УДК 656.224

Г. Л. ВЕНЕДИКТОВ, В. М. КОЧЕТКОВ (ООО «РЖД Сервис Северо-Запад»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация)

ПОВЫШЕНИЕ ДОХОДНОСТИ ПЕРЕВОЗОК ПОСРЕДСТВОМ ОПТИМИЗАЦИИ КВОТ МЕСТ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СТАНЦИЙ

Предлагается алгоритм расчета оптимального количества продаваемых билетов на поезд для станции отправления и промежуточных станций, обеспечивающий максимальное значение совокупного дохода. Учитывается статистика имеющегося спроса для различных станций. Решение задачи сводится к реализации симплекс-метода для двойственной задачи линейного программирования со специализированной целевой функцией.

Ключевые слова: квотирование продажи мест на транспорте, симплекс-метод, двойственная задача линейного программирования

Введение

Вопросам повышения доходности пассажирских перевозок в последние годы уделяется значительное внимание. Проблема увеличения доходности разделена в [1] на две части – 1) оптимальное ценовое регулирование и 2) управление, основанное на количественном регулировании мест, предлагаемых к продаже. Там же приводится ряд алгоритмов, построенных как на принципах ценовой оптимизации, так и на основе квотирования мест, продаваемых по различающимся ценам. В [2, 3] представлены способы ценовой оптимизации, основанные на экономико-математическом моделировании с использованием моделей, обладающих лучшими характеристиками, чем аналогичные модели в работе [1].

Постановка задачи

Вопросы оптимального квотирования мест для промежуточных станций в форме, пригодной для использования на железнодорожном транспорте, в указанных работах не рассматривались. В этой связи уместно отметить, что в обзорной статье [4] прямо указывается на необходимость создания и внедрения методов оптимизации квот мест для промежуточных станций как одного из важных инструментов увеличения доходности. Разработке расчетных методов для решения указанной задачи и посвящена настоящая заметка.

Результаты

1. Математическая постановка задачи об оптимизации квот мест

Пусть между станциями отправления и конечного прибытия расположены промежуточные станции, оснащенные кассовыми терминалами для продажи билетов. Каждой станции можно сопоставить номер i в порядке следования поезда по маршруту, причем для станции отправления примем $i = 0$, а для станции прибытия $i = N$. Промежуточным станциям отвечают номера от 1 до $N - 1$.

Пусть далее для рассматриваемого поезда и класса суммарное число мест в вагонах равно W. Билеты на эти места могут продаваться как на станции отправления, так и на промежуточных станциях. Количество пассажиров, желающих проехать от станции i к станции j, равно S_{ij}, при этом соответствующая стоимость билета равна p_{ij}. Задача состоит в том, чтобы найти такое количество билетов M_{ij}, предлагаемых пассажирам для перемещения со станции i на станцию j (при естественном условии $j > i$), чтобы совокупный доход был максимальным.

Число искомых величин M_{ij} при $j > i$ равно $N(N+1)/2$. При этом доход, полученный от продажи билетов, определяется формулой

$$D = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} p_{ij} M_{ij} . \qquad (1)$$

Сформулированным выше условиям отвечают следующие ограничения. Ограниченность спроса на билеты:

$$M_{ij} \le S_{ij}, \ 0 \le i \le N-1, \, i+1 \le j \le N . \qquad (2)$$

Условия, задающие ограниченность мест в поезде, сводятся к требованию, чтобы на любом перегоне между двумя соседними станциями число пассажиров не превышало величину W. Соответствующие условия имеют вид

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=k+1}^{N} M_{ij} \le W, \quad k = 0, ..., N-1 . \qquad (3)$$

Общее число перечисленных ограничивающих условий, таким образом, равно $N+[N(N+1)/2]$.

К условиям (2)–(3) иногда могут добавляться дополнительные требования, означающие, например, что для каких-то промежуточных станций размер квот вне зависимости от спроса не должен быть меньше определенной величины (фиксированные квоты для депутатов, военных и т.п.):

$$\sum_{j=i+1}^{N} M_{ij} \geq V_i\ ,\ i = 0, \ldots, N-1\ . \qquad (4)$$

Максимальное число условий составляет, таким образом, величину $2N+[N(N+1)/2]$. При этом отсутствие лимита квот для каких-то станций означает, что соответствующее значение V_i равно нулю.

Соотношениям (1)–(4) отвечает задача линейного программирования с целевой функцией D, для которой отыскивается максимальное значение. Как известно, подобные задачи могут решаться с использованием хорошо разработанной процедуры симплекс-метода [5, 6].

