УДК 658.512

А. Я. КУЛІЧЕНКО (Львівська філія ДІІТу)

ПРОЕКТУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПРИ ВИРІШЕННІ ІНЖЕНЕРНИХ ЗАВДАНЬ

У роботі розглядаються підходи по використанню положень теорія імовірності та статистики при вирішенні питань проектування технологічних процесів. На основі аналізу відомих методів запропоновано методику побудови залежностей з використанням законів розподілення функцій випадкових змінних.

*Ключові слова:*Теорія імовірності, статистика, технологія, функція, сталь

Теорії імовірності та статистики як прикладні дисципліни займають визначене положення в теоріях проектування. Обумовлене наведене положення тим місцем, яке займають теорії імовірності та статистики як дисципліни в математиці. Визначення, що використовуються при цьому, охоплюють діапазон від абсолютно абстрактних аксіом, строгого поняття відносної частини події до суб'єктивного її визначення.

Переважаюче поширення отримав нормальний закон розподілення, який використовується в моделях, що описують випадкову природу будь-якої величини.

Представляє визначений інтерес припущення, що математичне очікування є однією з характеристик, що дозволяють відобразити властивості випадкової величини. З іншого боку, математичне очікування може бути поставлене на один шабель з модою, медіаною або навіть з середнім значенням. Використання математичного очікування для вирішення поставлених питань пояснюється з наступного: середнє значення із вибірки може розглядатися як випадковий параметр, а закон його розподілення прагне до нормального.

В теорії імовірності та статистики достатньо часто спостерігається нагромадження одного невизначеного поняття на інше. В роботі зроблено спробу використання операції кодування при моделюванні невизначеної ситуації.

Інженерне визначення імовірності. Визначення імовірності, яке є найбільш прийнятним, в дійсності має суто суб'єктивний характер. Імовірність – це суб'єктивна міра, або кодифікація, яка пов'язана з оцінкою степені правдоподібності тої чи іншої події. Наведена міра обмежена границями від нуля (подія неправдоподібна) до одиниці (цілковита впевненість у тому, що подія обов'язково відбудеться). Таке визначення не виключає можливість використання поняття очікуваної відносної частоти події, як однієї з можливих інтерпретацій смислу імовірнісної оцінки.

Однією із важливих задач при розробленні методики підходу до застосування поняття імовірності є пошук методів найкращого узгодження прийнятого рішення із достовірними даними. Наявність достовірних даних ще не є достатнім для визначення випадкової природи тієї чи іншої величини; необхідним є ще й значний об'єм цих даних. Для конкретно опису характеру змін величини можна побудувати гістограму і підібрати криву, яка може бути прийнята за функцію розподілення, як показано на рис. 1. З іншого боку, на рис. 2 наведено зміни, до яких може привести зміна кількості інтервалів.

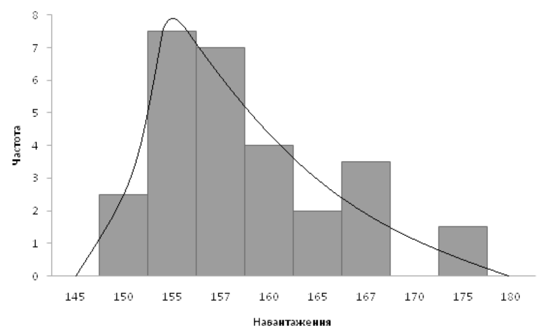

Рис. 1. Відображення випадкової змінної за допомогою гістограми

Побудова імовірнісних моделей. Основною проблемою, із якою зіштовхуються при застосуванні теорії імовірності, є визначення законів розподілення, які описують досліджувані величини. Представляє визначений інтерес застосування функції густини імовірності як засобу кодифікації невизначеності та оцінки імовірності подій, пов'язаних із даними випадковими величинами. При наявності значної вибірки досліджуваних величин вдасться побудувати функцію густини імовірності. Однак чим більший об'єм вибірки, тим менша гарантія надійності прийнятого рішення. При статистичному підході враховуються лише такі підходи, які дозволяють визначати параметри тільки кількох стандартних теоретичних законів розподілення – нормального, експоненціального, гамма і бета. Може бути застосована теорія розподілення Вейбулла (розподілення імовірностей неперервної випадкової величини *X*, функція розподілення якої задається формулою

$$F(x) = 1 - \exp[-(x/b)^c],$$

де $0 \le x \langle \infty, b \rangle 0; c \rangle 0$).

