых траекторий в моделях экономической динамики на конечном временном интервале; результаты, полученные с применением концепции динамической устойчивости в исследовании теоретико-игровых принципов оптимального поведения в различных моделях несовершенной конкуренции.

Мешечкин В. В. Динамическая устойчивость равновесных траекторий в математических моделях экономики. Основными результатами работы являются: применение концепции динамической устойчивости к исследованию различных математических моделей экономической динамики; механизмы регуляризации динамически неустойчивых условно-равновесных траекторий и алгоритмы их реализации; существование динамически устойчивых условно-равновесных траекторий, их признаки и свойства в частных моделях экономической динамики (динамические аналоги моделей Эрроу-Дебре, Леонтьева, фон Неймана).

5.2. Применение в моделях рынка труда

В этой области выполнены два диссертационных исследования.

Чернядьева Н. В. Разработка математических моделей равновесного развития рынка труда. Новые результаты работы состоят в разработке и обосновании метода формализации рынка труда, его основных элементов и нахождении условий существования полной занятости и равновесия; разработке алгоритма нахождения равновесного состояния рынка труда на основе формализованного и изученного процесса регулирования заработной платы; построении динамической модели рынка труда, формализации и обосновании понятий спроса, предложения и равновесия на рынке труда в динамическом случае; исследовании необходимых и достаточных признаков оптимального развития рынка труда; установлении условий существования равновесных траекторий рынка труда, проведении анализа состоятельности во времени, а также разработке алгоритма динамически устойчивой регуляризации равновесных траекторий рынка труда.

Яковлева Н. М. Теоретико-игровая модель рынка труда региона. На защиту выносились следующие результаты: впервые предложен теоретико-игровой подход к математическому моделированию рынка труда региона; в модели рынка труда в виде бескоалиционной игры его участников найдены достаточные условия существования ситуации равновесия по Нэшу, разработан способ ее нахождения и проведен сравнительный анализ условий существования экономического (по Вальрасу), теоретико-игрового (по Нэшу) и олигополистических (по Курно и Штакельбергу) равновесий на рынке труда; с применением принципа динамической устойчивости исследован вопрос о состоятельности во времени равновесных траекторий развития рынка труда: найдены необходимые и достаточные условия динамической устойчивости ситуаций равновесия по Вальрасу и Нэшу, множества недоминируемых дележей (С-ядро) и вектора Шепли.

5.3. Применение в моделях финансового рынка

Николаева Е. А. Равновесные модели рынка ценных бумаг. На защиту выносились следующие основные положения: построена динамическая модель рынка ценных бумаг, в которой формализованы понятия спроса, предложения и равновесия; доказаны теоремы существования оптимального портфеля и равновесного состояния рынка; в многошаговой модели рынка ценных бумаг с помощью принципа динамической устойчивости исследован вопрос о содержательности во времени равновесных траекторий, найдено достаточное условие существования и динамической устойчивости ε-равновесных траекторий и разработана схема вычисления в терминах динамического программирования; с точки зрения концепций равновесия и динамической устойчивости исследованы математические модели конкретных видов рынков – со смешанными активами и ГКО; найдено достаточное условие существования равновесия и метод его вычисления на рынке со смешанными активами, установлена структура множества эффективных по Парето портфелей и доказана его динамическая устойчивость на рынке ГКО.

5.4. Применение в моделях социальных систем

Злобина С. Л. Исследование математических моделей равновесного и стабильного развития социальных систем. На защиту выносились следующие основные положения: математическая модель развития социальной системы в виде многошаговой задачи оптимального управления; формализованные понятия социального равновесия и социальной стабильности, достаточные условия существования равновесной и стабильной траектории и необходимые и достаточные условия равновесия в социальной системе; определение, а также необходимые и достаточные условия динамической устойчивости траекторий, отвечающих таким нормативным требованиям как равновесность, стабильность; структура трех множеств реально достижимых состояний: оптимальных в смысле равномерной минимизации отклонений от целей, оптимальных в смысле лексикографического предпочтения, наилучших с точки зрения сближения с утопическим множеством; вычислительная схема построения динамически устойчивой равновесной и стабильной траектории социальной системы.