Имеется, однако, трудность, связанная с тем, что величины S_{ij}, задающие спрос, как правило, подвержены непредсказуемым изменениям во времени, то есть являются случайными величинами. Оставляя на время этот вопрос (в разделе 2 излагается способ преодоления указанной трудности), обратимся к особенностям реализации симплекс-метода для решения поставленной задачи.

Как известно, искомые величины находятся методом последовательного преобразования симплекс-таблиц, представляющих собой прямоугольные матрицы. Искомым величинам M_{ij} при этом отвечают столбцы матриц и, следовательно, упомянутые величины по своей природе должны быть одноиндексными. В нашем же случае величины M_{ij} описываются парой индексов, в связи с чем возникает задача представления их в одноиндексной форме. Опуская промежуточные выкладки, приведем решение указанной проблемы.

Величинам M с индексами i и j можно сопоставить тождественные им величины X_k с одним индексом, равным значению

$$k = iN - \frac{i(i-1)}{2} + (j-i)\ . \qquad (5)$$

Такое сопоставление двух индексов одному взаимно однозначно. После этого поставленная задача линейного программирования решается стандартным симплекс-методом для переменных X_k.

По найденным в итоге значениям X_k индексы соответствующих величин M_{ij} находятся с помощью следующей процедуры. Строим последовательность $N+1$ чисел $\xi_s = sN - s(s-1)/2$, $s = 0,\ldots, N$. Первый индекс i находим из условия $\xi_i < k \leq \xi_{i+1}$, после чего второй индекс j рассчитываем по формуле $j = i + (k - \xi_i)$. Указанная процедура позволяет использовать симплекс-метод в его стандартной форме и находить, таким образом, наилучшее, в отношении доходности, распределение квот для промежуточных станций. Далее приводятся примеры расчета по описанной схеме.

2. Переход к задаче стохастического программирования

Как отмечалось, величины S_{ij} в формуле (2), определяющие спрос на билеты, целесообразно рассматривать как случайные. Применяя экономико-математическое моделирование, можно по истории продаж оценить статистику спроса и в итоге найти для случайных величин S_{ij} оценки для среднего значения и дисперсии.

Основная трудность при оптимизации квот для отдельных станций с учетом случайного характера спроса состоит в том, что указанные величины S_{ij} включены не в целевую функцию (1), а в ограничительное условие (2). В связи с этим целесообразно перейти от задачи (1)–(4) к отвечающей ей двойственной задаче линейного программирования [5,6]. Для двойственной задачи, отвечающей исходной задаче (1)–(4), целевая функция, содержащая искомые величины Y_k ($k = 1, \ldots, 2N+N[N+1]/2$), имеет вид

$$D_1 = \left\{ \sum_k \left[1, \frac{N(N+1)}{2} \right] Y_k S_k \right\} + W \times$$
$$\times \left\{ \sum_k \left[\frac{N(N+1)}{2} + 1, \frac{N(N+1)}{2} + N \right] Y_k \right\} + \qquad (6)$$
$$\left\{ \sum_k \left[\frac{N(N+1)}{2} + N + 1, \frac{N(N+1)}{2} + 2N \right] Y_k V_k \right\},$$

где индекс k для величин S_k и V_k пересчитывается через индексы i и j по формуле (5).

В формуле (6) из-за некоторой громоздкости в записи верхних и нижних индексов суммирования эти индексы указываются в строке, при этом используется обозначение

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} a_k \equiv \left\{ \sum_k [k_1, k_2] a_k \right\}.$$

Как известно, в соответствии с принципом двойственности, для нахождения искомых величин Y_k отыскивается *минимальное* значение целевой функции (6).

Ограничивающие условия для двойственной задачи линейного программирования строятся по стандартной схеме [5,6] и не содержат ограничений, включающих случайные величины S_{ij} . Указанное обстоятельство позволяет для поиска оптимальных квот M_{ij} перейти к задаче *стохастического* программирования [7] и искать минимум не самой целевой функции (6), а ее математического ожидания. В связи с этим следует произвести следующие замены: если величины S_k в (6) имеют дискретное распределение $P(S_k = m) = f_k(m)$, то вместо S_k в формуле (6) следует подставлять величины $\sum_{m=0}^{\infty} mf_k(m)$, если же рассматривается непрерывная плотность распределения $f_k(z)$, то вместо S_k подставляются величины $\int_0^{\infty} zf_k(z)dz$.

После нахождения минимального значения целевой функции двойственной задачи с целевой функцией (6) искомые величины $X_k = M_{ij}$ исходной задачи находятся стандартным методом – как часть строки финальной симплекс-таблицы для величин Y_k [5,6]. После этого для отыскания оптимальных квот остается лишь от индекса k для величин X_k перейти описанным выше методом к индексам i и j для величин M_{ij}.