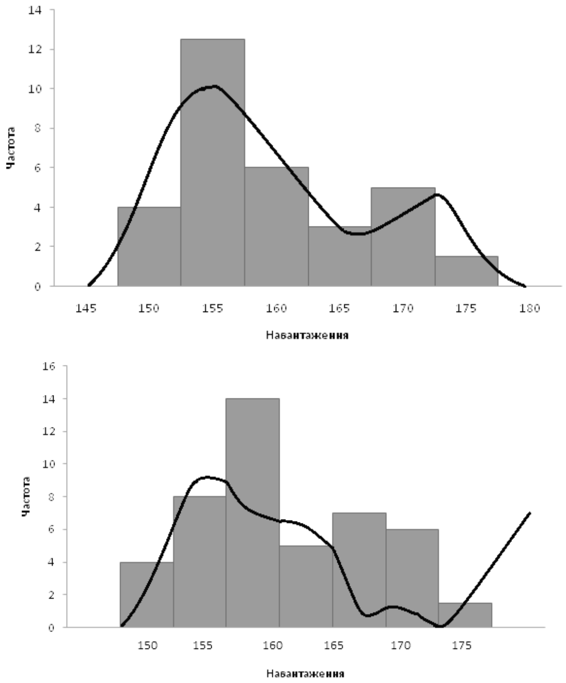

Рис. 2. Побудова показників з рис. 1 при різній кількості інтервалів

При статичному підході оцінка достатньо часто ускладнюється використанням декількох конкуруючих методів оцінки параметрів. Однак, який із них вибрати – задача дуже складна. Хоча відомі і критерії згоди, які дозволяють кількісно охарактеризувати степінь співпадіння при порівнювальному оцінюванні. Можна вважати достатньо розповсюдженим метод, який дозволяє підігнати існуючі дані до заздалегідь заданого закону розподілення і одночасно бути впевненим в коректності зробленого припущення. Такий підхід має назву метод середнього або рангових графіків [1]. З теорії порядкових статистик [2] слідує, що при розташуванні відліки у порядку зростання, значення кумулятивної функції розподілення, яке відповідає x_i, може бути знайдене за допомогою співвідношення:

$$F(x_i) = \frac{i}{n+1},$$

де *n* – об’єм виборки.

Приведення до залежності у вигляді лінії, за рахунок відповідного перетворення змінної, отримується чітка пряма залежність кумулятивної функції від представлених даних (рис. 3). Для оцінки ступеня коректності вибраної функції розподілення можна використовувати критерій згоди або довірчі інтервали.

Існують методи побудови функцій густини імовірності згідно отриманих даних, на основі прийняття заздалегідь деякого теоретичного закону розподілення.

Один із методів, який наведений на рис. 1, зводиться до побудови гістограми з використанням згладженої та нормованої функції густини імовірності. Об’єм вибірки повинен бути достатньо великим. Така методика припускає обрахування перших 4…6 моментів і побудови розподілення максимальної ентропії; з використанням співвідношень [2]:

$$S = -\int_R f(x) \cdot \ln[f(x)]dx = \max$$

$$\int_R f(x)dx = 1,$$

$$\int_R xf(x)dx = \mu,$$

$$\int_R (x-\mu)^i f(x)dx = c_i,$$

де $i = 2,...,m$;

S – ентропія;

$f(x)$) – функція густини імовірності випадкової величини x;

μ – математичне очікування;

c_i – i-й центральний момент;

т – кількість моментів, які використовуються.