5.5. Применение в моделях позиционного управления

Смолин Е. А. Принцип позиционной динамической устойчивости и его применение в системах со многими управлениями. Основные положения работы: найденные в работе условия существования, необходимые и достаточные признаки позиционной динамической устойчивости траекторий в дифференциальных и многошаговых кооперативных играх с побочными и без побочных платежей позволяют оценить реальные возможности объединения усилий участников конфликтно-управляемых систем для достижения поставленных целей; алгоритм, разработанный для кооперативных многошаговых игр без побочных платежей, позволяет вычислить позиционно динамически устойчивые траектории, вдоль которых игроки получают справедливые (в смысле кооперативных принципов оптимальности) и стабильные выигрыши; применение концепции позиционной динамической устойчивости для выявления стабильных и сбалансированных сценариев развития рынка товаров потребления, рынка ценных бумаг, рынка труда и процессов структурного изменения социальной системы, показывает ее возможности как единого подхода для изучения вопросов оптимального поведения в широкой области неклассических задач принятия решений.

5.6. Применение в моделях устойчивого развития региона

Исходя их содержания политики устойчивого развития как стратегии дальнейшего движения человеческой цивилизации следует, что этот процесс распространяется от отдельных регионов до человеческого сообщества в целом, охватывая на каждом уровне иерархии экологическую, экономическую и социальную среды. Система функционирует на временном интервале, длина которого диктуется общими принципами устойчивого развития. Таким образом, это есть сложная динамическая система с секторно-иерархической структурой. Исходя из постулата о том, что общество не должно пассивно созерцать происходящие процессы, а должно целенаправленно влиять на них, каждая из трех подсистем (экологическая, экономическая и социальная) и глобальная система в целом нами рассматриваются как управляемые системы.

Формализация рациональной политики устойчивого развития может состоять из двух этапов. Первый – это разработка требований (или аксиоматики), порождающих естественные понятия «справедливого», «согласованного», «равновесного» развития подсистем; второй – выработка согласованно «оптимального» поведения всей системы в сочетании с изучением и систематизацией опыта специалистов, зарекомендовавших себя на практике, а также на основе результатов предварительных наблюдений и экспериментов (экспертные системы). Эти два этапа являются наиболее подходящими для «оптимального» устойчивого развития как отдельных подсистем, так и глобальной системы в целом, поскольку они охватывают не только формально-логические, но и психологические и компромиссные аспекты принятия решения.

Приведенные нами варианты формализации понятия оптимальности относятся к концепции выбора. Она отвечает на вопрос: какой набор управленческих решений будет наилучшим образом соответствовать каждой создавшейся ситуации (каждому состоянию системы), но не дает ответа на вопрос – реализуемы ли эти решения? Для ответа на последний вопрос нужно иметь механизм реализации «оптимальных» решений. В качестве такого механизма наилучшим образом подходит принцип динамической устойчивости.

Результаты, полученные в этой области Н. Н. Даниловым и Л. П. Иноземцевой, вошли в коллективную монографию [2]. Вопросам построения и использования глобальных и эконометрических моделей для сбалансированных и динамически устойчивых сценариев устойчивого развития экономического региона посвящена диссертация Е. С. Черновой.

5.7. Применение в моделях экологических систем и здравоохранении

Проблемы современного общества – здравоохранения, загрязнения окружающей среды, эволюции климата, устойчивого существования экосистем, истощения природных ресурсов и т. д. – тесно переплетаются между собой. Применение формализованного подхода позволяет через построение и анализ математических моделей исследовать их с необходимой степенью детализации как раздельно, так и во взаимосвязи друг с другом. Эта тематика в научной школе представлено двумя направлениями.

Первое из них сосредоточено на моделировании динамики эколого-экономических систем и формализации задач рационального природопользования. Здесь исследуются процессы образования загрязняющих веществ в ходе производственной деятельности и их выброс в окружающую среду. При этом учитывается накопление вредных веществ в биоценозах и их естественный распад и решается вопрос сокращения негативных последствий загрязнения природной среды.

Второе направление изучает статистические закономерности изменения состояния здоровья населения в регионе под влиянием различных факторов. Исследуются динамика уровня заболеваемости, рождаемости, смертности, инвалидности и пр., а также агрегированные интегральные показатели, одновременно учитывающие и обобщающие информацию о различных аспектах состояния общественного здоровья.

5.8. Новые области исследования

В последние два-три года научные исследования школы расширились двумя направлениями, открывающими широкую область для получения новых и актуальных результатов.

1. Разработка новых классов динамических игр. В цикле статей в журнале «Вестник КемГУ» за 2009 – 2012 гг. профессором Н. Н. Даниловым положено начало теории нового класса конфликтно-управляемых моделей, названных автором «Динамические матричные игры». Это есть симбиоз двух классических моделей – матричных игр и задач оптимального управления. Проведены начальные этапы исследования еще двух моделей из этого класса: «Динамические игры с природой» и «Динамические биматричные игры». По этим моделям выполняются курсовые и дипломные работы студентов, специализирующихся на кафедре математической кибернетики КемГУ.