Поскольку размер квот определяется целым числом, то в тех случаях, когда решение задачи содержит числа, не являющиеся целыми, целесообразно применять процедуру Гомори [5]. Однако, в связи с тем, что рассчитываемые числа M_{ij} обычно оказываются весьма большими, можно, как правило, действовать более простым методом – округлять полученные значения M_{ij} до ближайшего целого.

3. Оценка величин S_k, задающих пассажирский спрос

Практика расчетов показывает, что результат нахождения оптимальных квот в наибольшей мере определяется объемами потенциальных пассажирских контингентов S_k, входящих в целевую функцию (6). В связи с этим в настоящем разделе описывается процедура нахождения среднего значения и стандарта распределения для упомянутых величин S_k.

В дальнейшем оказывается удобным рассчитывать не сам объем контингента S_k,, а его отношение к числу предоставленных мест в поезде. Эту случайную величину Z далее будем называть относительным объемом контингента. Пусть задана ее плотность распределения $f(y,p)$, где y – аргумент, а цена билета p является параметром распределения.

Через введенную величину Z можно оценить показатель использования вместимости (далее для краткости – населенность): это та часть относительного объема контингента, для которой в поезде имеются места. При оценке населенности величина Z не превышает единицу и зависимость среднего значения населенности от цены p дается соотношением

$$\tilde{N}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{MIN}(y,1) f(y,p)dy \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{1} yf(y,p)dy + \int_{1}^{\infty} f(y,p)dy \,. \qquad (7)$$

Если распределение $f(y,p)$ нормальное с дисперсией $\sigma^2(p)$ и средним $\bar{S}(p)$, то вычисления по формуле (7) дают

$$\tilde{N}(p) = 1 + [\bar{S}(p) - 1] \cdot \Phi\left(\frac{1-\bar{S}(p)}{\sigma(p)}\right) -$$

$$-\frac{\sigma(p)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[1-\bar{S}(p)]^2}{2\sigma^2(p)}\right), \qquad (8)$$

где символом Φ обозначена функция нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией. Введенная таким образом величина (8) отвечает средней населенности как функции цены билета p.

С другой стороны, к оценке величины $\tilde{N}(p)$ можно подойти, используя модельную зависимость спроса от цены. Спрос выражается через населенность $\hat{N}(p)$, для которой может использоваться модельная зависимость следующего вида [3]:

$$\hat{N}(p) = 1 \; при \; p \le p_{гр}, \;\; \hat{N}(p) = 1 - \left(\frac{p - p_{гр}}{p_{пр} - p_{гр}}\right)^{\alpha}$$

$$при \;\; p_{гр} < p \le p_{пр} \qquad (9)$$

Входящие в выражение (9) граничная и предельная цены $p_{гр}$ и $p_{пр}$ [3], а также показатель степени α считаются известными на основе анализа истории продаж и/или проведенных опросов пассажиров, выявивших диапазон их ценовых предпочтений.

В последующем удобно использовать не сами цены p, а их отношение к граничной цене

$p_{гр}$. В дальнейшем всюду, за исключением расчета целевой функции, достаточно оперировать относительными ценами $x = p/p_{гр}$. Мы сохраним введенные обозначения для населенности и объема контингента, считая что для них произведен пересчет в относительные цены.

В записи через относительную цену выражение (9) запишется в форме

$$\hat{N}(x) = 1 \text{ при } x \le 1 , \quad \hat{N}(x) = 1 - \left(\frac{x-1}{\xi - 1}\right)^{\alpha}$$

$$\text{при } 1 < x \le \xi, \qquad (10)$$

где $\xi = p_{пр}/p_{гр}$.

В формуле (8) после перехода к относительным ценам функция $\tilde{N}(x)$ будет зависеть от величин $\bar{S}(x)$ и $\sigma^2(x)$. Для не слишком широкого интервала относительных цен x, отвечающего реализуемым на практике значениям спроса, зависимость $\bar{S}(x)$ можно представить в форме линейного соотношения

$$\bar{S}(x) = b - m \cdot x \qquad (11)$$

с неизвестными коэффициентами m и b. Для величины $\sigma(x)$ в том же ценовом интервале можно принять формулу[1]

$$\sigma(x) = \sigma_0 \cdot \sqrt{\bar{S}(x)} \qquad (12)$$

с неизвестным коэффициентом σ_0.