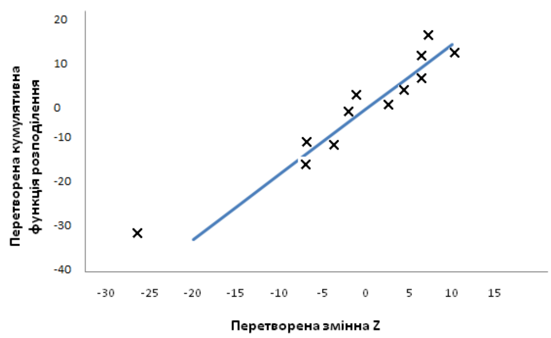

Рис. 3. Лінеарезований середньоранговий графік для розподілення Вейбулла

Наведені залежності фактично визначають параметри функцій:

$$f(x) = \exp\left(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_m x^m\right).$$

Це дозволяє отримати доволі спрощені за формою функції густини імовірності. Характерний приклад, наведений на рис. 4, який відповідає кривої що побудована для вибирання із 26 елементів. Вигляд правої частини вказує на присутність викиду; сімейство кривих відповідає різним нижнім границям. З аналізу отриманих кривих можна визначити конкретну нижню межу елемента, а також прийняти рішення про необхідність врахування або нехтування викидами.

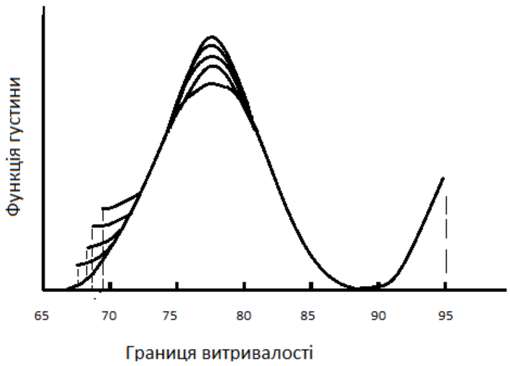

Рис. 4. Функція густини максимальної ентропії

Еволюційний метод побудови функцій густини імовірності. Гіпотеза про еволюційну стохастичну подібність полягає у тому, що умови моделювання і зовнішній вплив по суті є подібними. При цьому форма імовірності функції являється сталою і змінюється лише масштаб. Із цього виходить, що існує деяке апріорно відоме перетворення змінного параметру, яке і визначає зміну масштабу:

$$x_n - l_n = k_S\left(x_0 - l_0\right),$$

де x_n – змінна величина, яка характеризує новий елемент конструкції;

x_0 – змінна, яка характеризує старий елемент;

k_S – параметр перетворення, або еволюційний коефіцієнт;

l_n – нижня границя нового елементу;

l_0 - нижня границя для старого елементу.

Співвідношення між функціями густини імовірності має вигляд [3]:

$$f_n\left(x_n\right) = \frac{1}{k_S} f_0\left(x_0\right) = \frac{1}{k_S} f_0\left[l_0 + \frac{1}{k_S}\left(x_n - l_n\right)\right].$$

Якщо дані про новий елемент відсутні, але є хоча б невелика вибірка його даних, то їх можна використовувати для перебудови попередньої функції густини імовірності. Параметри k_S та l_n, можна визначити за допомогою графіку середнього рангу, застосовуючи метод найменших квадратів. Після упорядкування еле-ментів вибірки, для випадкової пари значень k_S та l_n може бути оцінена нова теоретична кумулятивна функція розподілення по елементу x_i:

$$F_n\left(x_i\right) = \int_n^{x_i} f_n\left(x\right)dx = F_0\left[l_0 + \frac{1}{k_S}\left(x_i - l_n\right)\right],$$

де $i = 1, n$.

Розходження між теоретичним значенням і визначеними з аналізу залежності середнього рангу і оцінюються співвідношенням [4]:

$$U = \sum_{i=1}^{n}\left[F_n\left(x_i\right) - \frac{i}{n+1}\right]^2 = \min$$

або за допомогою стандартної методики оптимізації.