2. Моделирование инвестиционной деятельности пенсионной системы. На основе ряда статей доцента Л. П. Иноземцевой, посвященных инвестиционной деятельности пенсионной системы России (ПСР), начато изучение общей портфельной теории для ПСР посредством математического моделирования задач субъектов инвестирования пенсионных резервов. Подготовлена первая большая статья Н. Н. Данилова и Л. П. Иноземцевой методологического характера для публикации в одном из журналов издательского дома «Финансы и кредит».

6. Внедрение научных результатов в форме хозяйственных договоров и грантов

Все приведенные в этом пункте внебюджетные НИР выполнены под научным руководством профессора Н. Н. Данилова:

– «Маркетинговые исследования экономико-математическими методами предприятий, отраслей и комплексов Кемеровской области» (Хоздоговорная НИР с Администрацией Кемеровской области, 1993 г.).

– «Статистическое и теоретико-игровое моделирование социально-политического взаимодействия в Кузбассе» (Программа Госкомитета по ВШ РФ, 1994 – 1997 гг.).

– «Математическая модель оптимального распределения инвестиций» (Программа реструктуризации угольной отрасли Кузбасса, хоздоговорная НИР с концерном «Кузбассинвестуголь», 1996 г.).

– «Приумножение доходов бюджета региона (субъекта РФ) за счет эффективного использования земельных участков» (Государственный контракт с Администрацией Кемеровской области, 2003 г.).

– «Изучение проблем устойчивого развития экономики региона посредством математического моделирования» (Грант «РФФИ-Кузбасс», 2007 – 2009 гг.).

– «Динамическая устойчивость принципов оптимальности в системах со многими управлениями» (Программа «Университеты России», 1992 г.).

– «Исследование новых принципов оптимальности в динамических теоретико-игровых моделях и задачах глобальной оптимизации» (Программа Госкомитета по ВШ РФ, 1993 – 1995 гг.).

– «Проблема динамической устойчивости в теории игр, теории массового обслуживания и неклассических задачах оптимизации» (Грант РФФИ, 1995 г.).

– «Проблема динамической устойчивости в математических моделях экономики» (Грант РФФИ, 1997 – 1999 гг.).

– «Математическая экономика с теорией и задачами» (Грант OSI Assistance Foundation:IEB882w, 1998 г.).

– «Принципы согласования интересов в математической модели управляемой агрегированной системы» (Грант Минобразования РФ по фундаментальным исследованиям в области естественных наук, 2002 г.).

7. Результаты интеллектуальной деятельности

Членами научной школы «Дискретная математика и математическая кибернетика» и с их участием получены следующие свидетельства о регистрации электронных изданий и программных продуктов в российских агентствах по патентам, реестрах программ для ЭВМ и депозитариях электронных изданий:

– Свидетельство об официальной регистрации базы данных № 2001620056 от 19.04.2001 на электронный ресурс «Матэкономика» / Н. Н. Данилов, Л. П. Иноземцева. – РОСПАТЕНТ.

– Регистрационное свидетельство № 875-1 от 12.02.2001 на электронное издание «Основы математической экономики: Web-ориентированный учебник» / Н. Н. Данилов, Л. П. Иноземцева. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Свидетельство об официальной регистрации базы данных № 2002620085 от 29.05.2002 на электронный УМК «Исследование операций и математическое программирование» / Н. Н. Данилов, В. В. Мешечкин. – РОСПАТЕНТ.

– Свидетельство об официальной регистрации базы данных № 2003620089 от 15.05.2003 на электронный УМК «Теория и практика оптимальных процессов» / Н. Н. Данилов, В. В. Мешечкин. – РОСПАТЕНТ.

– Свидетельство об официальной регистрации базы данных № 2004620047 от 13.02.2004 на электронный УМК «Финансы» / Л. П. Иноземцева. – РОСПАТЕНТ.

– Регистрационное свидетельство от 12.02.2004 на электронный УМК «Финансы» / Л. П. Иноземцева. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 13939 от 1.10.2008 на электронное издание «Разработка программного комплекса для моделирования и прогнозирования работы зубных врачей и зубных техников по ортопедическому отделению МУЗ КСП № 4» / Ю. А. Загорский, К. Н. Токарев, В. В. Мешечкин. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008615352 «Разработка программного комплекса для моделирования и прогнозирования работы зубных врачей и зубных техников по ортопедическому отделению МУЗ КСП № 4» / Ю. А. Загорский, К. Н. Токарев, В. В. Мешечкин. – Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 10.11.2008.