Сопоставляя в некотором ценовом диапазоне величину $\tilde{N}(x)$ с модельной зависимостью (10), можно по методу наименьших квадратов найти неизвестные коэффициенты m, b и σ_0 в выражениях (11) и (12). С этой целью в нужном ценовом диапазоне следует взять K различных значений относительной цены x_i ($1 \le i \le K$) и в соответствии с методом наименьших квадратов минимизировать форму

$$F = \sum_{i=1}^{K} \{1 + [\bar{S}(x_i) - 1] \cdot \Phi\left(\frac{1 - \bar{S}(x_i)}{\sigma(x_i)}\right) -$$

$$- \frac{\sigma(x_i)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[1 - \bar{S}(x_i)]^2}{2\sigma^2(x_i)}\right) - \hat{N}(x_i)\}^2 , \qquad (13)$$

где значения $\hat{N}(x_i)$ рассчитываются по формуле (10), а величины $\bar{S}(x_i)$ и $\sigma(x_i)$ – в соответствии с соотношениями (11) и (12). На практике можно ограничиться значением $K = 10$.

Минимизацию формы (13) можно производить по алгоритму последовательных градиентных спусков [8]. После нахождения указанным способом искомых коэффициентов m и b величины S_k, задающие потенциальные объемы контингентов, могут рассчитываться по формуле

$$S_k = W(b - mx), \qquad (14)$$

где W – количество мест нужного класса в рассматриваемом поезде, а x – относительная цена билета. При этом величина S_k может быть как меньше W (удовлетворенный спрос), так и превышать это значение (неудовлетворенный спрос).

4. Тестовые примеры расчета оптимальных квот для промежуточных станций

При большом количестве промежуточных станций и различных значениях параметров, задающих ограничительные условия исходной задачи (1)–(4), реализуются разнообразные стратегии принятия оптимальных решений в отношении искомых квот. Однако наиболее важные особенности при этом обнаруживаются уже для $N = 3$ (две промежуточные станции).

Для проведения тестовых расчетов использовалась следующая модель. Число мест в выбранном классе поезда принималось равным $W = 200$. При $N = 3$ расстояния между всеми соседними станциями принимались одинаковым и в связи с этим величины p_{ij}, S_{ij} и V_i рассчитывались по формулам

$$p_{ij} = j - i, \quad S_{ij} = k_C(j-i)W/N, \quad V_i = \\ = k_Б(N-i)W/N, \quad i = 0,1,2, \quad i < j \le N. \qquad (15)$$

В формулах (15) спрос и число бронируемых мест задаются соответственно коэффициентами k_C и $k_Б$, которым в расчетах придавались различные значения.

Для получения оценки, показывающей значимость оптимизации квот мест для промежуточных станций, использовалась следующая процедура. Сначала путем решения соответствующей задачи линейного программирования симплекс-методом находились оптимальные величины квот M_{ij} и отвечающий им максимальный доход $D_{\max}$. Затем рассчитанные квоты M_{ij} заменялись на измененные квоты $\tilde{M}_{ij}$, от-

[1] Пропорциональная связь между дисперсией и средним характерна для канонических дискретных распределений типа биномиального или распределения Пуассона. Впрочем, в рассматриваемом случае при не слишком широких ценовых интервалах вид этой связи оказывается несущественным из-за произвольности коэффициента σ_0.

личающиеся от исходных поочередно в сторону уменьшения и увеличения на некоторую долю ε. Для измененных квот $\tilde{M}_{ij}$ рассчитывалась величина дохода $\tilde{D}$ по формуле (1) и находилась величина относительного дохода $d_{отн} = \tilde{D} / D_{\max}$.

На рис. 1 представлена рассчитанная описанным способом величина относительного дохода $d_{отн}$ как функция относительного отклонения от оптимальности ε. Кривым 1, 2 и 3 отвечают значения коэффициента спроса k_C, равные соответственно 0,3, 0,6 и 0,9. Величина $k_Б$ принималась равной 0,1.

Как видно из рис. 1, оптимизация квот мест значительно влияет на величину дохода и при высоком спросе и неудачном распределении квот доход может уменьшаться на десятки процентов.

Влияние спроса на доход при оптимальных квотах мест иллюстрируется графиком на рис. 2, рассчитанным для ε = 0,1. Из этого графика видно, что при коэффициенте спроса, превышающем 0,6, доход перестает увеличиваться. Объяснением этого факта является наличие в этом случае избыточного спроса: при спросе, превышающем некоторую границу, из-за ограниченности мест в поезде не все потенциальные пассажиры могут приобрести билет – это и задает потолок максимального дохода.