В якості практичного використання наведеного підходу, розглянемо данні конструкційної сталі 09Г2 (ГОСТ 19281-73). Одне із значень межі плинності приймається в якості «старої» випадкової змінної, а друге буде «новим». На основі «нового» розподілення складається теоретична вибірка у вигляді [2] (модель реальної вибірки). Далі, таку функцію густини розподілення (нову) порівнюють з «новим» законом розподілення (рис. 5) та визначають необхідні дані.

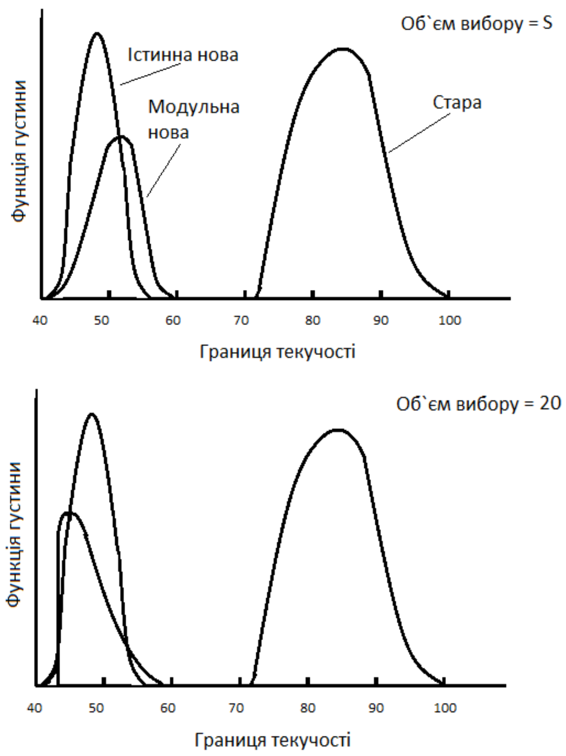

Рис. 5. Еволюційна функція густини: стара змінна (границя текучості для сталі 09Г2), нова змінна (границя текучості для конструкційної сталі з вмістом вуглецю 0,17 %)

На основі використання розглянутих методик по вибору функцій густини імовірності, стає можливим розробити алгоритм, який може бути застосований до будь-якого визначеного закону розподілення.

Висновок

Розглянуті методичні підходи можуть бути корисними для побудови функцій густини імовірності при аналізі процесів з використанням стохастичної оптимізації.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Хан, Г. Статистические модели в инженерных задачах [Текст] / Г. Хан, С. Шапиро. – М. : Мир, 1979. – 232 с.
2. Янг, Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления [Текст] / Л. Янг. – М. : Мир, 1974. – 488 с.
3. Сиддол, Э. Вероятностное проектирование с использованием кривых распределения, получаемых по заданным моментам максимизации функции энтропии [Текст] / Э. Сиддол, Д. Дайаб // Конструирование и технология машиностроения. - 1985. - № 3. – С. 64–71.
4. Айвазян, С. А. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1993. – 386 с.

Поступила в редколлегию 03.11.2011.
Принята к печати 09.11.2011.

А. Я. КУЛИЧЕНКО

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАНИЙ

В работе рассматриваются подходы по использованию положений теории вероятности и статистики при решении вопросов проектирования технологических процессов. На основе анализа известных методов предложена методика построения зависимостей с использованием законов распределения функций случайных переменных.

Ключевые слова: теория вероятности, статистика, технология, функция, сталь, металл

A. KULICHENKO

THE PROJECTION AND OPTIMIZATION AT SOLVE ENGINEERING PROBLEMS

The thesis studies of use position of the probability theory and statistics at solve of questions technology processes. The thesis represents the most prevailing methods and suggests methods of developing laws of function distribution of new random variables.

Keywords: probability theory, statistic, technology, function, steel, metal