– Регистрационное свидетельство № 16197 от 5.05.2009 на электронное издание «Оценка бизнеса: электронный УМК» / Н. Н. Данилов. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 16199 от 5.05.2009 на электронное издание «Теория прогнозирования: Электронный учебно-методический комплекс для специальности 010501 (направления 010500) «Прикладная математика и информатика» / В. В. Мешечкин. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 18673 от 15.04.2010 на электронное издание «Теория игр с задачами и упражнениями: электронный УМК» / Н. Н. Данилов, В. В. Мешечкин. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 18674 от 15.04.2010 на электронное издание «Бюджетные и внебюджетные фонды в РФ: электронный УМК» / Л. П. Иноземцева. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 22880 от 27.07.2011 на электронное издание «Финансы: конспект динамических слайд-лекций» / Л. П. Иноземцева. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 22881 от 27.07.2011 на электронное издание «Оценка стоимости бизнеса: тексто-графический электронный УМК»

/ Н. Н. Данилов. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 22901 от 27.07.2011 на электронное издание «Модели и оценка риска в сложных системах: тексто-графический электронный УМК» / Е. А. Николаева. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 22890 от 27.07.2011 на электронное издание «Теория прогнозирования: тексто-графический электронный УМК» / В. В. Мешечкин. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 22908 от 27.07.2011 на электронное издание «Эконометрика: текто-графический электронный УМК» / М. В. Косенкова. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 22902 от 27.07.2011 на электронное издание «Экономико-информационные технологии и программное обеспечение бухгалтерского учета: тексто-графический электронный УМК» / Т. А. Горская. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Регистрационное свидетельство № 22904 от 27.07.2011 на электронное издание «Математические модели в экологии: тексто-графический электронный УМК» / Е. С. Чернова. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

– Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012610511 «Поиск оптимального решения математической модели изменения структуры экономически активного населения» / А. А. Захарова, М. В. Косенкова, А. Г. Лещенко. – Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 10.01.2012.

– Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012610516 «Поиск оптимального решения задачи устойчивого развития региона» / А. А. Захарова, Е. С. Чернова. – Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 10.01.2012.

– Регистрационное свидетельство № 26308 от 13.06.2012 на электронное издание «История и методология прикладной математики и информатики: тексто-графический электронный УМК» / Е. А. Николаева. – ФГУП НТЦ «Информрегистр», Депозитарий электронных изданий.

8. Высокая оценка результатов научной школы

8.1. Премии Губернатора Кемеровской области:

– «За большой вклад в социально-экономическое развитие Кузбасса и подготовку кадров высшей квалификации» (2007 – 2008 гг.).

– «За проведение фундаментальных исследований по приоритетным направлениям социально-экономического развития Кузбасса» (2007 г.).

8.2. Дипломы за победу в конкурсах научных монографий и учебных пособий:

– Победителю внутривузовского этапа конкурса КемГУ «Лучшая монография – 2009» (в номинации естественные науки): Диплом КемГУ В. Н. Крутикову за монографию «Обучающиеся методы безусловной оптимизации и их применение».

– Победителю внутривузовского этапа конкурса КемГУ «Лучшая монография – 2009» (в номинации естественные науки): Диплом КемГУ Н. Н. Данилову за монографию «Кооперативное поведение в динамических системах со многими управлениями».

– За I место в конкурсе «Лучшее учебное пособие 2006 года» в номинации «Математика, естественные и компьютерные науки»: Диплом Администрации Кемеровской области Н. Н. Данилову за учебное пособие «Курс математической экономики».

– За победу в конкурсе Ученого совета КемГУ «Лучшее учебное пособие КемГУ 2006 г.» в номинации «Естественные науки»: Н. Н. Диплом Данилову за учебное пособие «Курс математической экономики».

8.3. Почетные грамоты:

– Администрации Кемеровской области (1999 г.).

– Кемеровского государственного университета (2004, 2012 (2) гг.).

8.4. Благодарственные письма:

– Администрации Кемеровской области (1999, 2004, 2009 гг.).

– Совета народных депутатов Кемеровской области (2006 г.).

– Кемеровского государственного университета (2008, 2010, 2011 гг.).

8.5. Награды аспирантов:

– Чернова Е. С.: стипендия Президента РФ на 2011 – 2012 учебный год (на основании приказа Министерства образования и науки РФ № 147 от 27.02.2012 г.).