Рис. 1. Влияние относительного отклонения от оптимальности ε на величину относительного дохода $d_{отн}$

Как показывают расчеты, предложенная методика нахождения оптимальных квот мест для промежуточных станций позволяет добиться заметного увеличения доходности пассажирского сообщения. Так, например, применительно к направлению, включающему 8 промежуточных станций и обеспечивающему при высоком пассажирском спросе средний годовой доход для одного поезда порядка 250 млн руб., использование оптимального квотирования может обеспечить увеличение доходности на 17…28 млн руб.

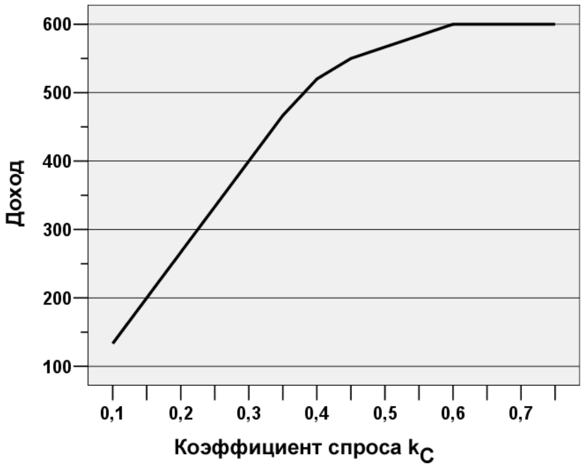

Рис. 2. Влияние спроса на доход при оптимальных квотах мест

Выводы

Проведенные расчеты показали также, что описанная методика с программной стороны легко реализуется на основе хорошо разработанных к настоящему времени алгоритмов и может найти в связи с этим широкое практическое применение при эксплуатации пассажирского железнодорожного транспорта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Talluri, K. T. The Theory and Practice of Revenue Management [Text] / K. T. Talluri, G. J. Van Ryzin. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 713 p.
2. Венедиктов, Г. Л. Оптимизация доходов от перевозок пассажиров скоростными поездами постоянного формирования [Текст] / Г. Л. Венедиктов // Экономика железных дорог. – 2005. – № 8. – С. 25–29.
3. Методы реализации системы управления доходностью применительно к пассажирскому железнодорожному сообщению [Текст] / О. Ф. Мирошниченко [и др.] // Вестник ВНИИЖТа. – 2010. – № 6. – С. 10–15.
4. Комаров, Л. К. Динамическое ценообразование и управление доходностью пассажирских перевозок [Текст] / Л. К. Комаров // Железнодорожный транспорт. – 2010. – № 1. – С. 27–30.
5. Лунгу, К. Н. Линейное программирование: руководство к решению задач [Текст] / К. Н. Лунгу. – М.: Физматлит, 2005. – 128 с.
6. Кузнецов, А. В. Высшая математика: математическое программирование [Текст] / А. В. Кузне-

цов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн: Вышэйшая шк., 1994. – 286 с.
7. Ермольев, Ю. М. Методы стохастического программирования [Текст] / Ю. М. Ермольев. – М: Наука, ГИФМЛ, 1976. – 244 с.
8. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.-СПб.: Физматлит, 2001. – 630 с.

Поступила в редколлегию 25.08.2011.
Принята к печати 07.09.2011.

Г. Л. ВЕНЕДІКТОВ, В. М. КОЧЕТКОВ

ПІДВИЩЕННЯ ПРИБУТКОВОСТІ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПТИМІЗАЦІЇ КВОТИ МІСЦЬ ДЛЯ ПРОМІЖНИХ СТАНЦІЙ

Пропонується алгоритм розрахунку оптимальної кількості продаваних квитків на поїзд для станції відправлення і проміжних станцій, що забезпечує максимальний сукупний дохід. Враховується статистика наявного попиту для різних станцій. Рішення задачі зводиться до реалізації симплекс-методу для двоїстої задачі лінійного програмування із спеціалізованою цільової функцією.

Ключові слова: квотування продажу місць на транспорті, симплекс-метод, двоїста задача лінійного програмування

G. L. VENEDIKTOV, V. M. KOCHETKOV

GAIN OF TRANSPORTATION REVENUE BY OPTIMIZATION OF QUOTA ALLOCATION FOR IN-BETWEEN STATIONS

An algorithm for calculation of optimal train ticket selling share for a departure station and in-between stations is proposed to obtain the ceiling total income. Available demand statistics for relevant stations are taken into account. The solution of the problem is reduced to applying of simplex-method to dual linear programming procedure with special objective function.

Keywords: quota allocation for train ticket selling, simplex algorithm, dual linear-programming problem