– Чернова Е. С.: диплом III степени и нагрудный знак IV Евразийского экономического форума молодежи «Диалог цивилизаций: Youth Global Mind» (май 2013 г., Екатеринбург).

– Вершинин Я. Н.: стипендия Президента РФ на 2012 – 2013 учебный год (на основании приказа Министерства образования и науки РФ № 873 от 29.10.2012 г.).

9. Данные о научной школе. Дата получения сертификата научной школы «Дискретная математика и математическая кибернетика» – 25.11.2009 (протокол №13 заседания Ученого совета КемГУ).

Состав школы (в 2013 году) – 10 человек, в том числе два доктора наук и три кандидата наук.

Научный руководитель школы – Данилов Н. Н., доктор физико-математических наук, профессор, академик МАН ВШ, академик РАСН, заслуженный работник ВШ РФ, зав. кафедрой математической кибернетики, декан математического факультета.

За все время существования школы защищены две докторские и девять кандидатских диссертаций.

Список монографий и учебных пособий

1. Данилов, Н. Н. Кооперативное поведение в динамических системах со многими управлениями: монография / Н. Н. Данилов. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2008. – 222 с.
2. Факторы устойчивого развития регионов России: колл. монография / Н. Н. Данилов, Л. П. Инозем-

цева [и др.]. – Новосибирск: ЦРНС: СИБПРИНТ, 2008. – 341 с.

3. Петросян, Л. А. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения / Л. А. Петросян, Н. Н. Данилов. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1985. – 276 с.

4. Данилов, Н. Н. Игровые модели принятия решений / Н. Н. Данилов. – Кемерово: Изд-во КемГУ, 1981. – 122 с.

5. Данилов, Н. Н. Неантагонистические игры двух лиц / Н. Н. Данилов, Н. А. Зенкевич. – Кемерово: Изд-во КемГУ, 1990. – 100 с.

6. Данилов, Н. Н. Курс математической экономики / Н. Н. Данилов. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2002. – 444 с.

7. Данилов, Н. Н. Основы математической теории оптимальных процессов / Н. Н. Данилов, В. В. Мешечкин. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 219 с.

8. Данилов, Н. Н. Теоретико-игровое моделирование конфликтных ситуаций / Н. Н. Данилов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2005. – 119 с.

9. Данилов, Н. Н. Курс математической экономики / Н. Н. Данилов. – М.: Высшая школа, 2005. – 407 с.

10. Данилов, Н. Н. Исследование операций и математическое программирование / Н. Н. Данилов. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2005. – 106 с.

11. Данилов, Н. Н. Финансовая математика / Н. Н. Данилов. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2009.

12. Данилов, Н. Н. Оценка бизнеса / Н. Н. Данилов. – Кемерово: КемГУ, 2010.

13. Иноземцева, Л. П. Финансы в структурно-логических схемах / Л. П. Иноземцева. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004. – 227 с.

14. Иноземцева, Л. П. Государственные целевые бюджетные и внебюджетные фонды / Л. П. Иноземцева, Л. П. Курмашев. – Кемерово, 2008. – 261 с.

15. Иноземцева, Л. П. Целевые фонды в бюджетной системе Российской Федерации / Л. П. Иноземцева. – Кемерово: КемГУ, 2009. – 202 с.

16. Голоколосова, Т. В. Исследование операций / Т. В. Голоколосова, В. В. Мешечкин. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 120 с.

17. Николаева, Е. А. Финансовый анализ рискованных ценных бумаг / Е. А. Николаева. – Кемерово, 2009.

18. Мешечкин, В. В. Теория прогнозирования / В. В. Мешечкин. – Кемерово: КемГУ, 2009.

19. Николаева, Е. А. Построение меры риска / Е. А. Николаева, М. В. Косенкова. – Кемерово, 2010.

Информация об авторах:

Данилов Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики, декан математического факультета КемГУ, 8 (3842) 54-34-18, danilovnn@mail.ru.

Nikolay N. Danilov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematical Cybernetics, Dean of the Faculty of Mathematics, Kemerovo State University.

Иноземцева Лилия Петровна – кандидат экономических наук, доцент кафедры финансов и кредита КемГУ, 8 (3842) 58-44-26, lipetin@mail.ru.

Liliya P. Inozemtseva – Candidate of Economics, Assistant Professor at the Department of finance and credit, Kemerovo State University.

Мешечкин Владимир Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математической кибернетики КемГУ, 8 (3842) 54-25-09, vvm@kemsu.ru.

Vladimir V. Meshechkin – Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor at theDepartment of Mathematical Cybernetics, Kemerovo State University.